This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

NON
CIRCULATING

QA
35
.D323

L'ARITHMETIQUE DES GÉOMÈTRES,

OU

NOUVEAUX ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

Ce Livre appartient à l'école d'artillerie de metz

CONTENANT LA THEORIE ET LA PRATIQUE de l'Arithmétique ; une introduction à l'Algébre & à l'Analyſe ; avec la réſolution des Equations du ſecond & du troiſiéme degré ; les Raiſons, Proportions & Progreſſions Arithmétiques & Géométriques ; les Combinaiſons ; l'Arithmétique des Infinis ; les Logarithmes ; les Fractions décimales, &c.

Ouvrage très-utile pour mettre les Commençans en état d'apprendre par eux-mêmes, & ſans le ſecours d'aucuns Maîtres, tout ce qu'il y a de plus néceſſaire à ſavoir dans cette Science.

Par Monſieur l'Abbé DEIDIER.

A PARIS,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, ruë ſaint Jacques, vis-à-vis la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXXIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

PRÉFACE.

ON convient assez depuis long-tems, qu'il n'est pas possible de faire des progrès dans la Géométrie, si l'on ignore l'Arithmétique ; mais la question est de savoir de quelle espéce d'Arithmétique l'on veut parler. La plûpart s'imaginent que pour avoir la clef générale des Mathématiques, il leur suffit de savoir ajouter, soustraire, faire une Multiplication ou une Division, ou tout au plus extraire une Racine ; & en cela ils se trompent aussi grossiérement que le feroit un homme qui se croiroit grand Géométre, parce qu'il sauroit quelques pratiques de la Régle & du Compas. L'Arithmétique est une Science, & toute Science a ses axiômes, ses principes & ses théoremes d'où elle tire ses conclusions ou régles générales, qui constituent ce qu'on appelle la pratique. Ne savoir que ces conclusions, c'est être l'écho de la Science, mais ce n'est pas la posséder ; & de-là vient qu'on va toujours à tâtons, qu'on se trompe souvent en appliquant à un problême une régle au lieu

d'une autre ; & qu'on fait, la plûpart du tems, autant de chûtes qu'on s'efforce de faire de pas. Que faut-il donc faire pour être bon Arithméticien, ou du moins pour entendre avec plus de facilité ce que les Mathématiques enſeignent à la faveur des connoiſſances qu'on aura priſes dans l'Arithmétique ? Le voici. Il faut s'attacher à découvrir les propriétés des Nombres, à démêler leurs différens rapports ; & à les ſuivre, ſans s'égarer, dans la variété des Combinaiſons dont ils ſont ſuſceptibles ; ce qui demande une étude plus ſérieuſe, & des réfléxions plus profondes que l'on ne penſe ordinairement : comme on verra dans cet Ouvrage, dont je vais expliquer le Plan en peu de mots.

Ce Traité contient cinq Parties. Dans la premiere, je donne les principes ſur leſquels ſont fondées les quatre premieres opérations de l'Arithmétique ; à ſavoir, l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication & la Diviſion des Nombres entiers & rompus, ſoit ſimples, ſoit compoſés ; & à leur occaſion j'explique les régles du Toiſé ordinaire & celles du Toiſé des bois. Les démonſtrations que j'en donne ſont tirées des propriétés les plus ſimples des Nombres, & peuvent par conſéquent être entenduës facilement de toutes ſortes de perſonnes. Cette premiere Partie, de même que les quatre ſuivantes, eſt entremêlée de grands nombres d'Exemples que j'ai variés ſelon les différens cas, pour conduire moi-même les Commençans dans ces routes, & les mettre en état de marcher ſeuls ſans crainte de ſe tromper.

Dans la ſeconde Partie, je détaille les autres opérations de l'Arithmétique, qui ſont la régle de Trois, directe & indirecte, ſimple & compoſée ; la régle conjointe ; les ré-

gles d'intérêts ; celles d'eſcompte, de change, des trocs, de la tare des Marchandiſes ; celles de Compagnie ſimple & de Compagnie compoſée, où l'on trouve la Pratique des Financiers pour la levée des deniers Roïaux ; les opérations pour la levée des Dixmes & pour les diſcuſſions de Banqueroute ; la régle vulgairement appellée Teſtamentaire ; les régles d'une & de deux fauſſes poſitions ; celles d'alliage ; l'extraction de la racine quarrée & celle de la racine cube, avec les régles d'approximation lorſque les racines ne peuvent pas ſe tirer exactement ; le tout accompagné de démonſtrations ſimples & intelligibles, & de grands nombres d'Exemples qui en rendent la pratique facile ; deſorte qu'on peut regarder ces deux premieres Parties comme compoſant une Arithmétique également utile pour les Géométres, & pour les perſonnes qui s'adonnent au Commerce.

Dans la troiſiéme Partie, j'explique d'abord les principes de l'Algebre, c'eſt-à-dire, la maniere de faire les opérations de l'Arithmétique, en emploïant les lettres de l'Alphabet au lieu des chiffres dont on a coutume de ſe ſervir. De-là je paſſe au calcul des expoſans & à celui des radicaux, ſur leſquels je me ſuis étendu peut-être plus que l'utilité de la matiere ne ſemble le demander ; mais les Commençans n'y perdront rien, & pour peu qu'ils s'y appliquent, ils ſe familiariſeront avec les produits Algébriques, & ſe procureront par-là la facilité d'entendre ſans peine le reſte de l'Ouvrage. Je viens enſuite à l'Analyſe, qui eſt la maniere d'appliquer le calcul Algébrique à la réſolution des queſtions propoſées. Ces queſtions peuvent être ou déterminées ou indéterminées. Les queſtions déterminées ſont celles qui ne ſont ſuſceptibles que d'une

ſeule réſolution; les indéterminées peuvent ſe réſoudre de pluſieurs différentes façons. Je donne grand nombre d'Exemples des unes & des autres, où je détaille les Principes dont on doit ſe ſervir pour en venir à bout; mais comme ces Exemples ne roulent que ſur les équations dans leſquelles l'inconnuë ſe trouve du premier degré ou peut y être réduite, je paſſe de-là à la réſolution du ſecond & du troiſiéme degré; & ſi je ne vais pas plus loin, c'eſt parce que les équations des degrés ſupérieurs roulent ordinairement ſur des matieres de Géométrie, dont je n'ai pas encore inſtruit le Lecteur.

La quatriéme Partie traite des raiſons, proportions & progreſſions Arithmétiques & Géométriques; des rapports compoſés des différentes eſpéces de nombres commenſurables ou incommenſurables, premiers ou non premiers, &c. & de la maniere de trouver tous les diviſeurs d'un nombre propoſé. Cette Partie eſt pour ainſi dire l'ame de la Géométrie. Les grandeurs que cette Science a pour objet, nous ſont moins connuës en elles-mêmes que par les rapports mutuels qu'elles peuvent avoir; & ſans la connoiſſance de ces rapports, il n'eſt pas poſſible de faire le moindre pas au-delà des premiers élémens; auſſi ai-je pris ſoin de traiter ce ſujet dans toute ſon étenduë, & l'on fera très-bien de l'étudier avec attention.

Enfin, dans la cinquiéme Partie, j'explique les combinaiſons; les nombres figurés, autrement dits nombres *Polygones*; l'Arithmétique des infinis; les logarithmes & les fractions décimales. Ces matieres aſſez curieuſes par elles-mêmes, ſont extrêmement intéreſſantes pour les Mathématiques; & leur uſage eſt ſi étendu, qu'on m'accuſeroit peut-être de l'exagérer ſi je voulois en relever ici tou-

te l'utilité. Il n'eſt preſque rien, même dans l'uſage ordinaire de la vie, où les combinaiſons n'entrent pour quelque choſe, tout le monde le ſait. L'Arithmétique des infinis a donné occaſion à tant de belles découvertes, que les Géométres ne ceſſeront jamais d'en admirer l'invention. Je me contente dans cet Ouvrage d'en expliquer les premiers principes, & d'en donner les démonſtrations; mais dans la ſuite je donnerai un Traité particulier, où je m'aſſure que l'on verra avec plaiſir l'application que je ferai de cette Science à la Géométrie. Les logarithmes ſont utiles, non ſeulement pour abréger les calculs trigonométriques dont on ne ſe tireroit ſouvent qu'avec beaucoup de peine & d'ennui ſans leur ſecours, mais encore pour réſoudre grand nombre de queſtions qui ne ſe préſentent jamais dans le cours de la vie ſans jetter dans de grands embarras; qu'il s'agiſſe, par exemple, de régler les comptes d'un Mineur, quels ſoins! quel tems! quelles peines! quelles dépenſes ne faut-il pas y emploïer! les années entieres ſuffiſent à peine à trois ou quatre Gens d'Affaires, qui en font leur unique travail. Ce ſont des calculs longs, difficiles, embarraſſés & embarraſſans, auſquels on eſt obligé de ſe tenir par l'impoſſibilité où l'on ſe trouve de les vérifier. Au contraire, qu'on s'y prenne par la voïe des logarithmes, toutes les difficultés ceſſent, & trois ou quatre heures tout au plus ſuffiſent pour terminer des queſtions, qui ſans eux demandent un ſi grand appareil. On n'a qu'à lire ce que j'enſeigne là-deſſus dans cette quatriéme Partie, & jetter en même-tems les yeux ſur la méthode des fractions décimales, pour être convaincu qu'on épargneroit ſouvent bien de la peine & du travail, ſi ces deux calculs devenoient plus communs.

Voilà en abrégé tout le Plan de cet Ouvrage. Mon deſſein eſt bien moins d'y dire des choſes nouvelles, que de les dire d'une façon claire, intelligible & qui ſoit à la portée des perſonnes qui voudront ſe donner la peine de les étudier. Je ſuppoſe mon Lecteur dénué de toutes ces connoiſſances, & je le mene inſenſiblement des choſes les plus ſimples aux plus compoſées, en lui rendant raiſon de ma conduite, & lui donnant des démonſtrations qui ne ſuppoſent rien de tout ce qu'il peut ignorer. Il eſt vrai que cette façon d'agir demande un plus long diſcours & groſſit néceſſairement un Volume; mais après tout, ne vaut-il pas mieux lire un Ouvrage un peu long, que l'on entend, que d'en lire de plus courts que l'on n'entende pas? N'en déplaiſe à certains Auteurs, je ne ſerai jamais d'avis de me repoſer ſur les ſoins d'un Maître pour expliquer, à ceux qui liront mes Ouvrages, des choſes que la ſeule pareſſe pourroit m'empêcher de mettre dans tout leur jour. Les bons Maîtres ne ſe trouvent pas facilement, ſur-tout dans les Provinces, où le nombre même des médiocres n'eſt pas bien grand. Les uns vous avoüent franchement qu'ils n'entendent rien à l'Algébre; d'autres, moins ſincéres, ſe piquent de la ſavoir, & s'y trouvent eux-mêmes embarraſſés dès qu'on les tire de certains problêmes triviaux que preſque perſonne n'ignore aujourd'hui; & s'il s'en trouve d'habiles, comme il y en a effectivement, ſur-tout dans Paris, où j'en connois dont je m'eſtimerois heureux de prendre des Leçons, ils ne peuvent ſuffire à tous ceux qui auroient beſoin de leur ſecours; & ceux qui en profiteroient le mieux, ſont ſouvent hors d'état de leur donner l'honnête rétribution dont il n'eſt que trop juſte de païer leurs travaux. Ce n'eſt pas d'aujourd'hui

d'hui que la fortune & les talens ſont rarement d'accord ; & ce ne ſeroit pas peu pour moi, ſi aïant eu deſſein de travailler pour tous ceux qui voudront s'appliquer, je pouvois en particulier être utile aux perſonnes à qui il ne manque que les facultés pour réuſſir.

Au reſte, ſi l'on veut recuëillir de cet Ouvrage tout le fruit que j'oſe en eſpérer, on aura ſoin d'avoir toujours un papier devant ſoi & la plume à la main. Il n'en eſt pas des Mathématiques, comme d'une ſimple Hiſtoire que l'on apprend par la ſeule lecture : cette étude demande demande une attention conſtante ; il faut fixer ſon eſprit, captiver ſon imagination ; & je ne vois rien de plus propre à cela, que de travailler à meſure qu'on lit ; j'en parle par ma propre expérience, & je puis même dire que, s'il ſe trouve des Savans, c'eſt bien moins aux Leçons de leurs Maîtres qu'ils ſont redevables de leur ſavoir, qu'à l'uſage aſſidu qu'ils ont fait de cette maniere d'étudier. J'exhorte donc les Commençans à profiter de cet avis ; il faut qu'ils ſe donnent la peine, en liſant, de faire eux-mêmes les opérations néceſſaires pour réſoudre les queſtions & les exemples que je propoſe ; ils tâcheront d'en bien prendre l'eſprit, après quoi fermant le Livre, ils eſſaïeront de les réſoudre ſeuls ; & pour s'affermir davantage, ils ſe formeront d'autres exemples conformes à la queſtion propoſée, dont ils viendront facilement à bout avec beaucoup de ſatisfaction. Que s'il ſurvient quelque difficulté, ils ne doivent pas s'en rebuter d'abord, ce ne ſont ordinairement que de petits nuages que les lumieres encore foibles de l'eſprit ont peine à diſſiper ; mais avec un peu de travail, on les fait aiſément évanoüir ; au lieu que ſi l'on s'aviſe de paſſer outre, un nuage en attire un autre,

lequel ſe multipliant à ſon tour, produit à la fin des ténébres épaiſſes & une profonde obſcurité. Il ſe trouve des Auteurs qui tiennent un langage tout oppoſé à ce que je viens de dire : *Ne liſez d'abord*, vous diſent-ils, *qu'avec une légere attention, & même rapidement; reliſez enſuite de la même façon une ſeconde fois, une troiſiéme, quatriéme, une centiéme s'il le faut; l'intelligence à la fin ſe développera, & vous ſaurez ſans qu'il vous en ait beaucoup coûté*; cette façon de penſer ne ſauroit être de mon goût. Je ne ſuis point aſſez préſomptueux pour prétendre que la lecture ſi ſouvent réïtérée de mes Ouvrages, doive remplir éternellement le loiſir d'un Lecteur; & après tout, j'ai peine à croire qu'il ſe trouve bien des gens qui aïent la conſtance de parcourir pluſieurs fois, d'un bout à l'autre, un même Livre qu'ils n'entendront jamais qu'à moitié, à cauſe de l'ordre & de l'enchaînement des matieres qui demandent preſque toujours que l'on ait compris ce qui précéde pour entendre ce qui ſuit. Ne nous fraïons pas de nouvelles routes, & gardons-nous de laiſſer en arriere des pas ſur leſquels il ne ſeroit pas poſſible de revenir. Je le répéte encore une fois, s'il ſe trouve quelque difficulté lorſqu'on lit un Auteur, il faut la ſurmonter avant d'aller plus loin, ou s'attendre à ne voir plus dans le reſte que très-obſcurément. Quant à mon Ouvrage en particulier, ſi malgré les ſoins que j'ai pris d'expliquer les choſes avec toute la clarté qu'elles demandent, il ſe trouvoit par haſard quelques endroits que l'on eût peine à bien entendre, je me ferai toujours un plaiſir d'en donner l'explication à quiconque me fera l'honneur de la demander.

Il ne me reſte plus qu'à répondre à une difficulté qu'on pourroit me faire touchant le titre de cet Ouvrage : pour-

quoi, me dira-t-on peut-être l'avez-vous appellé *Arithmétique des Géométres* plutôt qu'*Elémens de Mathématiques*? La raiſon en eſt facile à donner. Si l'on y prend bien garde, tout ce qu'on fait dans les Mathématiques n'eſt qu'une application continuelle des opérations de l'Arithmétique à la grandeur continuë, autrement dite étenduë ou corps; ce n'eſt qu'en ajoutant ou retranchant, en multipliant, ou diviſant, en élevant aux puiſſances ou tirant les racines des parties de cette étenduë, ou enfin en combinant enſemble ces opérations, qu'on en découvre les propriétés; la Théorie & la Pratique ſont fondées là-deſſus, & les démonſtrations que l'on en donne, de quelque maniere qu'elles ſoient conçûës, dépendent uniquement de ces principes; mais cette Arithmétique eſt-elle la même que celle qu'on a coutume d'appeller l'Arithmétique vulgaire? Oüi, ſans doute, par rapport aux régles générales, & toute la différence conſiſte en ce que dans celle-ci on s'en tient préciſément à ces régles, ou du moins on ne les combine que de fort peu de façons; au lieu que dans les Mathématiques, on manie les mêmes opérations de tant de manieres différentes, qu'on en tire des conſéquences ſans fin: c'eſt donc avec raiſon que j'appelle, non pas ſimplement *Arithmétique*, mais *Arithmétique des Géométres*, un Ouvrage où je montre aux Géométres les différens uſages que l'on doit faire de ces principes généraux des Mathématiques; & ſi je m'arrête quelquefois à des queſtions qui regardent ou le Commerce, ou les Finances, ce n'eſt qu'un ſurcroît que j'ai ajouté pour me rendre utile à toutes ſortes de perſonnes; & faire goûter, s'il ſe peut, à tout le monde, cet eſprit de juſteſſe & de préciſion que les Mathématiques ſeules ſont capables de donner.

TABLE

Des Articles contenus dans les deux premieres Parties.

PREMIERE PARTIE.

DEs caractéres de l'Arithmétique, page 1
De la ſignification des Nombres, 5
Des Nombres entiers & des Fractions, 6
Des Régles de l'Arithmétique, 7
De l'Addition ſimple, ibid.
De l'Addition compoſée, 10
De la Souſtraction ſimple, 15
De la Souſtraction compoſée, 18
De la Multiplication ſimple, 21
De la Toiſe quarrée, de la Toiſe cubique & de leurs diviſions, 27
Remarques ſur la Multiplication ſimple, 34
De la Diviſion ſimple, 39
Remarques touchant la Diviſion, 50
Du calcul des Fractions, 53
Réduire les Fractions en même dénomination, 54
Réduire une Fraction en moindre dénomination, 56
Réduire un entier en une Fraction, dont le dénominateur ſoit donné, 58
Réduire une Fraction en entier, 59
Evaluer une Fraction, ibid.
Ajouter deux ou pluſieurs Fractions, 61
Souſtraire une Fraction d'une autre, 62
Multiplier les Fractions, 63
Diviſer les Fractions, 64
Des Fractions de Fractions, ibid.
Remarques ſur les Fractions, 67
De la Multiplication compoſée, 68
De la Diviſion compoſée, 99

SECONDE PARTIE.

De la Régle de trois directe, 110
De la Régle de trois inverſe, 120
De la Régle de trois directe compoſée, 123
De la Régle de trois indirecte compoſée, 139
De la Régle conjointe directe, 141
De la Régle conjointe indirecte, 144
Des Régles d'Intérêt, 145
De la Régle d'Eſcompte, 168
De la Régle de Change, 175
De la Régle des Trocs, 177
De la Tarre des Marchandiſes, 179
De la Régle de Compagnie ſimple, 181
Remarque ſur cette Régle, où il eſt parlé de la Régle des Financiers; des levées des deniers Roïaux; de celles des Décimes, & des diſcutions de Banqueroute, 185
De la Régle de Compagnie compoſée, 201
De la Régle Teſtamentaire, 210
De la Régle de fauſſe poſition, 216
De la Régle de deux fauſſes poſitions, 219
De la Régle d'Alliage, 229
De la Racine quarrée, 263
De la Racine quarrée des Fractions, 281
De la Racine quarrée par approximation, 285
De la Racine cubique, 295
De la Racine cubique des Fractions, 306
De la Racine cubique par approximation, 314

L'ARITHMETIQUE

L'ARITHMETIQUE DES GÉOMÉTRES.

PREMIERE PARTIE.

De l'Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion des nombres entiers & des nombres rompus, autrement dit Fractions.

I. L'ARITHMETIQUE eſt la Science des nombres, ou l'Art de compter.

La maniere dont nous écrivons ordinairement les nombres dans la ſuite d'un diſcours ſe trouvant trop embarraſſante, lorſqu'il s'agit de faire un calcul, il a fallu néceſſairement trouver d'autres caractéres dont la ſimplicité n'offuſquât point l'imagination, & laiſsât à l'eſprit la liberté de faire les opérations requiſes. Les Juifs & les Grecs ont emploïé pour cela les lettres de leurs Alfabets. Les Romains ſe ſont ſervis des chiffres qu'on appelle de leur nom, & dont on uſe encore aujourd'hui dans certaines occaſions. La plûpart des autres Nations ont eu de même leurs caractéres propres; mais enfin ceux des Arabes aïant paru les plus commodes, ont emporté la préférence, & il y a déja long-tems que tous les Peuples de l'Europe s'en ſervent, non-ſeulement dans le Commerce, mais

encore dans tout ce qui concerne les Sciences & les Beaux Arts.

Ces caractéres ſont au nombre de neuf pour ſignifier les neuf premiers nombres, & ſe marquent comme on les voit ici. On les appelle *unités*, parce que chacun d'eux pris ſolitairement & à part, ne contient que des unités. Ainſi le premier qui eſt 1, vaut une unité ; le ſecond 2, en vaut deux ; le troiſiéme 3, en vaut trois, & de même des autres juſqu'au dernier 9, qui en vaut neuf.

1	un.
2	deux.
3	trois.
4	quatre.
5	cinq.
6	ſix.
7	ſept.
8	huit.
9	neuf.

Mais ces mêmes caractéres, lorſqu'ils ſont écrits ſur une même ligne les uns à côté des autres, commencent à changer de valeur ſelon le rang où ils ſe trouvent placés, en comptant de droite à gauche. Le premier à droite vaut toujours des unités. Celui qui vient immédiatement après lui vaut des dixaines, c'eſt-à-dire, dix fois plus qu'il n'auroit valu ſi on l'avoit pris ſeul. Le troiſiéme devient encore dix fois plus grand, & vaut par conſéquent des centaines, parce que dix fois dix font cent. Le quatriéme vaut des unités de mille, parce que dix fois cent font mille. Le cinquiéme, par la même raiſon, vaut des dixaines de mille. Le ſixiéme des centaines de mille. Le ſeptiéme des unités de millions, parce que dix fois cent mille, font un million. Le huitiéme des dixaines de millions. Le neuviéme des centaines de millions, & ainſi des autres, augmentant toujours les valeurs de dix fois plus. Voici une ſuite qui va faire voir comment on doit appeller les caractéres qui ſe trouvent après les centaines de millions.

Trillions.	Centaines de millions de billions.	Dixaine de millions de billions.	Million de billions.	Centaines de mille de billions,	Dixaine de mille de billions,	Mille de billions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions.	Centaine de millions de milliards.	Dixaine de millions de milliards.	Millions de milliards.	Centaines de mille de milliards,	Dixaine de mille de milliards.	Mille de milliards.	Centaines de milliards.	Dixaines de milliards.	Milliards.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaine de mille.	Mille.	Centaines.	Dixaines.	Unités.
5	6	7	8	4	3	2	9	5	7	4	3	2	3	5	6	9	4	3	2	3	6	9	5	6	4	3	2

Si on vouloit continuer cette ſuite, on appelleroit les carac-

téres qui viendroient après les trillions, dixaines de trillions, centaines de trillions, mille de trillions, dixaines de mille de trillions, centaines de mille de trillions, millions de trillions, dixaines de millions de trillions, centaines de millions de trillions, quadrillions, & ainſi des autres à l'infini.

Au moïen de ceci, il eſt facile de ſupputer & d'écrire toutes ſortes de nombres, de quelque grandeur qu'ils puiſſent être. Soit, par exemple, le nombre 367894527 qu'on me propoſe à ſupputer; j'appelle le premier caractére à gauche unités, le ſecond dixaines, le troiſiéme centaines, le quatriéme mille, le cinquiéme dixaines de mille, le ſixiéme centaines de mille, le ſeptiéme millions, le huitiéme dixaines de millions, & le neuviéme, qui eſt ici le dernier, centaines de millions; ce qui me fait voir que ce nombre, en revenant de gauche à droite, contient trois centaines de millions, ſix dixaines de millions, ou ſoixante millions, ſept millions, huit centaines de mille, neuf dixaines de mille, ou quatre-vingt-dix mille, quatre mille, cinq centaines, deux dixaines & ſept unités; d'où je conclus que ce nombre vaut en tout trois cens ſoixante-ſept millions, huit cens quatre-vingt-quatorze mille, cinq cens vingt-ſept.

Pour ſupputer plus aiſément ce même nombre, ou tel autre que ce ſoit, il faut en ſéparer les caractéres de trois en trois, en commençant toujours de droite à gauche. Enſuite on fera attention, 1°. Que le troiſiéme caractére après la premiere tranche, marque les centaines d'unités; de même que le troiſiéme après la ſeconde tranche marque les centaines de mille, & le troiſiéme après la troiſiéme tranche, marque les centaines de millions. 2°. Que les caractéres qui ſont au ſecond rang, après chaque tranche, valent les unes des dixaines d'unités, les autres des dixaines de mille, & les autres des dixaines de millions. 3°. Enfin, que les caractéres qui ſont dans le premier rang, après chaque tranche, valent des unités, les unes ſimples, les autres des unités de mille, & les autres des unités de millions. Donc puiſque le nombre propoſé eſt tranché trois fois, & que ſon premier caractére 3 à gauche eſt le troiſiéme après la troiſiéme tranche, je connois que ce nombre commence par des centaines de millions: ainſi je dis d'abord que ce nombre vaut trois cens millions; enſuite de quoi la valeur de ce qui ſuit m'eſt facilement connuë; car le caractére 6 qui vient après le premier trois, ne peut valoir que ſix dixaines de millions, c'eſt-à-dire, ſoixante millions; le

367 | 894 | 527 |

troiſiéme ne peut valoir que ſept millions ; & ainſi des autres, en allant vers la droite. Par conſéquent ce nombre vaut en tout trois cens ſoixante-ſept millions, &c.

Préſentement ſi l'on me propoſe d'écrire le nombre trois cens trente-deux millions, quatre cens cinquante-trois mille, deux cens vingt-cinq ; je vois que ce nombre contient des centaines de millions, des centaines de mille, & des centaines d'unités : c'eſt pourquoi je marque trois tranches aſſez écartées les unes des autres pour pouvoir écrire trois caractéres entre deux ; enſuite j'écris les centaines, les dixaines & les unités de millions devant la premiere tranche à gauche : j'écris de même les centaines, les dixaines, & les unités de mille entre la premiere & la ſeconde tranche, en tirant vers la droite ; & enfin j'écris les centaines, les dixaines, & les unités entre la ſeconde & la troiſiéme tranche.

332 | 453 | 225 |

De même, ſi l'on me propoſe d'écrire le nombre quarante-trois milliards, deux cens cinquante-trois millions, trois cens cinquante-cinq mille ſix cens trente-quatre ; je vois que ce nombre ſurpaſſe les centaines de mille, & par conſéquent qu'il doit y avoir quatre tranches. Je fais donc ces quatre tranches, enſuite de quoi j'écris devant la premiere à gauche les dixaines & les unités de milliards ; j'écris de même entre la premiere & la ſeconde, en tirant vers la droite, les centaines, les dixaines & les unités de millions, & j'acheve le reſte comme ci-deſſus.

43 | 253 | 355 | 634 |

Ce que je viens de dire ſuppoſe que le nombre à ſupputer ou à écrire, aïant commencé par une grande valeur, comme ſeroit par exemple des centaines de millions, contient enſuite toutes les autres valeurs inférieures ; mais comme il arrive très-ſouvent que quelques-unes de ces valeurs inférieures viennent à manquer, & quelquefois même toutes enſemble, les Arabes ont inventé pour ces cas un dixiéme caractére, qui par lui-même eſt de nulle valeur, mais qui étant mis à la place des valeurs qui manquent, conſerve le rang & la valeur des caractéres que le nombre contient. Ce caractére s'appelle zero, & ſe marque par un o.

Si donc l'on me propoſe le nombre 607800302, je le coupe par tranches comme ci-deſſus, & je vois d'abord que le nombre commence par des centaines de millions, après quoi le zero qui vient après me marque qu'il n'y a point de dixaines de millions ; de même les

607 | 800 | 302 |

deux zeros qui viennent après les centaines de mille me font connoître qu'il n'y a ni dixaines, ni unités de mille; & enfin je juge par le zero qui eſt entre les centaines d'unités & les unités, qu'il n'y a point de dixaines d'unités. C'eſt pourquoi je dis que ce nombre vaut en tout ſix cens ſept millions huit cens mille trois cens deux.

De même s'il falloit écrire quarante millions trois cens mille cent cinquante, je ferois d'abord trois tranches, parce que ce nombre contient des dixaines de millions, enſuite j'écrirois devant la premiere tranche à gauche un quatre, pour les quarante millions qui font quatre dixaines, & un zero après le quatre, parce que le nombre propoſé n'a point d'unités de millions; de même j'écrirois entre la premiere & la ſeconde tranche un trois pour les trois cens mille, & deux zeros après, à cauſe que le nombre propoſé n'a ni dixaines, ni unités de mille; enfin j'écrirois entre la ſeconde & la troiſiéme tranche un 1 pour la centaine d'unité, un cinq pour les cinquante qui font cinq dixaines, & un zero pour les unités, parce que le nombre propoſé n'en a point.

40 | 300 | 150 |

Voilà en quoi conſiſte tout l'artifice des caractéres Arabes, artifice qu'on peut regarder comme l'une des plus belles inventions de l'eſprit humain, puiſqu'au moïen de dix caractéres très-ſimples & très-peu embarraſſans, on vient à bout non-ſeulement d'écrire en peu de tems toute ſorte de nombres, mais encore de les augmenter, les multiplier, & faire en un mot toutes les opérations qui ſont néceſſaires dans les différens cas qui peuvent ſe préſenter.

De la ſignification des nombres.

II. Il faut bien prendre garde de ne pas confondre la valeur des nombres avec leur ſignification. La valeur ne change jamais, 25 valent toujours vingt-cinq, à moins qu'on ne dérange ſes caractéres, ou qu'on ne leur en ajoute d'autres; au lieu que le même 25, demeurant tel qu'il eſt, peut avoir deux ſignifications différentes, l'une déterminée & l'autre indéterminée.

La ſignification d'un nombre eſt déterminée quand l'on écrit après lui ce qu'on veut qu'il ſignifie. Ainſi ſi l'on écrit 25 hommes ou 25 toiſes, ce nombre 25 ſe trouve déterminé à ſignifier des hommes ou des toiſes, à l'excluſion de toute autre choſe. Au contraire, ſi on écrit ce même nombre ſans y rien ajouter, il eſt

évident qu'il ne ſignifie pas plus des hommes que des toiſes, & que pouvant recevoir telle ſignification qu'on voudra, il eſt par conſéquent indéterminé.

On verra dans la ſuite de cet Ouvrage, que quoique les nombres aïent une ſignification déterminée dans certaines queſtions qu'on veut réſoudre, il faut cependant les regarder comme ſi on n'avoit point encore déterminé ce qu'on veut leur faire ſignifier.

Des nombres entiers & des fractions.

III. Tout nombre qui n'eſt pas au-deſſous de l'unité s'appelle nombre entier, lorſqu'on le conſidére ſans faire attention s'il eſt partie d'un autre ou s'il ne l'eſt pas: quand on dit, par exemple, qu'un homme n'a pour tout bien que cinq ſols, ce nombre *cinq ſols* eſt un nombre entier, parce qu'on le conſidére en lui-même, & non pas comme faiſant le quart d'une livre ou le douziéme d'un écu.

J'ai dit qu'un nombre entier ne doit pas être au-deſſous de l'unité, parce que s'il étoit plus petit on ne pourroit l'exprimer qu'en diſant qu'il en eſt ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. D'où il ſuit que ce ne ſeroit plus un entier.

Tout nombre ſoit au-deſſous, ſoit au-deſſus de l'unité, s'appelle fraction, ou nombre rompu, lorſqu'on le rapporte à un tout dont il fait partie. Quand on dit qu'un homme à qui il faudroit vingt ſols ou un écu n'a encore que dix ſols, ce nombre dix ſols eſt alors une fraction, puiſqu'il n'eſt que la moitié à l'égard d'une livre, ou le ſixiéme à l'égard d'un écu dont cet homme a beſoin.

L'uſage a voulu qu'il y eût deux ſortes de fractions. Les unes qu'on ne peut nommer ni écrire ſans exprimer en même-tems le rapport qu'elles ont à un autre nombre dont elles ſont partie, & les autres qu'on nomme & qu'on écrit ſans exprimer ce rapport.

Toutes les fractions qu'on appelle moitiés, tiers, quarts, cinquiémes, &c. qu'on écrit avec deux caractéres l'un ſur l'autre & une barre entre deux, ſont de la premiere eſpéce; car leurs noms & leur maniere d'être écrits préſentent d'abord à l'eſprit l'idée de leur tout.

Les fractions de la ſeconde eſpéce ſont toutes celles à qui l'on a donné des noms, qui par eux-mêmes ne réveillent point l'idée de leur entier. Tels ſont les deniers qui ſont des douziémes à l'égard des ſols, les ſols qui ſont des vingtiémes à l'égard des livres,

& les livres qui ſont des tiers à l'égard des écus. De même les pouces qui ſont des douziémes de pieds, & les pieds qui ſont des ſixiémes de toiſes. De même auſſi les onces qui ſont des ſeiziémes à l'égard de la livre, les heures qui ſont des vingt-quatriémes de jour, les jours qui ſont des trentiémes de mois, les mois qui ſont des douziémes d'années, &c. Toutes ces fractions s'écrivent de même que les nombres entiers, & n'ont nulle apparence des autres fractions.

Les Arithmeticiens ne donnent le nom de fractions qu'à celles de la premiere eſpéce, ſe contentant d'appeller les autres *nombres d'eſpéce différente ;* ce que nous obſerverons dans tout le cours de ce Traité, afin que ceux qui le liront ne ſoient pas embarraſſés lorſqu'ils viendront à lire d'autres Livres ſur le même ſujet.

Des régles d'Arithmétique.

IV. On appelle *régles d'Arithmétique* certaines opérations qu'on eſt obligé de faire ſelon la nature des queſtions qu'on ſe propoſe de réſoudre. Quoique ces opérations varient à l'infini, on n'en compte cependant que quatre principales, par le moïen deſquelles toutes les autres peuvent s'éxecuter, & qu'on appelle *Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion.* A proprement parler, on n'en devroit même compter que deux, à ſavoir l'*Addition* & la *Souſtraction*, la Multiplication n'étant dans le fonds que l'Addition réïtérée d'un même nombre, de même que la Diviſion n'en eſt que la Souſtraction ; mais comme il importe peu de diſputer ſur les mots, dès qu'on convient de ce qu'ils ſignifient, nous nous en tiendrons à l'uſage reçu, d'autant mieux que dans la pratique ces quatre opérations ne laiſſent pas d'être bien différentes entr'elles.

Les quatre premieres régles peuvent être ou ſimples, ou compoſées. On les appelle ſimples, lorſqu'elles ne contiennent que des nombres de même eſpéce ; & compoſées, lorſqu'elles contiennent des nombres d'eſpéces différentes. Nous allons les expliquer chacune ſéparément, en commençant par les ſimples dont le calcul a beaucoup moins de difficulté.

Addition ſimple.

V. L'Addition ſimple eſt une opération par laquelle on cher-

che ce que valent enſemble pluſieurs nombres de même eſpéce, ſoit que chacun d'eux ne contienne qu'un caractére, ſoit qu'il en contienne pluſieurs. Ces nombres s'appellent *nombres à ajouter*, & leur valeur totale s'appelle *ſomme*. Les exemples ſuivans vont faire voir de quelle maniere ſe fait cette opération.

PREMIER EXEMPLE.

Un homme a gagné en différens tems, 8 *écus la premiere fois*, 6 *la ſeconde*, 9 *la troiſiéme*, 5 *la quatriéme*, 7 *la cinquiéme*, *&* 4 *la ſixiéme ; on demande combien il a gagné d'écus en tout ?*

J'écris les nombres les uns ſous les autres, & je tire une ligne ſous le dernier pour ſéparer la ſomme d'avec les nombres à ajouter ; car ce ſera ſous cette ligne que j'écrirai cette ſomme, lorſque je l'aurai trouvée. Enſuite j'ajoute ces nombres les uns aux autres de haut en bas, en diſant : 8 & 6 font 14, & 9 font 23, & 5 font 28, & 7 font 35, & 4 font 39, c'eſt-à-dire, trois dixaines & neuf unités. J'écris donc 9 ſous le 4, & en-deſſous de la ligne, & j'avance 3 vers la gauche ; ce qui me fait voir que le gain total de cet homme eſt 39 écus.

	8
	6
	9
	5
	7
	4
Somme	39 écus.

SECOND EXEMPLE.

Une perſonne a emploïé quatre Maçons à différens ouvrages. Le premier a fait 195 *toiſes de maçonnerie ; le ſecond en a fait* 212 ; *le troiſiéme* 243, *& le quatriéme* 326 : *on demande combien il y a de toiſes faites ?*

Chacun de ces nombres renferme pluſieurs caractéres ; c'eſt pourquoi je les écris les uns ſous les autres, en mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, & les centaines ſous les centaines. Je tire une ligne par-deſſous, & je commence l'opération par la colonne des unités, en diſant : 5 & 2 font 7, & 3 font 10, & 6 font 16, c'eſt-à-dire, une dixaine & ſix unités. J'écris donc

	195
	212
	243
	326
Somme	976 toiſes

ſix

ſix unités ſous cette colonne, & je retiens une dixaine que j'ajoute à la colonne des dixaines, en diſant : 1 que je retiens & 9 font 10, & 1 font 11, & 4 font 15, & 2 font 17 dixaines, c'eſt-à-dire, une centaine & ſept dixaines ; j'écris donc 7 ſous la colonne des dixaines, & je retiens une centaine que j'ajoute à la colonne des centaines, en diſant : Une centaine que je retiens, & 1 font 2, & 2 font 4, & 2 font 6, & 3 font 9, que j'écris ſous le 9, & n'y aïant plus de colonnes à ajouter, la ſomme totale eſt 976 toiſes.

Dans la Pratique, on peut ſe paſſer de nommer les unités, les dixaines, les centaines, &c. comme nous avons fait ici ; il ſuffira ſeulement, lorſqu'on aura ajouté tous les caractéres d'une colonne, d'écrire ſous cette colonne le dernier caractére de ſa ſomme, & de tranſporter l'autre à la colonne ſuivante. Que ſi, lorſqu'on aura ajouté la derniere colonne à gauche, on trouve que ſa ſomme contient deux ou trois caractéres, on écrira le dernier ſous cette colonne, & l'on avancera les autres vers la gauche. C'eſt ce que nous allons faire dans l'exemple ſuivant.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Six Corps de Troupes ont reçû ordre de ſe trouver tous en un certain endroit des Frontieres. Le premier eſt compoſé de 986 hommes, le ſecond de 763, le troiſiéme de 855, le quatriéme de 954, le cinquiéme de 635, & le ſixiéme de 786. On demande combien il y aura d'hommes en tout, lorſque ces Corps ſe ſeront joints enſemble.

Après avoir écrit tous ces nombres les uns ſous les autres, comme dans les exemples précédens, j'ajoute les caractéres de la premiere colonne à droite, en diſant : 6 & 3 font 9, & 5 font 14, & 4 font 18, & 5 font 23, & 6 font 29 ; j'écris 9 ſous cette colonne, & je porte 2 à la colonne ſuivante, en diſant : 2 que je retiens & 8 font 10, & 6 font 16, & 5 font 21, & 5 font 26, & 3 font 29, & 8 font 37 ; j'écris 7 ſous cette colonne, & je porte 3 à la ſuivante, en diſant : 3 que je retiens & 9 font 12, & 7 font 19, & 8 font 27, & 9 font 36, & 6 font 42, & 7 font 49 ; j'écris 9 ſous cette colonne, & comme celle-ci ſe trouve la derniere, j'avance 4 vers la gauche. Ainſi la ſomme totale eſt 4979 hommes.

	986
	763
	855
	954
	635
	786
Somme	4979

De la preuve de l'Addition ſimple.

VI. Faire la preuve d'une régle, c'eſt examiner ſi l'on ne s'eſt point trompé dans le cours de ſon opération. Cet examen peut ſe faire de pluſieurs manieres qu'on trouve détaillées dans la plûpart des Livres qui traitent de l'Arithmetique; mais la meilleure & la plus sûre, à mon avis, eſt de recommencer le calcul tout comme ſi on ne l'avoit point encore fait. C'eſt ainſi qu'on en uſe dans le commerce ordinaire. On regarderoit comme une grande imprudence de donner ou de recevoir de l'argent ſans le compter deux fois, & l'on auroit raiſon, vû les erreurs auſquelles nous ſommes tous naturellement ſujets en fait de calcul; mais auſſi quand cette précaution eſt une fois priſe, on eſt tranquille, & l'on ne ſe met point en peine de chercher d'autres régles pour s'aſſurer ſi l'on ne s'eſt point trompé. En effet, ſi en repaſſant deux fois ſur la même choſe on peut encore commettre quelque erreur, il eſt évident qu'on pourra en commettre bien plus facilement lorſqu'on ſe ſervira d'une autre preuve, laquelle auroit beſoin elle-même d'un ſecond examen pour être sûr qu'on a bien opéré en la faiſant. C'eſt pourquoi je ne m'arrêterai point ici à expliquer ce qu'on enſeigne ſur cette matiere, & ſi l'on veut abſolument en ſavoir davantage, on pourra recourir aux Livres qui en traitent, ſans que je ſois obligé de groſſir celui-ci de choſes dont on peut aiſément ſe paſſer.

De l'Addition compoſée.

VII. Les nombres ne ſont de différente eſpéce que parce qu'ils ſignifient des Diviſions & des Soudiviſions, qu'on a jugé à propos de faire de certaines choſes. Comme on ne peut ajouter ces ſortes de nombres ſans ſavoir ce qu'ils valent les uns à l'égard des autres, je vais mettre ici une Liſte des noms & des valeurs des eſpéces dont on ſe ſert à Paris, ſauf à ceux qui ſe trouveront en d'autres lieux de s'informer de celles que l'uſage y aura introduit.

La toiſe vaut	6 pieds.
Le pied vaut	12 pouces.
Le pouce vaut	12 lignes.
La ligne vaut	12 points.

Dans la Pratique, on néglige les points à cauſe de leur petiteſ-

ſe ; au reſte je ne parle ici que des toiſes courantes, qui ſont, comme je viens de dire, des longueurs de ſix pieds de long, me réſervant à parler des toiſes quarrées & des toiſes cubiques dans l'article de la Multiplication.

Le mille d'Italie vaut	8 ſtades.
La ſtade vaut	125 pas géométriques.
Le pas géométrique vaut	5 pieds.
Le pas commun vaut	2 pieds & demi.
La coudée géométrique vaut	9 pieds.
La coudée commune vaut	1 pied & demi.
La grande coudée vaut	9 coudées communes.
La petite lieuë de France vaut	2000 pas géométriques.
La lieuë commune de France vaut	2400 pas géométriques.
La grande lieuë de France vaut	3000 pas géométriques.

L'écu vaut	3 livres.
Une livre vaut	20 ſols.
Un ſol vaut	12 deniers.
Un denier vaut	2 oboles.

Une livre peſe	2 marcs ou 16 onces.
Un marc peſe	8 onces.
Une once peſe	8 gros.
Un gros peſe	3 deniers ou carats.
Un denier ou carat peſe	2 mailles ou oboles.
Une maille ou obole peſe	12 grains.

Le muid de vin contient	3 feüillettes.
Une feüillette contient	12 ſeptiers & demi.
Un ſeptier contient	4 quartes.
Une quarte contient	2 pintes.
Une pinte contient	2 chopines.
Une chopine contient	2 demi ſeptiers.
Un demi ſeptier contient	2 poiſſons.
Un poiſſon contient	6 pouceons.
Un pouceon contient	1 pouce cubique.

Le muid de bled contient	12 ſeptiers.
Un ſeptier contient	2 mines.
Une mine contient	2 minots.
Un minot contient	3 boiſſeaux.
Un boiſſeau contient	12 litrons.
Un litron contient	36 pouces cubiques.

Cela ſuppoſé, voïons dans les exemples ſuivans comment on ajoute ces ſortes de nombres.

PREMIER EXEMPLE.

Un homme éxaminant l'état de ſes affaires, a trouvé qu'il devoit à pluſieurs créanciers les ſommes ſuivantes : 325 livres 10 ſols ſix deniers ; 7832 livres 9 ſols 8 deniers ; 756 livres 11 ſols 9 deniers ; 998 livres 7 ſols 4 deniers ; 42533 livres 7 ſols 10 deniers, & 5020 livres 10 ſols 9 deniers. On demande quelle eſt la ſomme totale de ce qu'il doit ?

J'écris ces ſommes les unes ſous les autres, mettant les unités & les dixaines de deniers ſous les unités & les dixaines de deniers, les unités & les dixaines de ſols ſous les unités & les dixaines de ſols, & enfin les unités, les dixaines, les centaines, &c. de livres, ſous les unités, les dixaines, &c. de livres.

	325 liv.	10 ſ.	6 den.
	7832 liv.	9 ſ.	8. den.
	756 liv.	11 ſ.	9 den.
	998 liv.	7 ſ.	4. den.
	42533 liv.	7 ſ.	10. den.
	5020 liv.	10 ſ.	9 den.
Somme	57466 liv.	17 ſ.	10 den.

Enſuite je commence l'opération par les deniers, en diſant : 6 & 8 font 14, c'eſt-à-dire, un ſol & deux deniers ; je mets un point à côté de 8, pour marquer qu'il y a un ſol, & j'ajoute les deux deniers reſtans aux deniers ſuivans, en diſant : 2 que je retiens & 9 font 11, & 4 font 15, c'eſt-à-dire, un ſol & trois deniers ; je mets un point à côté de 4, pour la même raiſon, & je continuë, en diſant : 3 que je retiens & 10 font 13, c'eſt-à-dire, un ſol & un denier, je marque donc un point à côté du 10, & continuë, en diſant : 1 que je retiens, & 9 font 10 ; j'écris ces 10 par-deſſous, & je paſſe aux unités de ſols auſquelles je tranſporte trois ſols, parce que j'ai marqué trois points.

Je dis donc 3 ſols que je retiens & 9 font 12, & 1 font 13, & 7 font 20, & 7 font 27 ; j'écris 7, & je retiens 2 dixaines, leſquelles étant ajoutées aux trois dixaines qui ſont dans la colonne des dixaines, font 5 dixaines, c'eſt-à-dire, 2 livres & une dixaine ; j'écris donc 1, & je retiens 2 livres que j'ajoute aux unités de livres, en diſant : 2 que je retiens & 5 font 7, & 2 font 9, &c. achevant le reſte de même que dans l'Addition ſimple, & la ſomme totale eſt 57466 liv. 17 ſ. 10 den.

Remarquez qu'à l'égard des deniers j'ai ajouté les unités & les dixaines en même-tems, parce que 12 deniers faiſant un ſol, on

voit tout d'un coup, en ajoutant les deux premiers nombres 6 & 8, ſi leur ſomme contient un ſol, ou ſi elle ne le contient pas; ſi elle le contient, on marque un point, & l'on ajoute le reſte aux nombres ſuivans, obſervant de marquer un point toutes les fois qu'on trouve la valeur d'un ſol, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu au bas de la colonne où l'on écrit le dernier reſte; après quoi il n'y a plus qu'à tranſporter ſur les ſols autant de ſols que l'on a marqué de points: ce qui eſt certainement bien plus commode que ſi on ajoutoit les unités à part, & puis les dixaines; car ſuppoſé que nous euſſions opéré de cette derniere façon, nous aurions trouvé que la ſomme des deniers auroit été 46, & comme 46 deniers contiennent des ſols, nous aurions été obligés de diviſer 46 par 12, pour ſavoir le nombre de ſols contenus dans ce nombre, & celui des deniers reſtans. Or il eſt clair que ces opérations ſeroient plus longues que celles que j'ai faites; & par conſéquent plus incommodes & moins bonnes, puiſqu'en fait de calcul les voïes les plus courtes ſont les meilleures, à cauſe des erreurs qu'on peut commettre aiſément en faiſant de longues opérations.

J'aurois pû faire à l'égard des ſols, ce que j'ai fait à l'égard des deniers, c'eſt-à-dire, ajouter en même-tems les unités & les dixaines, en marquant un point toutes les fois que j'aurois trouvé la valeur d'une livre qui eſt vingt ſols, & écrivant au bas de la colonne le dernier reſte; mais la maniere que j'ai emploïé eſt encore plus facile, parce que deux dixaines de ſols faiſant une livre, il ne s'agit plus, lorſqu'on a ajoûté les unités à part & enſuite les dixaines, que de prendre la moitié du nombre des dixaines, ſi ce nombre eſt pair, & tranſporter cette moitié à la colonne des unités de livres; & ſi le nombre des dixaines eſt impair, on en retranchera une dixaine qu'on écrira ſous les dixaines, & l'on tranſportera aux livres la moitié du reſte. Ainſi ſi le nombre des dixaines étoit 4, on tranſporteroit 2 aux livres, parce que 4 dixaines de ſols font 2 livres; & s'il étoit 5, comme dans cet exemple, on en retrancheroit une qu'on écriroit par-deſſous les dixaines, & l'on porteroit 2 aux livres, parce que 5 dixaines font 2 livres que l'on tranſporte, & une dixaine de ſols que l'on laiſſe.

SECOND EXEMPLE.

Un homme a reçû de différens débiteurs les ſommes marquées ci-après, & l'on demande quelle en eſt la ſomme totale?

Je commence par les deniers, en disant : 10 & 11 font 21, c'est-à-dire 1 sol & 9 deniers ; je mets un point à côté de 11, & je dis : 9 que je retiens & 9 font 18, c'est-à-dire, 1 sol 6 deniers ; je mets un point à côté de 9, & je dis : 6 que je retiens & 10 font 16, c'est-à-dire, 1 sol & 4 deniers ; je mets donc un point à côté de 10, & je dis : 4 que je retiens & 8 font 12, ou un sol ; je mets donc un point à côté de 8, & j'écris un zero par-dessous, parce qu'il n'y a point de reste ; ensuite, comme j'ai marqué quatre points, je porte 4 sols que j'ajoute aux unités de sols, & aïant trouvé que la somme de cette colonne fait 27, j'écris 7 & je retiens 2 dixaines, lesquelles ajoutées aux 4 dixaines de la colonne suivante font 6, dont la moitié est 3, c'est-à-dire, 3 livres, car six dixaines de sols font 3 livres ; je transporte ces 3 livres aux unités de livres, & achevant l'opération à l'ordinaire, je trouve que la somme totale est 11343 liv. 7 s.

3678 liv.	10 s.	10 den.	
4534 liv.	8 s.	11. den.	
2567 liv.	16 s.	9. den.	
325 liv.	13 s.	10. den.	
236 liv.	16 s.	8. den.	
Somme 11343 liv.	7 s.	0 den.	

TROISIEME EXEMPLE.

Un homme aïant mesuré les quatre côtés d'une Prairie, a trouvé que celui du Midi a 232 toises 3 pieds 10 pouces 9 lignes de longueur, celui du Couchant 156 toises 4 pieds 11 pouces 10 lignes, celui du Nord 239 toises 5 pieds 8 pouces 11 lignes, & celui de l'Orient 215 toises 4 pieds 7 pouces 8 lignes : on veut savoir combien cette Prairie a de circuit.

Après avoir écrit ces nombres, en rangeant chaque espéce sous sa semblable, je commence par les lignes, & comme 12 lignes font 1 pouce, j'ajoute les unités & les dixaines en même-tems, en disant : 9 & 10 font 19, c'est-à-dire, 1 pouce & 7 lignes de reste ; je mets un point à côté de 10, & j'ajoute le reste 7 avec les 11 suivans, &c. achevant, comme nous avons dit, ci-dessus. Aïant donc écrit le dernier reste 2, je porte 3 poutes au rang des pouces, parce que j'ai

232 toises	3. pieds	10. pouces	9 lignes.	
156	4	11.	10.	
239	5.	8	11.	
215	4.	7.	8.	
Somme 845	1	3	2	

marqué trois points. J'ajoute les pouces de la même façon que j'ai ajouté les lignes, à cauſe que 12 pouces font un pied, & aïant écrit le dernier reſte 3, je porte 3 pieds au rang des pieds, à cauſe des trois points marqués. Je dis donc 3 pieds que je retiens & 3 font 6, c'eſt-à-dire, une toiſe, je marque un point à côté du 3; je continuë enſuite 4 & 5 font 9, c'eſt-à-dire, une toiſe & trois pieds, je marque un point à côté du 5, & je dis: 3 de reſte & 4 font 7, c'eſt-à-dire, une toiſe & 1 pied, je marque un point à côté du 4, & j'écris le dernier reſte 1; après quoi je porte trois toiſes au rang des toiſes, à cauſe des trois points, & aïant achevé le reſte à l'ordinaire, je vois que la ſomme totale eſt 845 toiſes 1 pied 3 pouces 2 lignes.

Ce que j'ai dit juſqu'ici eſt plus que ſuffiſant pour faire entendre aux *Commençans la Pratique* de l'Addition compoſée, c'eſt pourquoi je ne m'arrêterai point à expliquer les deux régles ſuivantes, ſur leſquelles ils pourront s'éxercer.

345 toiſ.	5. pieds	6 p.	10 l.
257	3	10.	10.
689	1.	8.	9.
753	2	9.	11.
462	4.	10	8.
2509	0	11	0

234 toiſ.	3. pieds	8 p.	9 l.
342	4	6.	6.
523	3.	8.	10.
636	2	7	9
100	3.	4.	2.
1838	0	0	0

De la Souſtraction ſimple.

VIII. La Souſtraction eſt une opération par laquelle on cherche ce qui reſtera d'un nombre, après qu'on en aura retranché un autre moindre que lui. Pour cela on écrit le petit nombre ſous le plus grand, mettant les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, &c. Enſuite on tire une ligne par-deſſous, & commençant de droite à gauche, on retranche les unités du petit nombre des unités du grand, & l'on écrit le reſte au-deſſous. On retranche de même les dixaines des dixaines, & l'on écrit le reſte: ce que l'on continuë juſqu'à ce qu'il ne ſe trouve plus rien à retrancher.

PREMIER EXEMPLE.

Les biens d'un homme montent à 678968 livres, ſur quoi il doit 432786 livres: que lui reſtera-t-il quand il aura païé?

Après avoir écrit ces deux nombres l'un ſous l'autre, & tiré une ligne par-deſſous, je dis : Qui de 8 païe 6 reſte 2, que j'écris par-deſſous la ligne ; enſuite qui de 6 païe 5 reſte 1, que j'écris de même ; & continuant ainſi juſqu'à la fin, je trouve qu'il reſtera à cet homme 246212 livres

	678968
	432756
Reſte	246212

SECOND EXEMPLE.

Un homme s'étant mis dans les Affaires avec 268492 livres, a trouvé au bout de dix ans que ſon bien montoit à 739263 livres : on demande combien il a gagné ?

Il eſt viſible que retranchant le bien qu'il avoit lorſqu'il s'eſt mis dans les Affaires, de la ſomme totale qu'il a trouvé au bout de dix ans, le reſte ſera ſon gain. Ainſi je n'ai qu'à faire comme dans l'exemple précédent, & j'aurai ce qu'on demande.

Mais comme après avoir écrit le petit nombre ſous le grand, il ſe trouve des caractéres dans le nombre de deſſous, qui ſont plus grand que ceux qui leur répondent dans le nombre de deſſus : voici de quelle maniere il faut lever cette difficulté.

739263	
268492	
470771	Gain.

Je dis d'abord : Qui de 3 ôte 2 reſte 1, que j'écris au-deſſous ; enſuite paſſant aux dixaines, je dis : Qui de 6 ôte 9 cela ne ſe peut ; c'eſt pourquoi j'emprunte une centaine ſur les centaines, où je mets un point pour marquer que j'ai emprunté 1 ; & comme cette centaine fait 10 dixaines, leſquelles jointes aux 6 que j'ai déja font 16, je dis : Qui de 16 ôte 9 reſte 7, que j'écris par-deſſous. Je paſſe aux centaines, où je vois que les 2 qui ſont au nombre de deſſus n'en valent plus qu'une, à cauſe que j'en ai emprunté une ; or qui de 1 païe 4, cela ne ſe peut, j'emprunte donc un mille, c'eſt-à-dire, dix centaines ſur les mille, où je mets un point ; & ces dix centaines, avec celle que j'ai déja faiſant 11, je dis : Qui de 11 ôte 4 reſte 7, que j'écris. De-là je viens aux mille, où je trouve que le 9 de deſſus ne vaut plus que 8, à cauſe de l'emprunt que j'ai fait ; donc qui de 8 ôte 8 reſte rien, ce que je marque en mettant un o ſous la ligne. Je paſſe aux dixaines de mille, où n'étant pas poſſible d'ôter 6 de 3, j'emprunte une centaine de mille, c'eſt-à-dire, dix dixaines de mille ſur les centaines de mille, en y mettant un point, & je dis : Dix dixaines

nes de mille & 3 que j'ai déja font 13, desquelles ôtant 6 reste 7 que j'écris. Enfin, venant aux centaines de mille, où le 7 ne vaut plus que 6, j'acheve en disant : Qui de 6 païe 2 reste 4 que j'écris, & je trouve que le gain de cet homme est 470771 livres.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Plusieurs Maçons ont fait 6000 toises de maçonnerie, sur quoi on leur en a païé 4532 : combien reste-t-il à leur païer ?

Dans cet exemple-ci, le nombre supérieur ne contient ni unités, ni dixaines, ni centaines ; c'est pourquoi il faut nécessairement que j'emprunte un mille sur les mille pour ôter les unités, les dixaines, & les centaines du nombre inférieur. Mais comme un mille est trop grand pour retrancher d'abord 2 unités, & qu'il ne me faut pour cela qu'une dixaine, je laisse des centaines sur la colonne des centaines autant que j'en puis laisser, c'est-à-dire 9, de sorte que le point marqué au-dessus du 0 signifiera 9 ; après quoi, comme il me reste une centaine qui est encore trop grande pour retrancher 2 unités, je laisse des dixaines sur la colonne des dixaines autant que j'en puis laisser, c'est-à-dire 9, & par conséquent le point marqué sur le 0 vaudra 9 ; ensuite de quoi ne me restant plus qu'une dixaine, je dis : Qui de 10 païe 2 reste 8, que j'écris sous la ligne. De-là passant aux dixaines, où le point marqué vaut 9, je dis : Qui de 9 païe 3 reste 6 que j'écris. Par la même raison, qui de 9 centaines en païe 5 reste 4 que j'écris ; & enfin venant aux mille, où le 6 ne vaut plus que 5, à cause de l'emprunt que j'ai fait, j'acheve en disant : Qui de 5 païe 4 reste 1 que j'écris ; & je trouve qu'il est encore dû à ces Maçons la valeur de 1468 toises.

6000	
4532	
Reste 1468	

On fera de la même maniere les deux régles suivantes, sur lesquelles je ne m'arrêterai point, afin que ceux qui commencent aïent le plaisir de les faire par eux-mêmes.

Les Soustractions, où il faut emprunter, se font d'une autre façon que je vais expliquer ici, parce qu'elle me paroît plus commode pour la Division, comme on le verra dans la suite.

705800		980007	
643987		879997	
Reste 61813		Reste 100010	

Si l'on examine la régle du ſecond exemple ci-deſſus, on trouvera que nous avons marqué trois points, à cauſe que nous avons été obligé d'emprunter trois fois, & que ces trois points ont fait diminuer d'une unité les caractéres ſur leſquels ils étoient mis. Or ſi je veux opérer autrement, je dis : Qui de 3 ôte 2 reſte 1 que j'écris ; enſuite, qui de 6 ôte 9, cela ne ſe peut, mais qui de 16 ôte 9 reſte 7 que j'écris. Mais comme pour faire 16 j'ai emprunté une dixaine ſur la colonne ſuivante, il s'enſuit que le caractére qui eſt au haut de cette colonne devroit diminuer d'une unité, parce qu'une unité de cette colonne vaut une dixaine à l'égard de la précédente, néanmoins je le laiſſe ſubſiſter dans ſa valeur ; & pour éviter que cette unité qu'il a de trop ne nuiſe à l'opération, j'ajoute cette unité au caractére qui eſt ſous lui, en diſant : 4 & 1 que j'ai emprunté font 5, ce qui fait, comme on voit, une juſte compenſation. Après quoi je continuë ainſi : Qui de 2 ôte 5, cela ne ſe peut, mais qui de 12 ôte 5 reſte 7 que j'écris. De-là paſſant à la colonne ſuivante, j'ajoute 1 au caractére 8 pour la même raiſon, ce qui fait 9 ; & je dis : Qui de 9 ôte 9 reſte 0 que j'écris ; enſuite qui de 3 ôte 6, cela ne ſe peut, mais qui de 13 ôte 6 reſte 7 que j'écris ; enfin j'augmente d'une unité le caractére 2 qui eſt au bas de la colonne ſuivante, en diſant : 2 & 1 que j'ai emprunté font 3, & qui de 7 ôte 3 reſte 4.

739263	
268492	
470771	

Pour faire la Souſtraction du troiſiéme exemple ci-deſſus, ſelon cette méthode, je dis : Qui de 0 ôte 2, cela ne ſe peut, mais qui de 10 paie 2 reſte 8 que j'écris. Enſuite venant à la ſeconde colonne, je dis : 3 & 1 que j'ai emprunté font 4, qui de 0 retranche 4, cela ne ſe peut, mais qui de 10 ôte 4 reſte 6 que j'écris. Et continuant tout de ſuite, 5 & 1 que j'ai emprunté font 6, qui de 0 ôte 6, cela ne ſe peut, mais qui de 10 ôte 6 reſte 4 que j'écris : Et enfin, 4 & 1 que j'ai emprunté font 5, qui de 6 ôte 5 reſte 1 que j'écris.

6000	
4532	
1468	

De la Souſtraction compoſée.

IX. Dans la Souſtraction compoſée, on écrit chaque eſpéce du petit nombre ſous les eſpéces correſpondantes du grand, après quoi on en fait la Souſtraction, comme on va voir dans les exemples ſuivans.

PREMIER EXEMPLE.

Une Allée a 676 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 9 lignes de longueur; on demande combien il lui en reſtera, après qu'on en aura retranché 234 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, 6 lignes.

Après avoir écrit ces deux nombres, en rangeant les eſpéces du petit ſous les eſpéces ſemblables du grand; je commence par les lignes, en diſant: Qui de 9 ôte 6 reſte 3, que j'écris. De-là je paſſe aux pouces, où je dis: Qui de 11 ôte 10 reſte 1, que j'écris; j'opére de même ſur les pieds & ſur les toiſes; & la régle étant achevée, je trouve que le reſte eſt 442 toiſes, 2 pieds, &c.

	676 toiſes	5 pieds	11 pouces	9 lignes.
	234	3	10	6
Somme	442	2	1	3

SECOND EXEMPLE.

La largeur & la longueur d'un terrain, priſes enſemble, valent 470 toiſes, 2 pieds, 9 pouces, 8 lignes; la largeur ſeule vaut 137 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, 11 lignes: on demande ce que vaut la longueur?

Je retranche ce que vaut la largeur de ce que valent la largeur & la longueur priſes enſemble, & le reſte eſt viſiblement la longueur. Or pour cela, je dis: Qui de 8 lignes ôte 11, cela ne ſe peut; par conſéquent j'emprunte un pouce ſur la colonne des pouces, où je mets un point; & comme ce pouce vaut douze lignes, je dis: 12 lignes que j'emprunte & 8 que j'ai déja font 20, qui de 20 ôte 11 reſte 9 que j'écris. De-là je viens aux pouces, où le caractére 9 ne vaut plus que 8, & comme de 8 on ne peut retrancher 10, j'emprunte un pied ſur la colonne des pieds, où je mets auſſi un point; ce pied emprunté vaut 12 pouces, leſquels ajoutés aux 8 que j'ai déja font 20; qui de 20 ôte 10 reſte 10 que j'écris. Par rapport aux pieds, je trouve que de 1 on ne peut retrancher 4, ainſi j'emprunte ſur les toiſes: mais comme il n'y en a point, j'emprunte une dixaine, & je laiſſe 9 toiſes ſur le zero qui eſt à la place des unités, après quoi il ne m'en reſte plus qu'une,

	470 toiſes	2 pieds	9 pouces	8 lignes.
	137	4	10	11
	332	3	10	9

c'eſt-à-dire, ſix pieds, leſquels joints à 1 que j'ai déja font 7; qui de 7 ôte 4 reſte 3 que j'écris. Enfin venant aux toiſes, je dis: Qui de 9 ôte 7 reſte 2 que j'écris; & achevant le reſte à l'ordinaire, je trouve que la longueur cherchée eſt 332 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, neuf lignes.

Si on vouloit faire cette opération, ſelon la ſeconde méthode que j'ai enſeigné en parlant de la Souſtraction ſimple, on ne marqueroit point de points ſur les endroits où l'on a fait des emprunts, mais l'on augmenteroit d'une unité les valeurs qui ſont au-deſſous, laiſſant ſubſiſter celles de deſſus dans leur valeur naturelle; ainſi dans cet exemple, au lieu de 10 pouces, on diroit 11, au lieu de 4 pieds, on diroit 5, &c.

Si le nombre ſupérieur ne contenoit ni pieds, ni pouces, ni lignes, comme dans la régle ci-jointe, où les unités, les dixaines & les centaines de toiſes manquent auſſi, on emprunteroit un mille ſur les mille; & l'on laiſſeroit neuf cens ſur les centaines, neuf dixaines ſur les dixaines, & neuf unités ſur les unités; après quoi il reſteroit encore une toiſe, c'eſt-à-dire 6 pieds, deſquels on en laiſſeroit cinq ſur la colonne des pieds, & du pied reſtant on laiſſeroit 11 pouces ſur la colonne des pouces; & enfin, du pouce reſtant on retrancheroit les 11 lignes qui ſont au bas de la colonne des lignes, en diſant: Qui de 12 ôte 11 reſte 1. Enſuite paſſant aux pouces: Qui de 11 ôte 10 reſte 1, & aux pieds: Qui de 5 ôte 4 reſte 1, & aux toiſes: Qui de 9 ôte 7 reſte 2, &c. achevant le reſte comme ci-deſſus.

	6000 toiſes	pieds	pouces	lignes.
	4387	4	10	11
Reſte	1612	1	1	1

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Un homme a gagné au Commerce 87423 *livres* 12 *ſols* 8 *deniers, ſur quoi il faut qu'il donne à ſes aſſociés* 53896 *livres* 16 *ſols* 10 *deniers: on demande ce qui lui reviendra pour ſa part.*

10 ne pouvant être retranché de 8; j'emprunte un ſol ſur les unités de ſols; ce ſol vaut 12 deniers, leſquels joints aux 8 que j'ai déja font 20, & qui de 20 ôte 10 reſte 10; enſuite 6 ſols ne pouvant être retranchés de 1, j'emprunte une dixaine ſur les dixaines, & cette dixaine, jointe à 1 que j'ai déja, fait 11; qui de

il païe 6 reste 5. De-là passant aux dixaines, je trouve que le nombre supérieur n'en a plus, à cause de l'emprunt que je lui ai fait ; c'est pourquoi j'emprunte une livre sur les livres, & cette livre faisant 2 dixaines, je dis : Qui de 2 ôte 1 reste 1. Je viens ensuite aux livres, où j'acheve l'opération comme nous avons enseigné, & le reste est 33526 livres 15 sols 10 deniers pour la part que l'on cherche.

	87423 liv.	12 sols	8 den.
	53896 liv.	16 sols	10 den.
Reste	33526 liv.	15 sols	10 den.

Supposé que le nombre supérieur ne contînt ni deniers, ni sols, ni unités de livres, ni dixaines, ni centaines, ni mille, &c. comme dans la régle qu'on voit ici ; on emprunteroit une centaine de mille sur les centaines de mille ; on laisseroit sur les caractéres suivans 99999 livres ; après quoi il resteroit encore une livre, c'est-à-dire, 20 sols, desquels on laisseroit 19 sur les sols ; & du sol restant, on retrancheroit les 8 deniers qui sont au bas du rang des deniers, en disant : Qui de 12 deniers ôte 8 reste 4. De même : Qui de 19 sols ôte 15 reste 4 ; & le reste de l'opération comme ci-dessus.

	900000 liv.	sols	den.
	785673 liv.	15 sols	8 den.
Reste	114326 liv.	4 sols	4 den.

De la Multiplication simple.

X. Multiplier, c'est prendre un nombre autant de fois qu'un autre nombre contient d'unités. Multiplier 6 par 4, c'est prendre six quatre fois, parce que 4 contient 4 unités. 6 s'appelle le nombre à multiplier, & 4 en est le multiplicateur, & le résultat de cette multiplication s'appelle le produit : ainsi 24 est le produit de 6 par 4.

Pour connoître lequel des deux nombres est le multiplicateur, on n'a qu'à observer quel est celui auquel on ajoute ce mot *fois*, car celui-là est le multiplicateur ; ainsi quand on dit : 4 fois 6, on connoîtra que le multiplicateur est 4, à cause du mot *fois* qui lui est ajouté.

Comme le produit de 4 fois 6 n'est pas différent du produit de 6 fois 4, l'un & l'autre étant 24, il est évident que le multiplicateur peut devenir nombre à multiplier, & le nombre à multiplier devenir multiplicateur, sans qu'il arrive du changement au

produit ; & que par conſéquent on eſt libre de choiſir pour multiplicateur celui qu'on voudra des deux nombres.

Il n'eſt pas poſſible de multiplier avec facilité les nombres qui contiennent pluſieurs caractéres, ſi l'on ne ſait par cœur les différentes multiplications des neuf ou dix premiers nombres entr'eux ; or quoiqu'en cela l'uſage ſoit le meilleur maître, cependant en attendant qu'on l'ait acquis, on peut ſe ſervir de la Table ſuivante, qu'on appelle vulgairement *Livret d'Arithmetique*, ou *Quarré de Pythagore*, parce que c'eſt à lui qu'on en attribuë l'invention.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Les petits quarrés, dont cette Table eſt compoſée, forment deux ſortes de rangs ; les uns de gauche à droite, que j'appellerai paralléles, & les autres de haut en bas, que j'appellerai rangs perpendiculaires. Dans le premier rang paralléle d'enhaut ſont contenus les 10 premiers nombres ; de même que dans le premier perpendiculaire à gauche, & dans les autres quarrés, ſont contenus les produits de ces nombres multipliés les uns par les autres.

Si l'on veut ſavoir, par le moïen de cette Table, quel eſt le produit de 8 par 9, on cherchera le nombre 8 dans le premier rang perpendiculaire à gauche, & le nombre 9 dans le rang paralléle d'enhaut ; enſuite on ſuivra des yeux le rang paralléle où 8 ſe trouve, & le rang perpendiculaire à la tête duquel 9 eſt écrit : ces deux rangs ſe croiſeront dans un petit quarré, & ce ſera dans ce quarré qu'on trouvera le nombre 72, qui eſt le produit cherché.

De même, ſi l'on veut multiplier 6 par 8, on cherchera 6 dans

le premier rang perpendiculaire & 8 dans le premier rang parallèle, & ſuivant des yeux le rang paralléle où 6 ſe trouve, & le rang perpendiculaire qui commence par 8, on trouvera à l'endroit où ces deux rangs ſe croiſent le nombre 48, qui eſt le produit cherché.

Quand on voudra faire une Table ſemblable à celle-ci, on écrira d'abord les 10 premiers nombres dans les quarrés du premier rang paralléle & dans ceux du premier rang perpendiculaire. Enſuite, on prendra le double de 2, le triple, le quadruple, le quintuple, &c. & on les écrira dans le rang perpendiculaire, à la tête duquel le nombre 2 ſe trouve écrit. On prendra de même le double de 3, le triple, le quadruple, le quintuple, &c. & on les écrira dans le rang perpendiculaire qui commence par le nombre 3; & faiſant la même choſe à l'égard des autres nombres du premier rang paralléle, on achevera aiſément la Table dans le même ordre qu'elle eſt ici.

Pour trouver ſans peine le double, le triple, le quadruple, &c. de tel nombre qu'on voudra d'entre ces premiers nombres, comme par exemple de 6, on ajoutera d'abord 6 à lui-même, ce qui fera 12, & ce ſera le double; enſuite on ajoutera 6 à 12, ce qui fera 18, & ce ſera le triple; on ajoutera de même 6 à 18, ce qui fera le quadruple: & ainſi de ſuite, en ajoutant toujours 6 à la derniere ſomme.

Cela ſuppoſé, nous allons voir dans les exemples ſuivans de quelle maniere la Multiplication ſe fait.

PREMIER EXEMPLE.

Un Marchand a acheté 4573 aunes d'étoffe à 6 livres l'aune: on demande quelle eſt la valeur de ces aunes priſes enſemble?

Dans cette queſtion, je vois d'abord que ce Marchand a donné autant de fois 6 livres qu'il y a d'aunes, c'eſt-à-dire, qu'il y a d'unités dans 4573; ainſi 6 eſt le nombre à multiplier, & 4532 eſt le multiplicateur; mais comme il eſt indifférent de prendre le multiplicateur pour le nombre à multiplier, & qu'il eſt d'ailleurs plus commode, pour l'opération, d'écrire le petit nombre ſous le grand, j'écris premierement le nombre 4573, & je mets ſous lui le nombre 6, qui par-là devient le multiplicateur. Cela fait, je tire une ligne, & je multiplie par 6 chaque caractére du nombre 4573, en commençant de droite à gauche. Je dis donc: 6 fois

3 font 18, j'écris 8 ſous la ligne & je retiens 1, c'eſt-à-dire, une dixaine; 6 fois 7 font 42 & 1 que j'ai retenu font 43, j'écris 3 & je retiens 4; 6 fois 5 font 30 & 4 que j'ai retenu font 34, j'écris 4 & je retiens 3; enfin 6 fois 4 font 24 & 3 que j'ai retenu font 27, j'écris 7 & j'avance 2, parce qu'il ne reſte plus rien à multiplier. Donc la valeur de toutes ces aunes eſt 27438 livres.

4573	Nombre à multiplier.
6	Multiplicateur.
27438	Produit.

SECOND EXEMPLE.

Un homme dépenſe 36 écus par jour : combien dépenſe-t-il par an?

L'année étant compoſée de 365 jours, cet homme dépenſe autant de fois 36 écus qu'il y a d'unités dans 365 : ainſi 365 eſt le multiplicateur; mais comme ce nombre contient plus de caractéres que 36, je prens 36 pour multiplicateur en l'écrivant ſous 365; de ſorte que les unités ſoient ſous les unités, & les dixaines ſous les dixaines, & je tire une ligne. Cela fait, je vois que 36 contient deux caractéres, & qu'il ſeroit par conſéquent trop difficile de multiplier chaque caractére de 365 par 6, en diſant; 36 fois 5, 36 fois 6, &c. c'eſt pourquoi je fais deux multiplications différentes des caractéres de 365; la premiere, par le premier caractére 6 de 36; & la ſeconde, par le ſecond caractére 3. Je dis donc 6 fois 5 font 30, j'écris 0 ſous la ligne & je retiens 3; 6 fois 6 font 36, & 3 que j'ai retenu font 39, j'écris 9 & je retiens 3; 6 fois 3 font 18 & 3 que j'ai retenu font 21, j'écris 1 & j'avance 2; ainſi 2190 eſt le premier produit que j'appelle partial, parce que ce n'eſt là qu'une partie de la multiplication que j'ai à faire. Enſuite je multiplie les trois caractéres de 365 par 3, en diſant : 3 fois 5 font 15, j'écris 5 ſous les dixaines du premier produit, parce que le multiplicateur 3 valant des dixaines, doit produire des dixaines, & je retiens 1; 3 fois 6 font 18 & 1 que j'ai retenu font 19, j'écris 9 & je retiens 1; 3 fois 3 font 9 & 1 que j'ai retenu font 10, j'écris 0 & j'avance 1 : ainſi 1095 eſt le ſecond produit partial.

365	
36	
2190	Premier produit partial.
1095	Second produit partial.
13140	Produit total.

A préſent, pour ſavoir quel eſt le produit total, je tire une ligne ſous le ſecond produit partial, & j'ajoute ces deux produits enſemble,

enſemble, en écrivant d'abord 0 ; enſuite 9 & 5 font 14, j'écris 4 & je retiens 1 ; 1 que j'ai retenu & 1 font 2 & 9 font 11, j'écris 1 & je retiens 1 ; 1 que j'ai retenu & 2 font 3, & 0 font toujours 3, j'écris 3 & je ne retiens rien ; enfin j'écris 1, & le produit total eſt 13140, c'eſt-à-dire, que cet homme a dépenſé par an 13140 écus.

Si le multiplicateur avoit un plus grand nombre de caractéres, comme par exemple trois ou quatre, on feroit auſſi trois ou quatre produits partiaux, en commençant à écrire le troiſiéme ſous les dixaines du ſecond qui valent des centaines, parce que le troiſiéme caractére du multiplicateur valant des centaines, doit produire des centaines ; & de même on écriroit le quatriéme produit ſous les dixaines du troiſiéme, qui valent des mille, parce que le quatriéme caractére du multiplicateur doit produire des mille ; & ainſi des autres s'il ſe trouvoit un plus grand nombre de caractéres au multiplicateur. D'où il ſuit que chaque produit partial doit commencer ſous le ſecond caractére du produit partial qui le précéde immédiatement, comme on voit dans la régle ſuivante, qu'il ſuffira de mettre ici ſans l'expliquer plus au long.

```
  367895
    3425
 -------
 1839475
  735790
 1471580
 1103585
 -------
 1260040375
```

TROISIE'ME EXEMPLE.

On demande combien 3632 écus de 60 ſols font de ſols ?

De la maniere dont cette queſtion eſt propoſée, je vois d'abord qu'il s'agit d'une multiplication, puiſqu'il doit y avoir autant de fois 60 qu'il y a d'écus : je multiplie donc 3632 par 60, mais comme le zero, qui eſt le premier caractére de 60, ne peut produire que des zeros, le rien n'étant pas capable de produire autre choſe, il eſt par conſéquent inutile de multiplier tous les caractéres de 60 par zero, comme j'ai fait dans la régle A, & je me contente d'écrire un zero pour conſerver le rang que le premier caractére du ſecond produit doit occuper ; après quoi je multiplie 3632 par 6, ce qui abrége beaucoup l'opération, comme on voit ici dans la régle B, où j'ai avancé le zero en dehors pour avoir plus de facilité.

```
   A          B
  3632       3632
    60         60
 ------     ------
  0000     217920
 21792
 ------
 217920
```

Si le multiplicateur avoit plusieurs zeros, on les avanceroit de même en dehors, & après les avoir écrits au produit, on multiplieroit enſuite le nombre à multiplier par les autres caractéres du multiplicateur. Voïez la régle ci-jointe, où la lettre A marque l'opération faite tout de long, & la lettre B en marque l'abréviation, comme je viens de l'enſeigner.

A	B
52345	52345
3200	3200
00000	10469000
00000	157035
104690	167504000
157035	
167504000	

Si le nombre à multiplier avoit auſſi des zeros, de même que le multiplicateur, on écriroit ſous la ligne autant de zeros qu'il y en auroit dans l'un & dans l'autre, & l'on acheveroit le reſte comme ci-deſſus.

Enfin, s'il ſe trouvoit un ou pluſieurs zeros entre le premier & le dernier caractére du multiplicateur, on écriroit un zero à la place qu'ils doivent occuper dans les produits partiaux, & l'on feroit tout de ſuite la multiplication par le caractére ſuivant.

A	B
62300	62300
4200	4200
00000	12460000
00000	2492
124600	261660000
249200	
261660000	

On entendra facilement ce que je viens de dire dans ces deux derniers articles, ſi l'on jette les yeux ſur les régles que j'y ai jointes, en ſe rappellant ce que j'ai dit lorſque j'ai expliqué la premiere régle de ce troiſieme exemple.

A	B
752313	752313
40203	40203
2256939	2256939
0000000	15046260
1504626	30092520
0000000	30245239539
3009252	
30245239539	

Avant de finir ce qui regarde la multiplication ſimple, je vais expliquer ici ce que c'eſt que la toiſe quarrée & la toiſe cubique, & quelles ſont leurs diviſions; afin qu'on ne ſoit pas embarraſſé de les multiplier les unes par les autres, ce que l'on eſt ſouvent obligé de faire lorſqu'on s'adonne à la Géométrie Pratique.

De la toiſe quarrée, de la toiſe cubique, & de leurs diviſions.

XI. Quand on multiplie des toiſes courantes par des toiſes courantes, [planche 1. figure 1.] on produit des toiſes quarrées, c'eſt-à-dire, des nombres qui ſignifient des ſurfaces quarrées, dont la largeur eſt d'une toiſe, de même que la longueur.

Les Géométres donnent le nom de baſe à la largeur d'une ſurface, & celui de hauteur à ſa longeur, façon de parler à laquelle je me conformerai ici, parce c'eſt particulierement pour les perſonnes qui veulent étudier la Géométrie que j'ai entrepris de travailler.

La hauteur d'une ſurface ſe meſure par la perpendiculaire, tirée de ſon ſommet ſur ſa baſe. Ainſi la hauteur de la ſurface ABCD, [fig. 6.] doit ſe meſurer, non pas par ſon côté AB, ni par ſon côté DC qui ne ſont pas perpendiculaires ſur ſa baſe AD, mais par la ligne BE tirée d'un point quelconque B de ſon ſommet BC perpendiculairement ſur ſa baſe AD.

La raiſon en eſt, 1°. Que de toutes les lignes qu'on peut tirer du ſommet ſur la baſe, telles que ſont les lignes BE, BF, BG, BH, la perpendiculaire eſt la plus courte, ainſi qu'on le démontre dans les Elémens d'Euclide, & doit par conſéquent être préférée aux autres, puiſqu'on prend toujours le chemin le moins long, lorſqu'il s'agit de meſurer une diſtance telle qu'eſt la hauteur d'une ſurface, qui n'eſt autre choſe que l'éloignement de ſa baſe à ſon ſommet. 2°. Que toutes les autres lignes ſont non-ſeulement plus grandes que la perpendiculaire, mais qu'elles ſe trouvent encore toutes inégales entr'elles, du moins celles qui ſont tirées du même côté de la perpendiculaire; d'où il ſuit que s'il étoit permis de prendre laquelle on voudroit de ces lignes pour déterminer la hauteur d'une ſurface, cette hauteur varieroit ſelon qu'il plairoit aux uns aux autres de choiſir, tantôt celle-ci, & tantôt celle-là.

Préſentement, pour faire entendre comment une toiſe multipliée par elle-même ou par une autre toiſe, produit une ſurface quarrée, ſuppoſons que la ligne AD [fig. 1.] repréſente la longueur d'une toiſe; je ne puis multiplier cette ligne par elle-même, qu'en la prenant autant de fois qu'elle contient d'unités; car c'eſt-là le caractére de la multiplication. Or cette ligne contient une infinité de petites parties appellées points, qui ſe tou-

chent toutes entr'elles, & dont chacune par conſéquent doit être priſe pour l'unité : concevant donc que de tous ces points on tire autant de lignes égales à la ligne AD, & qui lui ſoient perpendiculaires, la ſomme de toutes ces lignes ſera infailliblement le produit d'une toiſe par elle-même ; or il eſt viſible que ce produit forme une ſurface, dont les quatre côtés ſont égaux & perpendiculaires entr'eux : donc cette ſurface eſt un quarré.

Mais, dira-t-on peut-être, eſt-ce qu'une ſurface, dont les quatre côtés ſeroient chacun égaux à une toiſe, ne ſeroit pas le produit de cette toiſe par elle-même, quoique les côtés ne fuſſent pas perpendiculaires entr'eux ? [fig. 2.]

Je répons que cela ne peut être, & pour le faire toucher au doigt, il me ſuffira de prouver que cette ſurface ne contient pas autant de lignes que la ſurface ABCD, [fig. 1.] & qu'elle eſt par conſéquent plus petite que le produit d'une toiſe par elle-même, ce que je vais démontrer ainſi : Puiſque les côtés AB, AC, [fig. 2.] ne ſont pas perpendiculaires entr'eux, ſi du point B je tire une perpendiculaire BE ſur la ligne AC, cette perpendiculaire ſera plus courte que la ligne AB, ſelon ce que nous avons déja dit ci-deſſus. Donc la ligne BE contiendra moins de points ou d'unités que la ligne AB : concevant donc que ſur la ligne AE s'élevent autant de perpendiculaires qu'elle contient de points, & que ces perpendiculaires aboutiſſent d'un côté à la baſe, & de l'autre au ſommet CD de la ſurface, il eſt évident que cette ſurface en ſera totalement remplie. Or la ſomme de ces perpendiculaires ſera plus petite que la ſomme de celles qui rempliſſent la ſurface ABCD ; [fig. 1.] car celles-ci ſont en auſſi grand nombre qu'il y a de points dans la toiſe AD ; au lieu qu'il n'y aura de celles-là qu'autant qu'il ſe trouve de points dans la ligne BE, plus petite que la toiſe AB. Donc la ſurface ABCD [fig. 2.] ſera plus petite que la ſurface ABCD, [fig. 1.] ce qu'il falloit démontrer.

Si l'on inclinoit davantage le côté AC ſur la baſe AB, la perpendiculaire BE deviendroit plus petite, puiſque le côté AC approcheroit davantage de la baſe ; & par conſéquent la ſurface ABCD [fig. 3.] deviendroit encore plus petite ; d'où il ſuit qu'il n'y a que la ſurface ABCD [fig. 1.] qui puiſſe exprimer le produit d'une toiſe par elle-même.

Après tout ce que nous venons de dire, il eſt facile de rendre raiſon pourquoi aïant un quarré long, c'eſt-à-dire, une ſurface

de quatre côtés perpendiculaires les uns sur les autres, mais dont la base est plus grande que la hauteur, ou la hauteur plus grande que la base, on multiplie la base par la hauteur, ou la hauteur par la base pour avoir la valeur de cette surface ; car lorsqu'on multiplie la base par la hauteur, on prend autant de lignes égales à la base que la hauteur contient de points ; & quand on multiplie la hauteur par la base, on prend autant de lignes égales à la hauteur qu'il y a de points dans la base. Or dans l'une ou l'autre de ces multiplications, la somme de ces lignes remplit totalement la surface : donc cette somme n'est pas différente de la surface elle-même, & la valeur de l'une est réellement la valeur de l'autre : ce que l'on voit aisément par la seule inspection des figures 9. & 10.

Si l'on divise chaque côté de la toise quarrée en six parties égales, qui seront des pieds courans, parce que la toise courante contient six pieds, & que l'on joigne par des lignes [fig. 4.] les divisions de la base aux divisions du sommet, & les divisions du côté gauche aux divisions du côté droit, la toise quarrée se trouvera divisée en 6 fois 6, ou 36 petites surfaces, qui seront des pieds quarrés, parce qu'elles auront un pied de base & un pied de hauteur.

De même si l'on divise chaque côté d'un pied quarré en douze parties, qui seront des pouces courans, parce que le pied courant contient des pouces, & qu'on tire des lignes comme ci-dessus, le pied quarré se trouvera divisé en 12 fois 12, ou 144 petites surfaces, qui seront des pouces quarrés, parce qu'elles ont un pouce de base & un pouce de hauteur.

Enfin, si l'on divise de même chaque côté d'un pouce quarré en douze parties égales, qui seront des lignes courantes, parce que le pouce courant contient douze lignes, & qu'on joigne par des lignes les divisions correspondantes, le pouce quarré sera divisé en 144 petites surfaces, qui seront des lignes quarrées, parce qu'elles auront une ligne de hauteur & une ligne de base.

La toise quarrée contient donc 36 pieds quarrés, le pied quarré contient 144 pouces quarrés, & le pouce quarré 144 lignes quarrées. Que si vous voulez savoir combien la toise quarrée contient de pouces quarrés, ou combien elle contient de lignes quarrées, multipliez d'abord 36, qui est la valeur de la toise quarrée en pieds quarrés, par 144, parce que chaque pied quarré vaut 144 pouces quarrés, & le produit 5184 marquera le nom-

bre de pouces quarrés que la toiſe quarrée contient. Multipliez enſuite le produit 5184 par 144, parce que chaque pouce quarré contient 144 lignes quarrées, & le produit 746496 marquera le nombre de lignes quarrées que la toiſe quarrée contient.

Il y a une autre maniere de diviſer la toiſe quarrée, qu'il eſt bon d'expliquer ici, parce qu'elle eſt beaucoup plus commode pour le calcul que celle-ci, comme on verra plus bas.

Diviſez le côté gauche & le droit d'une toiſe quarrée, chacun en ſix parties égales; [fig. 5.] enſuite joignez ces diviſions par des lignes, laiſſant la baſe & le ſommet tels qu'ils ſont, & vous trouverez que la toiſe quarrée ſera diviſée en ſix quarrés longs, qu'on appelle des pieds de toiſe quarrée, parce qu'ils ont un pied de hauteur & une toiſe de baſe.

36 pieds quarrés.
144

144
144
36

5184 pouces quarrés.
144

20736
20736
5184

746496 lignes quarrées.

De même, diviſez la hauteur d'un pied de toiſe quarrée en douze parties égales, enſuite tirez des lignes comme ci-deſſus, & vous trouverez que le pied de toiſe quarrée contient douze quarrés longs, qu'on appelle des pouces de toiſe quarrée, parce qu'ils ont un pouce de hauteur & une toiſe de baſe.

Enfin, diviſez la hauteur d'un pouce de toiſe quarrée en douze parties égales, & après avoir tiré des lignes comme ci-deſſus, vous trouverez que le pouce de toiſe quarrée contient douze petits quarrés longs, qu'on appelle des lignes de toiſe quarrée, parce qu'ils ont une ligne de hauteur & une toiſe de baſe.

Nota. Que de même que dans la multiplication, on peut prendre le multiplicateur pour le nombre à multiplier, ou le nombre à multiplier pour le multiplicateur, ſans que le produit en ſouffre; de même auſſi, lorſqu'il s'agit des meſures de ſurface, on peut prendre la baſe pour la hauteur, ou la hauteur pour la baſe, ſans que la valeur de ces ſurfaces en ſoit altérée. Ainſi un quarré long qui auroit une toiſe de hauteur & un pied de baſe, [fig. 9.] ſeroit également un pied de toiſe quarrée, de même qu'un quarré long qui auroit un pied de hauteur & une toiſe de baſe, [fig. 10.] parce que la valeur de l'un & l'autre de ces quarrés ſeroit toujours le produit d'une toiſe par un pied, ou d'un pied par une toiſe, ce

qui revient au même. Ceci doit s'entendre auſſi des pouces & des lignes de toiſe quarrée.

La toiſe quarrée contient donc 6 pieds de toiſe quarrée, le pied de toiſe quarrée contient 12 pouces de toiſe quarrée, & le pouce de toiſe quarrée 12 lignes de toiſe quarrée. Que ſi vous voulez ſavoir combien la toiſe quarrée contient de cette eſpéce de pouce, ou de cette eſpéce de ligne, multipliez d'abord 6 qui eſt la valeur de la toiſe quarrée, en pieds de toiſe quarrée, par 12, parce que chacun de ces pieds contient 12 pouces de toiſe quarrée, & le produit 72 marquera combien la toiſe quarrée contient de ces ſortes de pouces; multipliez de même le produit 72 par 12, à cauſe que le pouce de toiſe quarrée contient 12 lignes de toiſe quarrée, & le produit 864 marquera combien la toiſe quarrée contient de lignes de cette eſpéce.

6 pieds.
12
72 pouces de toiſe quarrée.
12
144
72
864 lignes de toiſe quarrée.

Les multiplications que je viens de faire étant beaucoup plus courtes que celles que j'ai fait ci-deſſus, pour trouver la valeur de la toiſe quarrée en pouces ou en lignes quarrées, il ſuit de là que la ſeconde maniere de diviſer la toiſe quarrée abrége beaucoup le calcul; & l'on verra dans la ſuite que ce n'eſt pas là la ſeule commodité qu'on en tire.

La toiſe cube eſt un corps ou ſolide, qui a une toiſe de longueur, une toiſe de profondeur, & une toiſe de hauteur; elle eſt compoſée de ſix faces égales, chacune deſquelles vaut une toiſe quarrée, comme on voit dans la [fig.7.] où nous n'avons pû repréſenter que trois de ces faces, les trois autres ſe trouvant cachées, deux par derriere & à côté de celles qui paroiſſent, & la troiſiéme deſſous.

J'ai dit ci-deſſus que les Géométres, lorſqu'ils parlent d'une ſurface, donnent le nom de baſe à ſa largeur. Mais ce n'eſt plus la même choſe lorſqu'il s'agit d'un corps; la largeur conſerve ici ſon nom, & l'on donne celui de baſe à la face du ſolide ſur lequel il s'appuïe: ainſi la baſe d'une toiſe cubique eſt une toiſe quarrée, parce qu'elle s'appuïe ſur une de ſes faces, qui, comme nous venons de voir, vaut une toiſe quarrée, de même que les cinq autres.

La toiſe cubique ſe fait en multipliant une toiſe quarrée par

une toiſe courante. Pour le faire comprendre, ſuppoſons qu'une toiſe quarrée ſoit étenduë à plat par terre ou ſur une table, & qu'on éleve une toiſe courante perpendiculairement ſur l'un de ſes côtés ; je ne puis multiplier la toiſe quarrée par la toiſe courante, qu'en prenant autant de fois la toiſe quarrée qu'il y a de points dans la toiſe courante : concevant donc qu'on couche pluſieurs toiſes quarrées les unes ſur les autres, comme les feüillets d'un Livre, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la hauteur de la toiſe perpendiculaire, la ſomme de toutes ces toiſes quarrées ſera infailliblement le produit de la multiplication. Or il eſt évident que ce produit formera un corps qui aura une toiſe de longueur, une toiſe de profondeur & une de hauteur, & qui par conſéquent ſera un cube, puiſqu'il n'y a que le cube qui aïe ſes trois dimenſions égales.

Si l'on diviſe chaque face de la toiſe cube en trente-ſix pieds quarrés, & qu'on vienne à couper toutes ces diviſions, en tirant de celles d'une face à celles de la face oppoſée, [fig. 7.] la toiſe cube ſe trouvera diviſée en 216 petits cubes tous égaux qui auront un pied de longueur, un de profondeur & un de hauteur, & qui pour cette raiſon s'appelleront des pieds cubiques. Car les diviſions de la face ſupérieure étant prolongées juſqu'à la baſe, formeront 36 petits ſolides, tous égaux à celui que j'ai marqué des lettres ABCDEFG [fig. 7.]. Or chacun de ces petits ſolides aïant une toiſe de hauteur, ſe trouvera partagé en ſix par les diviſions des côtés : donc il y aura 6 fois 36 ou 216 petits cubes.

De même, ſi l'on diviſe chaque face d'un pied cubique en 144 pouces quarrés, les diviſions de la face ſupérieure étant prolongées juſqu'à la baſe, formeront 144 petits ſolides, leſquels aïant un pied de hauteur ſe trouveront encore partagés chacun en douze par les diviſions des côtés ; ainſi il y aura douze fois 144 ou 1728 petits ſolides, dont les trois dimenſions ſeront égales chacune à un pouce, & qui par conſéquent s'appelleront des pouces cubiques.

Enfin, ſi l'on diviſe chaque face du pouce cubique en 144 lignes quarrées, & qu'on coupe toutes ces diviſions comme ci-deſſus, on trouvera de même qu'il y aura 1728 petits ſolides d'une ligne de largeur, d'une de profondeur & d'une de hauteur, leſquels, pour cette raiſon, s'appelleront des lignes cubiques.

La toiſe cube contient donc 216 pieds cubiques, le pied cubique 1728 pouces cubiques, & le pouce cubique 1728 lignes cubiques.

Que

Que ſi vous voulez ſavoir combien la toiſe cubique contient des pouces ou des lignes de cette eſpéce, multipliez d'abord 216, qui eſt la valeur de la toiſe cubique en pieds cubiques, par 1728; parce que chacun de ces pieds contient 1728 pouces cubiques, & le produit 373248 marquera que la toiſe cube contient 373248 pouces cubiques; multipliez enſuite ce produit encore par 1728, parce que chacun de ces pouces contient 1728 lignes cubiques, & le produit 644972544 marquera le nombre de lignes cubiques que la toiſe cube contient.

216 pieds cubiques.
1728

1728
432
1512
216

373248 pouces cubiques.
1728

2985984
746496
2612736
373248

644972544 lignes cubiques.

Cette diviſion de la toiſe cube répond à la premiere diviſion de la toiſe quarrée dont nous avons parlé ci-deſſus. Nous avons à préſent à en expliquer une autre qui répond à la ſeconde maniere de diviſer la toiſe quarrée, & qui n'eſt pas moins commode qu'elle pour faciliter le calcul.

Diviſez les quatre faces qui ſont autour de la baſe de la toiſe cube [fig. 8.] chacune en ſix pieds de toiſe quarrée, laiſſant la baſe & la face ſupérieure telles qu'elles ſont; coupez enſuite la toiſe cube ſelon ces ſix diviſions, & vous trouverez qu'elle ſera partagée en ſix ſolides qui auront une toiſe quarrée de baſe & un pied de hauteur. Ces ſolides s'appellent des pieds de toiſe cube.

De même, diviſez les faces d'un pied de toiſe cube, qui ſont autour de ſa baſe en douze pouces de toiſe quarrée; coupez enſuite ces diviſions, & le pied de toiſe cube ſera diviſé en douze pouces de toiſe cube, qui auront une toiſe quarrée de baſe & un pouce de hauteur.

Enfin, diviſez les faces d'un pouce de toiſe cube, qui ſont autour de la baſe, en douze lignes de toiſe quarrée, coupez enſuite ces diviſions, & vous aurez douze lignes de toiſe cube qui auront une toiſe quarrée de baſe, & une ligne de hauteur.

La toiſe cube contient donc ſix pieds de toiſe cubique, le pied de toiſe cubique douze pouces de toiſe cubique, & le pouce de toiſe cubique douze lignes de toiſe cubique: d'où il ſuit que la toiſe cubique contient autant de diviſions, & de ſoudiviſions de

ſon eſpéce, que la toiſe quarrée en contient de la ſienne. Donc ſi on vouloit ſavoir combien la toiſe cubique contient de pouces ou de lignes de toiſe cubique, il n'y auroit qu'à voir les multiplications que nous avons faites ci-deſſus, pour trouver combien une toiſe quarrée contenoit de pouces ou de lignes de toiſe quarrée, & ſe ſervir des mêmes produits. Ainſi le produit 72 marqueroit que la toiſe cube contient 72 pouces de toiſe cubique, & le produit 864 marqueroit combien elle contient de lignes de toiſe cubique.

Ces choſes ſuppoſées, nous allons donner quelques exemples de la multiplication ſimple des toiſes par les toiſes, nous réſervant à parler de la multiplication des toiſes, pieds & pouces, par des toiſes, pieds & pouces, lorſque nous aurons expliqué ce qui regarde la multiplication compoſée.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication ſimple.

Un Jardin a huit toiſes de largeur & dix de longueur : combien contient-il de toiſes quarrées ?

Multipliez la longueur 10 par la hauteur 8, & le produit 80 marquera le nombre de toiſes quarrées que le Jardin contient ; car ce Jardin étant une ſurface, ſi l'on multiplie ſa longueur par ſa hauteur, on aura la valeur de cette ſurface comme nous avons ci-deſſus : or diviſant le côté qui marque ſa longueur en ſes dix toiſes, & tirant des lignes au côté oppoſé, le Jardin ſe trouvera d'abord diviſé en 10 parties égales ; après quoi diviſant le côté qui marque ſa largeur en ſes huit toiſes, & tirant des lignes au côté qui lui fait face, on trouvera que ces huit diviſions couperont chacune des 10 premieres en 8, & par conſéquent le Jardin ſe trouvera diviſé en 8 fois 10, ou 80 parties égales qui ſeront des toiſes quarrées, parce que leurs quatre côtés auront chacun une toiſe. Voïez la figure 11. où nous ſuppoſons que la valeur de la toiſe courante eſt égale à chaque petite diviſion.

10
8
80 toiſes quarrées.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Un Maçon aïant travaillé dans une maiſon a blanchi d'un côté 12

toiſes de largeur ſur 6 de hauteur ; de l'autre 4 de largeur ſur 5 de hauteur, & d'un autre 10 de largeur ſur 7 de hauteur : combien a-t-il blanchi de toiſes quarrées ?

Multipliez d'abord la premiere largeur 12 par la hauteur 6, le produit 72 marquera le nombre de toiſes quarrées formé par ces deux dimenſions ; enſuite multipliez la ſeconde largeur 4 par ſa hauteur 5, & le produit 20 marquera le nombre de toiſes quarrées que ces deux dimenſions forment ; enfin multipliant la troiſiéme largeur 10 par ſa hauteur 7, vous trouverez que leur produit eſt 70 toiſes quarrées. Ajoutez donc ces trois produits enſemble, & la ſomme 162 vous fera voir que ce Maçon a blanchi en tout 162 toiſes quarrées.

12	4	10
6	5	7
72	20	70

72
20
70
Somme 162 toiſes quarrées.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Une terraſſe a 122 toiſes de largeur, 34 de profondeur, & 23 de hauteur : combien contient-elle de toiſes cubiques ?

Multipliez ſa largeur 122 par ſa profondeur 34, & le produit marquera que ſa baſe contient 4148 toiſes quarrées ; multipliez enſuite la baſe 4148 par la hauteur 23, & le produit 95404 marquera que cette terraſſe contient 95404 toiſes cubiques.

122 largeur.
34 profondeur.
488
366
4148 baſe.
23 hauteur.
12444
8296
95404

Remarques ſur la Multiplication ſimple.

XI. Si deux nombres inégaux ſont multipliés par un même nombre, le premier produit eſt auſſi grand par rapport au ſecond, que le premier nombre multiplié par rapport au ſecond ; ſoient les deux nombres inégaux 10 & 20, & leur multiplicateur commun 3, les produits ſeront donc 30 & 60. Je dis que le premier

produit 30 eſt auſſi grand par rapport au ſecond 60, que le premier nombre à multiplier 10 eſt au ſecond 20 ; car il eſt évident que 10 étant la moitié de 20, 3 fois 10 ou le triple de 10, ne ſera auſſi que la moitié de 3 fois 20 ou du triple de 20. Or 30 eſt la même choſe que 3 fois 10, de même que 60 eſt la même choſe que 3 fois 20 ; donc, &c.

10	20
3	3
30	60

Les Géométres énoncent autrement ces ſortes de comparaiſons ; car au lieu de dire : Le premier produit eſt auſſi grand par rapport au ſecond, que le premier nombre par rapport au ſecond, ils ſe contentent de dire : Le premier produit eſt au ſecond, comme le premier nombre à multiplier eſt au ſecond nombre, ſous-entendant après le mot *eſt*, cet autre, *auſſi grand* ou *auſſi petit*. Je me ſervirai de cette façon de parler dans la ſuite, ainſi il eſt bon qu'on y faſſe attention.

Lorſqu'on a trois nombres, dont le premier eſt le nombre à multiplier, le ſecond le multiplicateur, & le troiſiéme le produit de l'un par l'autre ; ſi l'on vient à multiplier le nombre à multiplier par un quatriéme nombre, & qu'après ce changement on le multiplie de nouveau par le multiplicateur, le produit qui en proviendra ſera au premier produit, comme le nombre à multiplier après ſon changement, eſt au nombre à multiplier avant ſon changement. Soit le premier nombre 4, le ſecond 8, le produit de l'un par l'autre 32, & le quatriéme nombre qui doit multiplier 4 ſoit 2, 4 après cette multiplication deviendra 8, & ſera par conſéquent double de ce qu'il étoit. Or je dis que ſi on multiplie 8 encore une fois par le multiplicateur 8, le produit 64 ſera double du premier produit 32 ; car ſi 4 multiplié par 8 donne 32, le double de 4, ou 8 multiplié par le même multiplicateur 8, doit donner le double de 32, c'eſt-à-dire, 64.

4	8
8	8
32 premier produit.	64 ſecond produit.

4
2
8 premier nombre devenu double de lui-même.

Que ſi au lieu de multiplier le nombre à multiplier par un quatriéme nombre, on multiplioit le multiplicateur, & qu'enſuite on multipliât de nouveau le nombre à multiplier par le mul-

tiplicateur ainſi changé, le produit qui en proviendroit ſeroit au premier produit, comme le multiplicateur après ſon changement, au multiplicateur avant ſon changement. Suppoſant les mêmes nombres que ci-deſſus, le multiplicateur 8 après ſa multiplication par le quatriéme nombre 2, deviendroit 16, c'eſt-à-dire, double de lui-même. Or je dis, que *ſi on multiplie de nouveau* le premier nombre 4 par 16, le produit 64 ſera double du premier produit 32; car ſi 4 multiplié par 8 donne 32, le même 4 multiplié par le double de 8, qui eſt 16, doit donner le double de 32, qui eſt 64.

4 × 8 = 32 premier produit.

4 × 16 = 64 ſecond produit.

8 × 2 = 16 multiplicateur devenu double de lui-même.

Enfin, ſi on multiplie le nombre à multiplier par un quatriéme nombre, & le multiplicateur par un cinquiéme, & qu'après ce changement on les multiplie de nouveau l'un par l'autre, le produit qui en proviendra ſera au premier produit, comme le quatriéme & le cinquiéme nombre multipliés l'un par l'autre, ſont à l'unité. Soit, comme ci-deſſus, le premier nombre 4, le ſecond 8, & leur produit 32; ſi l'on multiplie 4 par un quatriéme nombre 3, il deviendra triple de lui-même & ſera par conſéquent 12; & ſi on multiplie 8 par un cinquiéme nombre 2, il deviendra 16, & ſera double de lui-même. Or je dis que multipliant 12 par 16, le produit 192 doit être 6 fois plus grand que le premier produit 32; parce que le quatriéme nombre 3, & le cinquiéme 2, multipliés l'un par l'autre ſont 6, & que 6 eſt

4 × 8 = 32 premier produit.

12 × 16 = 192 ſecond produit.

4 × 3 = 12 premier nomb. changé.

8 × 2 = 16 ſecond nomb. changé.

6 fois plus grand que l'unité ; car à cauſe du triple de 4, le produit doit devenir 3 fois plus grand, & à cauſe du double de 8 il doit devenir encore 2 fois plus grand ; or 3 fois 2 fois plus grand font 6 fois plus grand : donc le produit 192 doit être 6 fois plus grand que 32, ce qui arrive en effet ; car 6 fois 32 font 192.

Tout nombre qui en contient un autre un certain nombre de fois, s'appelle *multiple* de celui qu'il contient ; 20 eſt multiple de 2, parce qu'il le contient 10 fois ; de même 16 eſt multiple de 4, parce qu'il le contient 4 fois, & ainſi des autres.

Le multiple d'un nombre s'appelle double de ce nombre quand il le contient 2 fois, triple quand il le contient 3 fois, quadruple quand il le contient 4 fois, &c. & enfin multiple ſimplement, lorſqu'on n'exprime point le nombre de fois qu'il le contient.

Il ſuit de ce que nous venons de dire, que tout produit eſt multiple du nombre à multiplier & du multiplicateur ; car tout produit contient le nombre à multiplier autant de fois qu'il y a d'unités au multiplicateur, & mettant le multiplicateur à la place du nombre à multiplier, ce qui, comme nous avons dit, ne change rien, on trouvera que le même produit contient autant de fois le multiplicateur, que le nombre à multiplier contient d'unités.

Deux nombres s'appellent *équimultiples*, c'eſt-à-dire, également *multiples*, lorſque l'un contenant un nombre un certain nombre de fois, l'autre contient un autre nombre le même nombre de fois. 8 contient 2 quatre fois, 12 contient 3 auſſi quatre fois : donc 8 & 12 ſont équimultiples des nombres 2 & 3.

On dit d'un nombre, qu'il eſt multiplié ſucceſſivement par deux ou pluſieurs autres nombres, lorſqu'après l'avoir d'abord multiplié par un premier nombre, on multiplie enſuite ſon produit par un ſecond, & ce nouveau produit par un troiſiéme, & ainſi de ſuite. Soit le nombre 34, qu'on multiplie d'abord par 2, ce qui fait 68 ; ſi l'on multiplie encore 68 par 4, ce qui fait 272 ; & enſuite 272 par 3, ce qui donne 816, ce dernier produit 816 s'appellera le produit de 34 multiplié ſucceſſivement par 2, par 4, & par 3.

34
2
68
4
272
3
816

Lorſqu'il eſt queſtion de multiplier un nombre ſucceſſivement par d'autres, on abrégera beaucoup l'opération ſi l'on fait d'abord le produit des multiplicateurs les uns par les autres, & qu'enſuite on multiplie par ce produit le nom-

bre qui doit être multiplié ſucceſſivement ; car le produit qui en réſultera ſera le même que le dernier produit des multiplications ſucceſſives. Soit, comme ci-deſſus, le nombre 34 à multiplier ſucceſſivement par 2, par 4 & par 3 ; multipliez 2, 4 & 3 les uns par les autres, c'eſt-à-dire, 2 par 4, ce qui fait 8, & 8 par 3, ce qui fera 24 : enſuite multipliez 34 par 24, & le produit 816 ſera le même que ci-deſſus. Car en multipliant 34, premierement par 2, enſuite par 4, & enfin par 3, il devient 2 fois, 4 fois, 3 fois plus grand qu'il n'étoit ; or dire 2 fois, 4 fois, 3 fois plus grand, c'eſt dire 24 fois plus grand, puiſque 2 fois 4 fait 8, & 3 fois 8 fait 24 : donc multipliant 34 par 24, on aura le même produit que s'il avoit été multiplié ſucceſſivement.

34	2
24	4
136	8
68	3
816	24

On verra en plus d'un endroit de cet Ouvrage de quelle utilité ſont les remarques que nous venons de faire ici.

L'ordre que je me ſuis preſcrit ſembloit demander que j'expliquaſſe tout de ſuite ce qui regarde la multiplication compoſée ; mais comme on ne peut faire cette ſorte de multiplication ſans y trouver quelquefois des fractions, ou des diviſions à faire, ſelon la maniere dont on opére, je n'en parlerai qu'après avoir expliqué la diviſion ſimple & le calcul des fractions.

De la Diviſion ſimple.

XII. La diviſion eſt une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre en contient un autre ; le nombre qui contient s'appelle le *dividende* ou le *nombre à diviſer*, le nombre contenu s'appelle le *diviſeur*, & le nombre qui marque combien le dividende le contient s'appelle le *quotient*. 12 contient 3 fois le nombre 4 ; 12 eſt donc le dividende, 4 le diviſeur, & 3 le quotient.

Le nombre que l'on cherche eſt donc le quotient, & ce quotient contient autant de fois l'unité que le dividende contient le diviſeur ; car ſi le dividende contient trois fois le diviſeur, comme dans l'exemple que nous venons de donner, le quotient 3 contient auſſi trois fois l'unité.

Il ſuit de-là que la diviſion fait préciſément le contraire de la multiplication, de même que la ſouſtraction fait le contraire de l'addition ; car dans la multiplication le nombre qu'on cherche

eſt le produit, & ce produit doit contenir autant de fois le nombre à multiplier que le multiplicateur contient d'unités ; ainſi le dividende de la diviſion répond au produit de la multiplication, le diviſeur répond au nombre à multiplier, & le quotient au multiplicateur. Soit, par exemple, le nombre 12, lequel multiplié par 4 aïe produit 48, ſi vous prenez ce produit 48 pour le dividende d'une diviſion, & le nombre 12 pour le diviſeur, vous trouverez que le quotient ſera le multiplicateur 4 ; car 48 contient 12 quatre fois. Que ſi on vouloit que le quotient exprimât le nombre à multiplier 12, alors on prendroit pour diviſeur le multiplicateur 4, & le quotient ſeroit 12 ; car 48 contient 4 douze fois.

12
4
48 produit.

dividende 48 [12 quotient.
diviſ. 4
4

dividende 48 [4 quotient.
diviſ. 12

Il arrive la même choſe à l'égard de l'addition & de la ſouſtraction ; car l'addition aïant joint enſemble deux nombres, la ſouſtraction les déſunit deſorte, que le plus grand nombre de la ſouſtraction répond à la ſomme de l'addition, le nombre qu'on retranche répond à l'un des deux nombres à ajouter, & le reſte répond à l'autre. Soit, par exemple, les deux nombres à ajouter 36 & 24, dont la ſomme eſt 60 ; ſi vous prenez cette ſomme pour le plus grand nombre de la ſouſtraction, & 24 pour le nombre qu'il faut retrancher, le reſte 36 ſera l'autre nombre à ajouter.

	36	60
	24	24
Somme	60	Reſte 36

On enſeigne ordinairement pluſieurs manieres de faire la diviſion, que l'on appelle *à la Françoiſe*, *à l'Italienne*, *à l'Eſpagnole*, &c. du nom des Nations chez qui on prétend qu'elles ont été inventées ; mais comme il ſuffit d'en ſavoir bien une pour réſoudre toutes les queſtions auſquelles on peut répondre par la diviſion, je me contenterai d'expliquer ici celle qui me paroît la plus courte & en même-tems la plus nette ; elle eſt de l'invention de feu M. Parent, qui pour la diſtinguer des autres l'a appellée dans ſon Arithmetique : *Nouvelle Diviſion à la Françoiſe* ; & je crois ne pouvoir mieux juſtifier le choix que j'en fais qu'en nommant cet illuſtre Académicien, dont les Ouvrages ſeront toujours infiniment

ment eſtimés des habiles connoiſſeurs. Je vais d'abord la détailler ſans abréviation, afin que ceux qui commencent puiſſent en comprendre mieux les raiſons; enſuite de quoi il ſera facile de leur faire concevoir les façons de l'abréger, dont l'Auteur s'eſt ſervi pour la rendre la plus courte & la meilleure de toutes.

PREMIER EXEMPLE.

Trois hommes ont gagné 768 livres : on demande combien il revient à chacun pour ſa part ?

Pour bien faire ce partage, il faut que la part qui revient à chacun ſoit à l'unité qui exprime un homme, comme le gain total 768 eſt au nombre 3, qui exprime le nombre des hommes. Le nombre que je cherche eſt donc le quotient d'une diviſion; c'eſt pourquoi j'écris d'abord le nombre 768, ſous lequel je tire une ligne, & après le dernier caractére 8 je tire encore une autre ligne du haut en bas pour ſéparer le dividende du quotient que j'écrirai là à meſure que je le trouverai; enſuite je place le nombre 3, qui eſt le diviſeur, ſous le premier caractére 7, ce que je fais pour éviter des difficultés preſque inſurmontables qui ſe rencontreroient ſouvent ſi je commençois à droite, comme je le ferai voir après le ſecond exemple. Cela fait, je dis : En 7 combien de fois 3 ? & trouvant que 3 y eſt 2 fois, j'écris 2 au quotient : or puiſque 3 eſt 2 fois dans 7, je multiplie 3 par 2, ce qui fait 6, & je retranche 6 de 7, ce qui donne un reſte 1 que j'écris ſous le diviſeur. Je mets à côté de ce reſte le ſecond caractére 6 du nombre à diviſer, je tire une ligne, & j'écris le diviſeur ſous le 6; enſuite je dis : En 16 combien de fois 3 ? je trouve qu'il y eſt 5, ce que je marque au quotient : or puiſque 3 eſt 5 fois dans 16, je multiplie 3 par 5, ce qui fait 15, & je retranche 15 de 16, ce qui donne un reſte 1 que j'écris ſous le diviſeur 3. Je mets à côté de ce reſte le troiſiéme caractére 8 du nombre à diviſer, je tire une ligne & j'écris le diviſeur 3 ſous le nombre 8, je dis donc : En 18 combien de fois 3 ? & je trouve qu'il y eſt 6 fois, c'eſt pourquoi j'écris 6 au quotient; & puiſque 3 eſt 6 fois dans 18, je multiplie 3 par 6, ce qui

```
768 [256 quotient.
3
premier reſte 16
3
ſecond reſte 18
3
```

donne 18, & l'étant retranché de 18 il ne reste rien. Comme il n'y a plus de caractére au nombre à diviser, l'opération est finie, & le quotient marque que la part de chacun de ces hommes est 256 liv.

En examinant bien la régle que nous venons de faire, on trouvera qu'après avoir écrit le dividende & le diviseur, & marqué la place du quotient, comme nous l'avons enseigné, il y a quatre choses à faire pour parvenir à la division. La premiere est d'examiner combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende; mais comme cela n'est pas facile, lorsque le dividende contient plusieurs caractéres, on fait par partie ce qu'on ne sauroit faire tout à la fois; en examinant d'abord combien de fois le diviseur est contenu dans le premier caractére du dividende; ensuite combien de fois il est contenu dans le reste du premier caractére & dans le second; ensuite combien de fois il est contenu dans le reste du second & dans le troisiéme, & ainsi de suite, si le dividende contient un plus grand nombre de caractéres, ce qui fait que le diviseur à chaque examen qu'on fait avance d'un rang vers la droite. La seconde est d'écrire au quotient, après chaque examen, le nombre de fois que le diviseur est contenu dans le caractére du dividende; ce nombre écrit au quotient s'appelle quotient partial, à cause qu'il fait partie du quotient total que l'on ne peut avoir qu'après que l'opération est finie. La troisiéme est de multiplier chaque quotient partial par le diviseur, parce que le caractére supérieur du dividende contient le produit de ces deux nombres. Et la quatriéme enfin, de retrancher chacun de ces produits des caractéres supérieurs du dividende. Cela fait, l'opération est finie, soit qu'il reste quelque chose, soit qu'il ne reste rien, parce qu'on a retranché le diviseur du dividende autant de fois qu'il y étoit contenu, & que le quotient marque ce nombre de fois.

SECOND EXEMPLE.

Une Tour a 769 pieds de hauteur: on demande combien ces pieds font de toises?

La toise a 6 pieds, donc il s'agit de savoir combien de fois 769 pieds contiennent 6 pieds, & par conséquent la question se résoudra par la division.

Pour y parvenir, j'écris le dividende & le diviseur, & je tire les lignes comme dans l'exemple précédent. Ensuite je dis: En 7 le nombre 6 est une fois, j'écris 1 au quotient, & je dis: Une fois 6

est 6, & qui de 7 ôte 6 reste 1, que j'écris sous le diviseur 6; je mets à côté de ce reste le second caractére 6 du dividende, j'écris le diviseur par-dessous, & trouvant qu'il est deux fois dans 16, j'écris 2 au quotient; multipliant 6 par 2, le produit est 12, lequel retranché de 16 donne un reste 4, que j'écris sous le diviseur; je mets à côté de ce reste le troisiéme caractére 9, & écrivant le diviseur par-dessous, je trouve qu'il est 8 fois dans 49, je mets donc 8 au quotient, & multipliant le diviseur par 8, je retranche le produit 48 de 49, & il me reste 1, que je ne puis plus diviser, parce qu'il n'y a plus de caractére au dividende. Ce reste 1 s'ajoute au quotient en écrivant 1 plus haut que les autres caractéres, & tirant ensuite une petite ligne sous laquelle on écrit le diviseur 6, cela signifie qu'il reste 1 à diviser par 6, c'est-à-dire, une fraction qui s'appelle un sixiéme, comme nous l'expliquerons ailleurs. Le quotient total de cette division est donc 128 toises & un sixiéme de toise, & par conséquent 769 pieds font $128\frac{1}{6}$ de toises.

769 [$128\frac{1}{6}$

6

Premier reste 16

6

Second reste 49

6

Troisiéme reste 1

Les Commençans seront peut-être surpris de ce qu'en examinant combien de fois le diviseur 6 est dans le premier caractére 7, j'ai écrit 1 au quotient, au lieu que je devois écrire 100, puisque ce caractére 7 marquant des centaines, vaut sept cens, & que 6 unités sont contenues cent fois dans sept cens; mais il faut qu'ils observent qu'après ce premier quotient partial 1, il s'en trouvera deux autres quand la régle sera achevée, & qu'ainsi cette unité deviendra une centaine. Il en est de même à l'égard du quotient partial 2, lequel devient 2 dixaines quand l'opération est finie. Ce qui fait voir qu'on ne gâte rien en commençant à diviser à gauche, quoiqu'il paroisse d'abord absurde de diviser des centaines, des mille, des dixaines de mille, &c. par des unités.

Maintenant, si l'on veut savoir pourquoi la division ne se commence pas à droite comme les trois premieres régles, on en trouvera bientôt la raison, si l'on essaie de faire la régle que nous venons d'expliquer dans cet exemple, en allant de droite à gauche.

Pour cela je dirai: 9 contient une fois 6, donc j'écris 1 au quotient au rang des unités; ensuite une fois 6 est 6, & qui de 9 ôte 6 reste 3, que j'écris sous le six; mais que faire de ce reste? je ne

vois que deux façons de m'en débarraſſer, dont voici d'abord la premiere, je néglige ce reſte & je continuë en écrivant le diviſeur 6 ſous le caractére ſuivant 6 : or 6 étant contenu une fois dans 6, j'écris 1 au quotient au rang des dixaines, & je dis : Une fois 6 eſt 6, & qui de 6 ôte 6 reſte 0, que j'écris ſous le diviſeur. J'avance le diviſeur ſous le troiſiéme caractére 7, & trouvant qu'il y eſt contenu une fois, j'écris 1 au quotient au rang des centaines. Une fois 6 eſt 6, & qui de 7 ôte 6 reſte 1, que j'écris ſous le diviſeur. Le reſte eſt donc 103, & 103 pouvant encore être diviſé par 6, je recommence la diviſion en écrivant 6 ſous le 3 ; mais comme 3 ne contient point 6, j'emprunte une dixaine ſur les caractéres ſuivans, ce qui fait 13, dans lequel 6 étant contenu deux fois, j'écris 2 au quotient ſous les unités ; 2 fois 6 font 12, & qui de 13 ôte 12 reſte 1, que j'écris ſous le diviſeur 6, j'avance ce diviſeur ſous le 0, qui, à cauſe de l'emprunt eſt devenu 9, & trouvant qu'il contient une fois 6, j'écris 1 au quotient ſous les dixaines ; une fois 6 eſt 6, & qui de 9 ôte 6 reſte 3, que j'écris ſous le diviſeur 6. Je n'avance plus ce diviſeur, parce que le dernier caractére 1 eſt devenu 0 à cauſe de l'emprunt que j'ai fait. Le ſecond reſte eſt donc 31, & 31 pouvant encore être diviſé par 6, j'écris 6 ſous 1 : or 31 contient 6 cinq fois, j'écris 5 au quotient ſous les unités, & retranchant 5 fois 6, c'eſt-à-dire, 30 de 31, il reſte un 1 qui ne peut plus ſe diviſer, ainſi la régle eſt finie ; j'ajoute donc tous les quotiens que j'ai trouvés, & le quotient total eſt 128, comme ci-deſſus.

```
769 | 111
666 |  12
    |   5
---
103
 66   128 quotient.
---
 31
  6
---
  1
```

La ſeconde maniere de ſe débarraſſer du premier reſte 3, eſt d'écrire encore une fois le diviſeur 6 ſous ce reſte 3, & d'emprunter une dixaine, laquelle avec ce reſte fera 13 : or 13 contenant 6 deux fois, on écrira 2 au quotient, ſous l'unité déja écrite. 2 fois 6 font 12, & qui de 13 ôte 12 reſte 1, qu'on écrira ſous le diviſeur. A préſent, comme cette unité n'appartient plus au caractére 9, on avancera le diviſeur ſous le ſecond caractére 6, le-

```
769 | 121
  6 |   2
    |   5
---
  3   128 quotient.
666
---
 31
  6
---
  5
```

quel ne vaut plus que 5, ainſi empruntant une dixaine pour faire 15, on écrira 2 au quotient au rang des dixaines, parce que 15 contient 2 fois 6 : or 2 fois 6 valent 12, & qui de 15 ôte 12 reſte 3, qu'on écrira ſous le diviſeur ; ce reſte 3 n'appartiendra point au caractére 6, lequel aura été épuiſé par la ſouſtraction précédente ; ainſi on avancera le diviſeur ſous le troiſiéme caractére 7, lequel à cauſe de l'emprunt ne vaut que 6, on écrira 1 au quotient au rang des centaines, parce que 6 contient 6 une fois, & retranchant 6 de 6, il ne reſtera rien ſous ce rang-là ; mais comme il reſte 31 ſous les deux autres, il faudra écrire de nouveau 6 ſous 31 & achever le reſte comme auparavant.

L'incommodité qui ſe trouve dans l'une & l'autre de ces deux manieres eſt, 1°. En ce que chaque diviſeur partial ne ſe trouve pas d'un ſeul coup, & qu'il faut quelquefois faire pluſieurs opérations pour l'avoir tout entier, ce qui oblige enſuite de faire une addition, comme on voit ici au quotient. 2°. Qu'il faut ſouvent faire des emprunts que l'on ne ſauroit compenſer en augmentant le caractére de deſſous, comme nous avons enſeigné dans la ſeconde maniere de faire la ſouſtraction, parce que ce caractére de deſſous étant le diviſeur, doit toujours reſter tel qu'il eſt : or on conçoit aiſément que ces difficultés deviendroient encore plus grandes, ſi le diviſeur contenoit deux ou pluſieurs caractéres, & que par conſéquent on a eu raiſon de chercher une autre façon de diviſer qui ne fût pas ſujette aux mêmes embarras, à quoi l'on eſt parvenu en imaginant de diviſer de gauche à droite, comme on l'a déja éprouvé dans les exemples précédens.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un Seigneur a fait faire dans une de ſes terres un Parc en forme de quarré long, qui contient 511272 toiſes quarrées ; la longueur de ce Parc eſt de 789 toiſes, & l'on veut ſavoir quelle en eſt largeur ?

En faiſant réfléxion ſur ce qu'on demande, je vois d'abord que les 511272 toiſes quarrées ſont le produit de la longueur 789 par la largeur qu'il faut trouver : donc en diviſant les toiſes quarrées par la longueur, j'aurai la largeur.

J'écris donc le diviſeur ſous le dividende, en mettant ſon premier caractére 7, non pas ſous le premier caractére 5 du dividende, parce que 7 n'eſt pas contenu dans 5, mais ſous le ſecond 1, qui joint au premier fait 51. J'examine enſuite combien ce diviſeur eſt con-

tenu dans les 4 premiers caractéres du dividende 5112 ; mais comme il seroit trop difficile de trouver d'un seul coup combien 5112 contient 789, je regarde d'abord combien le premier caractére 7 est contenu dans 51, je trouve qu'il y est 7 fois ; car 7 fois 7 font 49 & qu'il reste 2, lequel avec l'unité suivante fera 21 : or le second caractére 8 n'est pas contenu de même 7 fois dans 21, c'est pourquoi au lieu de 7 fois je dis 6 fois ; ainsi 6 fois 7 faisant 42, il restera 9 de 51, & ce 9 joint au caractére suivant fera 91 ; mais 8 pris 6 fois ne fait que 48, donc de 91 retranchant 48, il restera un nombre beaucoup plus grand que 10, qui, avec le caractére suivant 2 du dividende, fera aussi beaucoup plus grand que 102, & dans lequel par conséquent 9 pourra aussi être contenu 6 fois. Je suis donc assuré que 789 est 6 fois dans les quatre premiers caractéres du dividende, ainsi j'écris 6 au quotient, je tire une ligne sous le diviseur & je multiplie ce diviseur par 6, mettant le produit sous la ligne : 6 fois 9 font 54, j'écris 4 & je retiens 5 ; 6 fois 8 font 48, & 5 que j'ai retenu font 53, j'écris 3 & je retiens 5 ; 6 fois 7 font 42, & 5 de retenu font 47, j'écris 7 & j'avance 4, cela fait, je retranche ce produit des quatre premiers caractéres du dividende ; qui de 2 ôte 4 cela ne se peut, mais qui de 12 ôte 4 reste 8, que j'écris sous 4 après avoir tiré une ligne entre deux. Or pour faire 12 j'ai emprunté une dixaine, qui par conséquent est de trop dans les trois autres caractéres du dividende ; mais pour faire compensation, j'ajoute 1 au second caractére 3 du produit, ce qui fait 4, & je continuë la soustraction : qui de 1 ôte 4 cela ne se peut, mais qui de 11 ôte 4 reste 7 que j'écris ; j'ajoute de même 1 au troisiéme caractére du produit, ce qui fait 8, à cause que j'ai emprunté 1 pour faire 11, & je dis : Qui de 1 ôte 8 cela ne se peut, mais qui de 11 ôte 8 reste 3 que j'écris ; enfin j'ajoute 1 au quatriéme caractére 4 du produit, ce qui fait 5, parce que j'ai emprunté une dixaine pour faire 11, & j'acheve la soustraction, en disant : Qui de 5 ôte 5 reste rien, & je n'écris rien, parce que n'y aïant plus de caractéres le zero que j'écrirois seroit inutile.

```
5112 72 [648
789
4734
premier reste 3787
789
3156
second reste 6312
789
6312
0000
```

Ce qui me reſte eſt donc 378, je mets à côté de ce reſte le cinquiéme caractére 7 du dividende, & écrivant le diviſeur 789 par-deſſous, j'éxamine combien de fois il eſt contenu dans ces quatre caractéres 3782, je trouve qu'il y eſt contenu quatre fois, & je l'écris au quotient. Je multiplie le diviſeur par 4, ce qui donne 3156 que j'écris par-deſſous, & retranchant ce produit de 3782, il reſte 631 que j'écris par-deſſous.

Je mets à côté de ce reſte 631 le ſixiéme caractére 2 du dividende, je mets le diviſeur par-deſſous, & examinant combien de fois ce diviſeur eſt contenu dans 6312, je trouve 8 fois que j'écris au quotient; je multiplie le diviſeur par 8, ce qui donne 6312 lequel étant retranché de 6312, il ne reſte rien.

L'opération eſt donc finie, puiſqu'il n'y a plus de caractéres au diviſeur, ainſi le quotient 648 marque que le Parc en queſtion a 648 toiſes de largeur.

Nota. 1°. Qu'en éxaminant ſi chaque caractére du diviſeur eſt contenu autant de fois dans les caractéres correſpondans que le premier ſe trouve contenu dans ceux qui ſont au-deſſus de lui, ſi l'on trouve un reſte plus grand que 10, on peut écrire hardiment au quotient le nombre de fois qu'on a trouvé ſans pouſſer plus loin l'examen, parce que ce reſte 10 avec le caractére immédiatement ſuivant ſera plus grand que 100, au lieu que ce qu'on écrit au quotient peut être tout au plus 9, de même que le caractére ſuivant du diviſeur, & que 9 fois 9 ne font que 81, lequel retranché de 100 donneroit un reſte encore plus grand que 10; de ſorte que ce reſte avec le caractére d'après ſeroit encore plus grand que 100, & que par conſéquent on pourroit encore en retrancher 81, ce qui, comme on voit, iroit à l'infini.

Nota. 2°. Que dans la ſouſtraction, de la maniere que nous l'avons faite dans cette régle, les emprunts qu'on fait n'excedent jamais une dixaine; ainſi toutes les fois qu'on a emprunté, le caractére ſuivant du nombre qu'on retranche n'augmente que d'une unité.

Nota. 3°. Que la maniere de faire la diviſion que je viens d'expliquer, eſt la même que les Auteurs appellent *Nouvelle Diviſion à l'Italienne*, & que je ne m'en ſuis ſervi que pour mieux faire entendre la maniére de diviſer de M. Parent, qui ſe pratique par le moïen de deux abréviations qu'on fait ſur celle-ci.

Pour montrer la premiere abréviation qu'on peut faire ſur cette régle, je me ſervirai des mêmes nombres ci-deſſus; ainſi après

avoir écrit le dividende & le diviſeur, & trouvé le premier quotient 6, je multiplie le diviſeur par ce quotient; mais au lieu d'écrire le produit par-deſſous, je le retranche des quatre premiers caractéres du dividende à meſure que je multiplie chaque caractére.

	511272 [648
	789
premier reſte	3787
	789
ſecond reſte	6312
	789
	000

Je dis donc 6 fois 9 font 54, qui de 2 ôte 54, cela ne ſe peut, j'emprunte donc autant de dixaines qu'il en faut, pour que ces dixaines, avec ces deux unités ſoient plus grandes que 54, c'eſt-à-dire, que j'en emprunte 6 qui font 60, & 2 font 62; qui de 62 ôte 54, reſte 8 que j'écris par-deſſous le 9 après avoir tiré une ligne. Comme j'ai emprunté 6 dixaines, ces ſix dixaines ſont donc de trop dans les caractéres 511 du dividende, mais pour faire compenſation, je retiens ces 6 dixaines que j'ajouterai au nombre à retrancher, avant de faire la ſeconde ſouſtraction. Je continuë donc, 6 fois 8 font 48, & 6 que j'ai emprunté font 54; qui de 1 ôte 54 cela ne ſe peut, mais qui de 61 ôte 54 reſte 7 que j'écris, & je retiens 6 à cauſe des 6 dixaines que j'ai emprunté pour faire 61; 6 fois 7 font 42 & 6 que je retiens font 48, & qui de 51 ôte 48, reſte 3 que j'écris: voilà donc le premier reſte. Je mets à côté de ce reſte le caractére 7 du dividende, j'écris le diviſeur par-deſſous, & trouvant qu'il eſt contenu 4 fois dans 3787, je l'écris au quotient; enſuite je multiplie le diviſeur par ce quotient 4, & je le retranche en même-tems du nombre 3787 continuant l'opération toujours de la même façon qu'on vient de voir.

Si on compare cette opération avec la précédente, on trouvera qu'elle contient douze caractéres de moins, ce qui fait déja une grande abréviation; il eſt vrai que d'autre part elle paroît plus difficile, à cauſe qu'on multiplie & qu'on ſouſtrait en même-tems, ce qui oblige de faire des emprunts beaucoup plus grands que dans la précédente; mais avec un peu d'uſage on en viendra facilement à bout, & l'on aura l'avantage d'écrire moins, ce qui, en fait de calcul n'eſt pas à mépriſer, à cauſe qu'à force d'écrire on eſt fort ſujet de mettre un caractére pour un autre.

Cette opération s'appelle par les Auteurs, *Nouvelle Diviſion à l'Eſpagnole*, & l'abréviation que nous allons faire nous donnera

la

la nouvelle Diviſion, qui eſt celle de Monſieur Parent.

Reprenons donc les mêmes nombres que ci-deſſus, mais au lieu d'écrire le diviſeur ſous le dividende, mettons-le deſſus. Enſuite après avoir trouvé le premier quotient 6, multiplions le diviſeur par 6, & retranchons le produit du dividende à meſure que nous le ferons, de même que dans la diviſion à l'Eſpagnole, mettant le reſte ſous le nombre à diviſer, en obſervant d'écrire le premier caractére 8 de ce reſte, non pas ſous la colonne où le 9 du diviſeur ſe trouve, mais ſous la colonne d'après à gauche. Cette ſouſtraction faite, nous mettrons à côté de ce reſte le caractére du dividende, & le diviſeur ſe trouvera placé comme il faut pour la ſeconde diviſion qu'il faut faire ſur le nombre 3787: de ſorte que nous ne ſerons pas obligés de l'écrire de nouveau. Examinant donc combien de fois 789 eſt dans 3787, nous écrirons 4 au quotient, & multipliant le diviſeur par 4 nous retrancherons ſon produit du nombre 3787 à meſure que nous le ferons, & nous écrirons le reſte deſſous le premier reſte, obſervant toujours d'avancer le premier caractére d'un rang vers la gauche; nous mettrons à côté du ſecond reſte le dernier caractére 2 du dividende, & nous acheverons la diviſion en faiſant de même que ci-deſſus.

789
511 272 [648

premier reſte 378.7

ſecond reſte 631.2

000

Nota. Qu'il faut mettre des points à côté de chaque reſte, c'eſt-à-dire, entre le dernier caractére de ce reſte & le caractére du dividende qu'il faut y rapporter, & quand le nombre de ces points ſe trouvera égal au nombre des caractéres du dividende, qui ſont en-delà du diviſeur vers la droite, on connoîtra que l'opération eſt finie.

Si l'on compare cette maniere de diviſer aux deux précédentes, on trouvera qu'elle contient 6 caractéres de moins que la diviſion à l'Eſpagnole, & par conſéquent 18 de moins que la diviſion à l'Italienne; & ſi l'on faiſoit des diviſions dont le dividende & le diviſeur continſſent un plus grand nombre de caractéres, telles que ſont les deux ſuivantes que je n'expliquerai point pour laiſſer aux Commençans le plaiſir de les faire eux-mêmes, on trouveroit qu'elles en contiendront encore moins eu égard aux deux autres; c'eſt pourquoi je conſeille à tous ceux qui liront cet Ouvrage de s'en tenir à celle-ci, qui outre l'avantage

de la briéveté, a encore celui de la netteté, attendu que le diviſeur n'eſt point confondu pêle mêle avec les reſtes.

```
                 6389
754 3628978 [ 1180721 2509/6389
```

Cette premiere régle-ci contient vingt-quatre caractéres moins que ſi on l'eût faite ſelon la diviſion à l'Eſpagnole, & cinquante-cinq moins que ſelon la diviſion à l'Italienne.

```
1154.6
5157.2
 460.8
4608.9
1366.7
 889.8
2509
```

```
                 43957
8654 936599786 [ 1968955 2
```

Cette ſeconde régle a trente-cinq caractéres de moins que ſi on avoit opéré à l'Eſpagnole, & ſoixante-quinze moins qu'à l'Italienne; d'où l'on voit que la Méthode de M. Parent devient toujours plus commode à l'égard des autres, à meſure que les diviſions à faire deviennent plus grandes.

```
42592.3
30310.6
39364.5
41589.9
24286.7
23082.8
11043.6
22522
```

Remarques touchant la diviſion.

XIII. Si deux nombres inégaux ſont diviſés par un même nombre, le premier quotient eſt au ſecond comme le premier nombre eſt au ſecond. Soient les deux nombres 16 & 8 à diviſer par 4; le quotient de 16 par 4 eſt 4, & celui de 8 par 4 eſt 2; or je dis que le quotient 4 eſt au quotient 2 comme le premier

nombre 16 eſt au ſecond nombre 4; car ſi 16 eſt double de 8, 16 diviſé par 4, ou devenu quatre fois plus petit, ſera double de 8 devenu auſſi quatre fois plus petit.

4 | 16 | 4 — 4 | 8 | 2

Lorſqu'on a trois nombres, par exemple, 16, 8 & 2, dont le premier 16 eſt le nombre à diviſer, le ſecond 8 le diviſeur, & le troiſiéme 2 le quotient: ſi l'on multiplie le nombre à diviſer 16, par un quatriéme nombre, par exemple 3, ce qui ſera 48; & qu'après ce changement on le diviſe de nouveau par 8, le quotient 6 ſera au premier quotient 2, comme 16 après ſon changement, c'eſt-à-dire, 48 eſt à 16 avant ſon changement; car ſi 16 diviſé par 8 donne 2, trois fois 16 ou 48 doit donner trois fois 2, c'eſt-à-dire, 6.

8 | 16 | 2 — 8 | 48 | 6

16 × 3 = 48

Si un même nombre eſt diviſé par deux diviſeurs inégaux, le ſecond quotient eſt au premier quotient réciproquement, comme le premier diviſeur au ſecond diviſeur. Soit le nombre à diviſer 16, le premier diviſeur 8, & le ſecond 4, le premier quotient ſera 2 & le ſecond 4; or je dis que le ſecond quotient 4 eſt au premier 2, comme le premier diviſeur 8 au ſecond diviſeur 4; car ſi 16 diviſé par 8 donne 2, le même 16 diviſé par la moitié de 8, doit donner, non pas la moitié de 2, mais le double de 2, c'eſt-à-dire 4, puiſqu'il contient la moitié de 8, deux fois plus qu'il ne contient 8.

8 | 16 | 2 — 4 | 16 | 4

Aiant trois nombres 32, 2 & 16, dont le premier 32 eſt le nombre à diviſer, le ſecond 2 le diviſeur, & le troiſiéme 16 le quotient; ſi l'on multiplie le diviſeur par un quatriéme nombre 4, ce qui ſera 8, & qu'après ce changement on diviſe 32 par ce produit 8, le quotient 4 ſera au premier quotient 16 réciproquement, comme le premier diviſeur 2 au ſecond diviſeur 8; car ſi 32 diviſé par 2 donne 16, le même 32 diviſé par le quadruple de 2 ne doit donner que le quart de 16, c'eſt-à-dire 4.

2 | 32 | 16 — 8 | 32 | 4

1.2 × 2 × 4 = 8

Lorſqu'on a un nombre à diviſer 8, dont le diviſeur eſt 2, & le quotient 4, ſi l'on multiplie le nombre à diviſer 8 par un nombre quelconque 6, & le diviſeur par un autre nombre, par exemple 3, & qu'enſuite

on diviſe ces produits l'un par l'autre, le ſecond quotient 8 ſera au premier quotient 4, réciproquement comme le multiplicateur 6 du nombre à diviſer eſt au multiplicateur 3 du diviſeur ; car le nombre à diviſer 8 aïant été multiplié par 6 devroit donner un quotient ſix fois plus grand que le premier quotient 4 ; mais comme le diviſeur eſt devenu trois fois plus grand, le quotient ne doit être qu'un tiers de ce qu'il auroit été ſi on n'avoit point touché au diviſeur. Or le tiers de ſix fois plus grand eſt deux fois plus grand, donc ce quotient doit être deux fois plus grand que le premier, de même que le premier multiplicateur eſt double du ſecond 3.

2 | 6
8 | 4 — 48 | 8

8 2
6 3
48 6

Lorſqu'un nombre quelconque 60 doit être diviſé ſucceſſivement par deux ou pluſieurs autres nombres, par exemple, 3, 5, & 2, on peut abréger l'opération en multipliant les diviſeurs les uns par les autres, & diviſant enſuite le nombre à diviſer par leur produit 30 ; car 60 diviſé ſucceſſivement par 3, par 5 & par 2, devient 3 fois, 5 fois, 2 fois plus petit : or 3 fois, 5 fois, 2 fois, font 30, donc le quotient de 60 par 30 doit être égal au dernier quotient ſucceſſif 2.

3 | 5 | 2
60 | 20 — 20 | 4 — 4 | 2
0

3 30
5 60 | 2
15
2
30

Lorſqu'un nombre quelconque 3678 eſt diviſé par 10, le quotient contient les mêmes caractéres que le dividende, excepté le dernier, qui eſt alors un reſte de la diviſion ; car le premier caractére 1 du diviſeur donne à chaque diviſion partielle, un quotient partial égal au caractére correſpondant du nombre à diviſer, & le zero laiſſe toujours dans ſon entier le nombre qui lui répond ; d'où il ſuit qu'à la derniere diviſion partielle, le caractére 8 ſera un reſte, & les trois autres compoſeront le quotient total.

1 0
3.678 | 367
6.7
7.8
8

Si un nombre quelconque eſt diviſé par 20, le quotient contiendra la moitié de tous les caractéres du dividende, excepté le dernier qui ſera une fraction à laquelle il faudra ajouter une

dixaine, ſi le penultiéme caractére du dividende eſt un nombre impair. Soit 3682 à diviſer par 20, le quotient contiendra la moitié de 368, c'eſt-à-dire 184, & il reſtera 2 qui ſera une fraction. Car à chaque diviſion partielle le caractére 2 du diviſeur donnera au quotient la moitié du caractére correſpondant du dividende, & le zero laiſſera toujours dans ſon entier le caractére qui lui répond; de ſorte qu'à la derniere diviſion partielle, le caractére 2 ſera une fraction.

20 | 3682 | 184 2/20

16.8

8.2

2

De même ſoit 5493 à diviſer par 20, le quotient ſera la moitié de 549, c'eſt-à-dire 274, & le caractére 3 ſera une fraction à laquelle il faudra ajouter une dixaine, parce que le penultiéme caractére 9, diviſé par 2 donne 4 avec un reſte qui eſt 1, & ce reſte 1, joint à 3 fait 13.

20 | 5493 | 274 13/20

14.9

9.3

13

Ces deux dernieres remarques nous ſeront d'une grande utilité dans la multiplication par livres, ſols & deniers, c'eſt pourquoi il faut y faire attention.

Tout nombre qui eſt contenu dans un autre nombre un certain nombre de fois ſans reſte, s'appelle *Partie aliquote* de ce nombre. 3 eſt partie aliquote de 12, parce qu'il eſt contenu exactement 4 fois dans 12; de même 4 eſt partie aliquote de 24, parce qu'il y eſt contenu 6 fois exactement.

Au contraire, ſi un nombre eſt contenu dans un autre, une ou pluſieurs fois avec un reſte, ce nombre s'appelle *Partie aliquante*. 5 eſt partie aliquante de 12, parce qu'il y eſt contenu deux fois avec un reſte 2.

On appelle *Parties aliquotes ſemblables* ou *pareilles*, certains nombres qui ſont contenus un égal nombre de fois dans leurs entiers. 3 eſt contenu 4 fois dans 12, & 6 eſt contenu auſſi 4 fois dans 24; 3 & 6 ſont *aliquotes pareilles*.

Du calcul des Fractions.

XIV. Les fractions, comme nous avons déja dit ailleurs, ſont des nombres qu'on ne ſauroit nommer, ni écrire ſans marquer le rapport qu'ils ont à un autre nombre, qui à leur égard eſt un entier. Or pour exprimer ce rapport, il faut néceſſairement ſe ſer-

vir de deux termes, ou de deux caractéres, dont l'un qu'on appelle le *numérateur*, marque combien la fraction contient de parties de ſon entier, & l'autre qu'on appelle le *dénominateur*, fait voir en combien de parties l'entier eſt diviſé. Le numérateur s'écrit par-deſſus, le dénominateur par-deſſous, & l'on met une petite ligne entre-deux, parce que toute fraction eſt une diviſion, comme nous dirons plus bas. Ainſi pour exprimer deux tiers, on écrit $\frac{2}{3}$, pour exprimer trois quarts, on écrit $\frac{3}{4}$, &c.

Toute véritable fraction étant néceſſairement plus petite que ſon entier, il s'enſuit que le numérateur doit être plus petit que le dénominateur; car s'il lui étoit égal, la fraction contiendroit toutes les parties de l'entier, & lui ſeroit par conſéquent égale, & s'il étoit plus grand, elle ſeroit auſſi plus grande. Cependant comme on eſt ſouvent obligé dans le calcul d'écrire des expreſſions, dont le numérateur eſt ou égal ou plus grand que le dénominateur, nous donnerons le nom de fractions impropres à ces ſortes d'expreſſions, à cauſe de la reſſemblance qu'elles ont avec les fractions proprement dites.

On peut faire ſur les fractions les mêmes opérations que l'on fait ſur les nombres entiers; mais auparavant il eſt bon de ſavoir certaines préparations ſans leſquelles il ne ſeroit pas poſſible d'en venir à bout.

Réduire les Fractions en même dénomination.

XV. On dit que deux ou pluſieurs fractions ſont de différentes dénominations, lorſque leurs dénominateurs ſont différens: $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ ſont de différentes dénominations, parce que le dénominateur 3 de la premiere, n'eſt pas le même que le dénominateur 4 de la ſeconde. Or voici comme il faut faire pour donner un même dénominateur à ces ſortes de fractions.

Soient, par exemple, $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ qu'on propoſe de réduire en même dénomination, je multiplie d'abord les deux dénominateurs 3 & 4 l'un par l'autre, & je prens le produit 12 pour le dénominateur commun; enſuite je multiplie le numérateur 2 de la premiere fraction, par le dénominateur 4 de la ſeconde, & je prens le produit 8 pour le numérateur de la fraction $\frac{2}{3}$. Je multiplie de même le numérateur 3 de la ſeconde fraction, par le dénominateur 3 de la premiere, & je prens le produit 9 pour le nu-

$$\frac{2}{3}\ \frac{3}{4} \qquad \frac{8}{12}\ \frac{9}{12}$$

mérateur de la fraction $\frac{3}{4}$. Ainſi ces deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ ſe trouvent changées en celles-ci $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ dont le dénominateur eſt le même, ſans que leur valeur aïe changé.

Pour le prouver, il faut ſe ſouvenir de ce que nous avons dit dans nos remarques ſur la multiplication ſimple, [n. 11.] que ſi l'on multiplie deux nombres par un troiſiéme, les produits ſont en même raiſon que les nombres à multiplier; d'où il ſuit que pour exprimer le rapport du premier nombre au ſecond, on peut ſe ſervir du rapport du premier produit au ſecond, puiſque ces rapports ſont les mêmes: or c'eſt préciſément ce que nous faiſons ici; car après avoir multiplié le dénominateur 3 de la premiere fraction par le dénominateur 4 de la ſeconde, nous avons enſuite multiplié le numérateur 2 de la premiere fraction par le même nombre 4; donc les deux produits 8 & 12 ſont en même raiſon que les deux nombres 2 & 3; & par conſéquent la fraction $\frac{8}{12}$ n'eſt pas différente de la fraction $\frac{2}{3}$. De même, après avoir multiplié le dénominateur 4 de la ſeconde fraction, par le dénominateur 3 de la premiere, nous avons enſuite multiplié le numérateur 3 de la ſeconde par le même nombre; donc les deux produits 9 & 12 ſont encore en même raiſon que les nombres 3 & 4, & la fraction $\frac{9}{12}$ eſt la même que la fraction $\frac{3}{4}$.

Si l'on propoſoit trois ou quatre, ou même un plus grand nombre de fractions à réduire en même dénomination, on multiplieroit d'abord tous les dénominateurs enſemble, ce qui donneroit le dénominateur commun, enſuite chaque numérateur ſucceſſivement par tous les dénominateurs des autres fractions.

Soit, par exemple, les trois fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, à réduire en même dénomination, je multiplie le dénominateur 3 par le dénominateur 4, & le produit 12 par le dénominateur 5, ce qui fait 60 que je prens pour le dénominateur commun. Enſuite je multiplie le numérateur 2 par le dénominateur 4, & le produit 8 par le dénominateur 5, ce qui fait 40 que je prens pour le numérateur de la premiere fraction. Je multiplie de même le numérateur 3 de la ſeconde fraction par le dénominateur 3 de la premiere, & le produit 9 par le dénominateur 5 de la troiſiéme, & le produit 45 eſt le nouveau numérateur de la ſeconde fraction; enfin je multiplie le numérateur 4 de la troiſiéme fraction, ſucceſſivement par les deux dénominateurs 3 & 4, des

40	45	48
2	3	4
3	4	5
	60	

deux autres, & le produit 48 eſt le nouveau numérateur de la troiſiéme fraction : ainſi $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ſe trouvent changés en $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, qui ont tous le même dénominateur.

La preuve de ceci eſt la même que la précédente ; car le dénominateur 3 étant devenu 60, parce qu'il a été multiplié par 4 & 5, j'ai auſſi multiplié ſon numérateur 2 par 4 & 5 ; de même le dénominateur 4 étant devenu 60, parce qu'il a été multiplié par 3 & par 5, j'ai auſſi multiplié ſon numérateur 3 par les mêmes nombres ; & enfin le dénominateur 5 étant devenu 60, parce qu'il a été multiplié par 3 & par 4, j'ai auſſi multiplié ſon numérateur 4 par 3 & par 4 ; ainſi les fractions $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ ſont les mêmes que les propoſées $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

Réduire une Fraction en moindre dénomination.

XVI. Une fraction eſt réduite en moindre dénomination lorſque les caractéres qui la compoſent ſont les plus petits qui puiſſent exprimer le rapport du numérateur au dénominateur ; la fraction $\frac{1}{3}$ eſt réduite en moindre dénomination, parce qu'il n'y a point de nombres plus petits que 1 & 3 qui puiſſent exprimer le rapport du numérateur 1 au dénominateur 3 : au contraire, $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{6}{24}$, &c. ne ſont pas en moindre dénomination, puiſque le rapport de chacune de ces fractions peut s'exprimer par un $\frac{1}{3}$ dont les nombres ſont plus petits que les nombres de $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$, &c.

Plus les nombres qui expriment une fraction ſont grands, plus auſſi on a de la peine à juger du rapport du numérateur au dénominateur. Quand on écrit, par exemple $\frac{3}{4}$, on voit aiſément que la fraction vaut les trois quarts de l'entier ; mais ſi on vient à écrire $\frac{72}{96}$ ou $\frac{216}{288}$, qui eſt la même que $\frac{3}{4}$, il n'eſt plus ſi aiſé de ſavoir ce que c'eſt que cette fraction, & ſouvent même l'on n'en peut juger qu'en la réduiſant à des expreſſions moins compoſées, qui nous rapprochent le rapport du numérateur au dénominateur.

Nous avons dit dans les remarques ſur la Diviſion ſimple, [n. 13.] que ſi on diviſe deux nombres inégaux par un même diviſeur, les quotiens ſeront encore en même raiſon que les nombres à diviſer, c'eſt-à-dire, que le premier quotient ſera au ſecond comme le premier nombre à diviſer eſt au ſecond ; d'où il ſuit que pour exprimer le rapport des nombres à diviſer, on pourra ſe ſervir de celui des quotiens qui eſt le même. On a

pû

pû obſerver auſſi que dans la diviſion plus le diviſeur eſt grand, plus auſſi le quotient eſt petit. Cela poſé, ſi l'on diviſe le numérateur & le dénominateur d'une fraction, par le plus grand de tous les nombres qui peuvent diviſer l'un & l'autre exactement & ſans reſte, il eſt évident que les deux quotiens étant pris, l'un pour numérateur & l'autre pour dénominateur, formeront une nouvelle fraction, qui ſera la même que la propoſée, mais dont les nombres ſeront beaucoup plus petits.

Quand donc on propoſe une fraction à réduire en moindre dénomination, toute la difficulté conſiſte à trouver le plus grand diviſeur commun du numérateur & du dénominateur, & pour y parvenir, voici comme on s'y prend.

Soit la fraction propoſée $\frac{72}{96}$; je retranche d'abord le numérateur 72 du dénominateur 96, & il reſte 24; je retranche ce reſte 24 du numérateur 72, & il reſte 48; je retranche encore le premier reſte 24 du ſecond 48, & il me reſte 24; enfin je retranche ce reſte 24 de l'autre reſte 24, & il ne me reſte rien. Je dis donc: 24 ſe meſure exactement lui-même, il meſure auſſi exactement 48, car il y eſt deux fois; il meſure auſſi 72, puiſqu'il y eſt trois fois; & enfin il meſure exactement 96, puiſqu'il y eſt 4 fois; ainſi 24 eſt le plus grand diviſeur commun de 72, & de 96. Diviſant donc l'un & l'autre par 24, les deux quotiens 3 & 4 me donnent la fraction réduite $\frac{3}{4}$ qui eſt la même que $\frac{72}{96}$.

$\frac{72}{96}$ 96 72 72 24 24 48 24 72 | 3 48 24 24 24 24 24 96 | 4 0

$\frac{3}{4}$ fraction réduite.

On trouve la même choſe encore plus aiſément par la diviſion que par la ſouſtraction; car la ſouſtraction ne retranche un nombre d'un autre qu'une fois à chaque opération, au lieu que la diviſion le retranche d'un ſeul coup autant de fois qu'il y eſt contenu, ce qui abrége beaucoup; ainſi pour réduire la même fraction $\frac{72}{96}$, je diviſe le dé-

$\frac{72}{96}$ 72 | 96 | 1 24 24 72 | 3 24 72 | 3 0 24 96 | 4

$\frac{3}{4}$ fraction réduite.

nominateur 96 par le numérateur 72, & le quotient eſt 1, & il reſte 24; je diviſe 72 par le reſte 24, le quotient eſt 3, & il ne me reſte rien. Donc 24 diviſe exactement 72, & comme 72 & 24 ſont 96, 24 diviſe auſſi exactement 96. Je diviſe donc 72 & 96 par 24, & les deux quotiens 3 & 4 me donnent la fraction $\frac{3}{4}$, qui eſt la même que la propoſée.

Tout l'artifice de ceci conſiſte à diviſer toujours le dernier diviſeur par le dernier reſte, juſqu'à ce qu'on trouve un diviſeur qui diviſe exactement, & ce diviſeur eſt le plus grand diviſeur commun de la fraction. Soit, par exemple, la fraction $\frac{4158}{10395}$ à réduire en moindre dénomination. Je diviſe le dénominateur 10395 par le numérateur 4158, & il reſte 2079. Je diviſe le numérateur 4158 par ce reſte 2079, & il ne reſte rien, ce qui me fait connoître que 2079 eſt le plus grand diviſeur commun du numérateur & du dénominateur. Diviſant donc l'un & l'autre par 2079, les quotiens 2 & 5 me donnent la fraction réduite $\frac{2}{5}$, qui eſt la même que la propoſée.

$\frac{4158}{10395}$

4158 | 10395 | 2

2079

2079 | 10395 | 5

2079 | 4158 | 2

0

$\frac{2}{5}$ fraction réduite.

Lorſqu'en diviſant toujours le dernier diviſeur par le dernier reſte, on vient enfin à un dernier reſte qui eſt l'unité, c'eſt ſigne que la fraction propoſée ne peut pas être réduite à des moindres expreſſions; car l'unité ne diviſe point. La fraction, par exemple, $\frac{103}{128}$ ne peut pas ſe réduire à des moindres expreſſions, parce qu'en diviſant le dénominateur par le numérateur; & continuant l'opération comme ci-deſſus, on vient enfin à un dernier reſte, qui eſt l'unité, comme on le voit ici.

103 | 128 | 1

25

25 | 103 | 4

3

3 | 25 | 8

1

Réduire un entier en une Fraction, dont le dénominateur ſoit donné.

XVII. Soit l'entier 24 à réduire en une fraction dont le dénominateur ſoit 3, cette fraction eſt de tiers: or chaque unité compriſe dans l'entier 24, contient trois tiers, je multiplie donc 24 par 3, ce qui fait 72, & j'écris le dénominateur 3 par-deſſous, ce qui fait $\frac{72}{3}$ égaux à 24.

De même, soit *le nombre* 36 à réduire en une fraction dont le dénominateur *soit* 4; comme cette fraction est de quarts, & que chaque *unité* compriſe dans 36 contient quatre quarts, je multiplie 36 par 4, ce qui donne 144; & écrivant le dénominateur 4 par-dessous, j'ai la fraction $\frac{144}{4}$ égale à 36.

D'où l'on voit que pour réduire un entier en une fraction de quelque dénominateur que ce soit, il faut multiplier l'entier par le dénominateur, & écrire le dénominateur sous le produit.

Réduire une Fraction en entiers.

XVIII. Réduire une fraction en entiers, c'est chercher combien une fraction, improprement dite, contient d'entiers; pour cela *il faut diviſer le numérateur* par le dénominateur, & le quotient donne ce que l'on cherche

Soit la fraction $\frac{144}{4}$ à réduire en entiers: puisque cette fraction est de quarts, & que chaque entier en contient 4, il y aura donc autant d'entiers dans 144, que le nombre 4 s'y trouvera contenu de fois: diviſant donc 144 par 4, le quotient 36 montrera que la fraction $\frac{144}{4}$ contient 36 entiers.

4	
144	36
24	

De même soit la fraction $\frac{237}{5}$ à réduire en entiers, diviſant 237 par 5, le quotient sera 47, & il restera 2 à diviſer par 5, c'est-à-dire, $\frac{2}{5}$, ce qui fait voir que la fraction $\frac{237}{5}$ contient 47 entiers & $\frac{2}{5}$ d'entiers.

5	
237	47 $\frac{2}{5}$
37	
2	

Evaluer une Fraction.

XIX. Nous avons dit [n. 7.] qu'il y avoit certains entiers, dont l'on avoit jugé à propos de faire des diviſions & des soudiviſions, à qui l'on avoit donné des noms particuliers: or évaluer une fraction, c'est chercher combien une fraction qui appartient à ces entiers contient de ces sortes de diviſions, & l'on va voir, dans les exemples suivans, de quelle manière cette évaluation se doit faire.

Si l'on me propoſe, par exemple, d'évaluer $\frac{2}{3}$ d'écus, je multiplie d'abord le numérateur 2 de la fraction par 60, parce que l'écu contient 60 sols, & diviſant le produit 120 par le déno-

minateur 3, le quotient 40 me fait voir que $\frac{2}{3}$ d'écus valent 40 sols.

Pour comprendre la raison de ceci, il faut observer que c'est la même chose de dire $\frac{2}{3}$ d'écus, ou de dire 2 écus à partager en trois; car si l'on partage 2 écus en trois, on voit bien que la part d'un sera $\frac{1}{3}$ d'écus. Or deux écus valent 120 sols, partageant donc 120 en trois, ce qui se fait par la division, le quotient 40 sera la même chose que $\frac{2}{3}$ d'écus.

$\frac{2}{3}$ 60
2
120

3 | 120 | 40 s.
0

Pour évaluer la fraction $\frac{2}{6}$ de livres, je multiplie le numérateur 2 par 20, parce que la livre vaut 20 sols, & je divise le produit 40 par 6, ce qui me donne 6 sols & $\frac{4}{6}$ de sols égaux à $\frac{2}{6}$ de livres.

$\frac{2}{6}$ de livres. 20
2
40 sols

6 | 40 | 6 sols.
4

J'évalue ensuite la nouvelle fraction $\frac{4}{6}$ de sols en multipliant le numérateur 4 par 12, parce que le sol contient 12 deniers, & divisant le produit 48 par 6, le quotient 8 me fait voir que 8 deniers valent $\frac{4}{6}$ de sols. Ainsi je vois que la fraction $\frac{2}{6}$ de livres vaut 6 sols 8 deniers.

12
4
48 den.

6 | 48 | 8 den.

De même pour évaluer la fraction $\frac{3}{5}$ de toises, je multiplie le numérateur 3 par 6, parce que la toise contient 6 pieds, & divisant le produit 18 par le dénominateur 5, j'ai 3 pieds & $\frac{3}{5}$ de pieds égaux à $\frac{3}{5}$ de toises.

$\frac{3}{5}$ de toises. 6
3
18 pieds.

5 | 18 | 3 pieds.
3

12
3
36 pouces.

5 | 36 | 7 pouces.
1

J'évalue la nouvelle fraction $\frac{3}{5}$ de pieds en multipliant le numérateur 3 par 12, parce que le pied contient 12 pouces; & divisant le produit 36 par le dénominateur 5, j'ai 7 pouces & $\frac{2}{5}$ de pouce, égaux à $\frac{3}{5}$ de pieds.

12
1
12 lignes.

5 | 12 | 2 lignes $\frac{2}{5}$
2

Enfin j'évaluë la nouvelle fraction $\frac{1}{5}$ de pouce en multipliant le numérateur 1 par 12, parce que le pouce contient 12 lignes, & diviſant le produit 12 par le dénominateur 5, j'ai 2 lignes & $\frac{2}{5}$ de lignes égaux à $\frac{1}{5}$ de pieds ; ajoutant donc ces trois évaluations enſemble, je trouve que $\frac{5}{5}$ de toiſes valent 3 pieds, 7 pouces, 2 lignes & $\frac{2}{5}$ de lignes.

Je n'évaluë point la derniere fraction de lignes, parce que les 12 points que la ligne contient ſont ſi petits, qu'on les néglige dans la pratique, où l'on regarde les lignes comme la derniere ſoudiviſion de la toiſe.

Ajouter deux ou pluſieurs Fractions enſemble.

XX. *Si les fractions à ajouter ont le même dénominateur, on ajoute tous les numérateurs enſemble, & ſi leur ſomme ſurpaſſe le dénominateur, on réduit cette fraction en entier.*

PREMIER EXEMPLE.

Une perſonne a acheté 10 aunes $\frac{2}{5}$ d'étoffe d'une part, 9 aunes $\frac{4}{5}$ d'une autre, & enfin 14 aunes & $\frac{3}{5}$ de l'autre : combien a-t-il d'aunes en tout ?

J'ajoute les trois numérateurs 2, 4 & 5, & comme leur ſomme 9 eſt plus grande que leur dénominateur 5, je diviſe 9 par 5, & le quotient me fait voir que $\frac{9}{5}$ contient un entier & $\frac{4}{5}$, j'écris donc $\frac{4}{5}$, & je retiens un entier que j'ajoute aux entiers, en diſant : 1 & 9 ſont 10 & 4 ſont 14, & j'acheve le reſte comme dans l'addition ordinaire.

	10 aunes	$\frac{2}{5}$
	9	$\frac{4}{5}$
	14	$\frac{3}{5}$
Somme	34	$\frac{4}{5}$

Si les fractions à ajouter n'ont pas le même dénominateur, on les réduit à la même dénomination, après quoi on les ajoute enſemble, comme nous venons de dire.

SECOND EXEMPLE.

Un Marchand a vendu dans la journée 15 aunes $\frac{1}{6}$ de drap d'une part, 18 & $\frac{3}{4}$ d'une autre, 12 & $\frac{1}{3}$ d'une autre, & enfin 20 $\frac{4}{5}$ d'une autre : combien a-t-il vendu en tout ?

Je réduis ces fractions en même dénomination, de la maniere que nous avons vû ci-dessus, & la réduction me donne $\frac{300}{360}$. $\frac{270}{360}$. $\frac{240}{360}$. & $\frac{288}{360}$.

300. 270. 240. 288.
$\frac{5}{6}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$.
360

15 aunes $\frac{300}{360}$
18 $\frac{270}{360}$
12 $\frac{240}{360}$
20 $\frac{288}{360}$
68 aunes $\frac{1}{10}$

Je fais une somme de tous les numérateurs, & comme cette somme est plus grande que le dénominateur 360, je la divise par 360, & le quotient me fait voir qu'elle contient 3 entiers & $\frac{18}{360}$; je réduis $\frac{18}{360}$ en moindre dénomination, & je trouve $\frac{1}{20}$ égal à $\frac{18}{360}$, c'est pourquoi j'écris $\frac{1}{20}$, & je retiens 3 entiers que j'ajoute aux entiers, en disant: 3 & 5 font 8, & 8 font 16, &c. & j'acheve le reste à l'ordinaire.

300
270
240
288
1098

360 | 1098 | 3
18

18 | 360 | 20
00

18 | 18 | 1

$\frac{1}{10}$ égal à $\frac{18}{360}$

Soustraire une Fraction d'une autre Fraction.

XXI. Si les fractions ont le même dénominateur, on retranche le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre, & l'on écrit le reste. Que si le numérateur de la fraction à soustraire étoit plus grand que l'autre numérateur, on emprunteroit un entier qu'on réduiroit en une fraction de même dénomination, & ajoutant cette fraction avec celle du nombre dont on doit soustraire la seconde fraction, on feroit la soustraction comme il vient d'être dit.

PREMIER EXEMPLE.

Une personne aiant acheté 25 aunes & $\frac{1}{9}$ d'étoffe, en a vendu 14 & $\frac{7}{5}$: on demande combien il lui en reste?

Je ne puis pas retrancher 7 de 5, c'est pourquoi j'emprunte une

aune, laquelle réduite en fraction fait $\frac{9}{9}$, & ces $\frac{9}{9}$ ajoutés à $\frac{1}{9}$ font $\frac{10}{9}$; je dis donc: Qui de 14 ôte 7, reste 7 que j'écris; après quoi achevant la soustraction des entiers, à la maniere ordinaire, je trouve qu'il reste 10 aunes $\frac{7}{9}$.

	25 aunes	$\frac{1}{9}$
	14	$\frac{7}{9}$
Reste	10	$\frac{7}{9}$

Si les fractions n'avoient pas le même dénominateur, on les réduiroit auparavant en même dénomination.

SECOND EXEMPLE.

Un Tailleur a reçû 36 aunes $\frac{1}{8}$ d'étoffe, dont il doit faire deux habits; il lui faut pour l'un de ces habits 17 aunes $\frac{3}{4}$: combien lui reste-t-il pour l'autre?

Je réduis en même dénomination les fractions $\frac{4}{8}$ & $\frac{3}{4}$, ce qui donne $\frac{20}{32}$ & $\frac{24}{32}$; ensuite comme je ne puis retrancher 24 de 20, j'emprunte une aune qui vaut $\frac{32}{32}$, lesquels ajoutés à $\frac{20}{32}$ font $\frac{52}{32}$, & de $\frac{52}{32}$ ôtant $\frac{24}{32}$ reste $\frac{28}{32}$; j'acheve le reste à l'ordinaire, & je trouve 18 aunes $\frac{28}{32}$ qu'il reste au Tailleur pour l'autre habit. Les $\frac{28}{32}$ réduits en moindre dénomination sont $\frac{7}{8}$.

	20		24
	$\frac{1}{9}$		$\frac{3}{4}$
		32	
36	$\frac{20}{32}$		
17	$\frac{24}{32}$		
18	$\frac{28}{32}$	ou	$\frac{7}{8}$

Multiplier les Fractions.

XXII. Pour multiplier une fraction par une autre, on multiplie les numérateurs ensemble, & ensuite les dénominateurs; après quoi faisant une nouvelle fraction de ces deux produits, on a le produit que l'on cherche.

Soit, par exemple, la fraction $\frac{2}{3}$ à multiplier par la fraction $\frac{3}{4}$, je multiplie le numérateur 2 par le numérateur 3, ce qui fait d'abord $\frac{6}{3}$, mais comme en multipliant $\frac{2}{3}$ par 3, j'ai trop multiplié, puisqu'il ne falloit multiplier que par $\frac{3}{4}$ qui est quatre fois plus petit que 3; il faut aussi que le produit $\frac{6}{3}$ devienne quatre fois plus petit, c'est pourquoi je le divise par 4. Or $\frac{6}{3}$ est déja divisé par 3, donc puisqu'il faut le diviser encore par 4, je multiplie les deux diviseurs 3 & 4 l'un par l'autre, ce qui fait 12, & j'écris ce diviseur 12 sous 6, ce qui me donne la fraction $\frac{6}{12}$ qui est le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$.

Ce qui étonne d'abord en ceci, c'eſt que le produit $\frac{6}{12}$ eſt plus petit que le nombre à multiplier $\frac{2}{3}$, mais cela doit être ainſi; car ſi l'on y prend garde, on ne multiplie jamais une fraction par une autre, qu'on ne faſſe en même-tems une diviſion, dont le diviſeur eſt plus grand que le multiplicateur de la multiplication : dans cet exemple, le multiplicateur eſt 3 & le diviſeur eſt 4, lequel étant plus grand que 3 doit plus diminuer la fraction $\frac{2}{3}$ que le multiplicateur 3 ne l'avoit augmentée.

Diviſer les Fractions.

XXIII. Si la fraction à diviſer & celle qui diviſe ſont de même dénomination, on diviſe le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, & le quotient eſt le nombre cherché; & ſi leurs dénominations ſont différentes, on les réduit auparavant au même dénominateur.

Soit la fraction $\frac{3}{4}$ à multiplier par $\frac{2}{3}$, je les réduits d'abord en même dénomination, ce qui donne $\frac{9}{12}$ & $\frac{8}{12}$, je néglige les dénominateurs, & diviſant le numérateur 9 par le numérateur 8, le quotient $1\frac{1}{8}$ me fait voir que $\frac{2}{3}$ ſont contenus une fois & un huitiéme de fois dans $\frac{3}{4}$.

$$\begin{array}{r|l} 8 & \\ 9 & 1\ \frac{1}{8} \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\frac{9}{12} \quad \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} \quad 12$$

Il ne faut pas non plus être ſurpris, dans cette opération, de voir que le quotient eſt plus grand que le nombre à diviſer; car comme on cherche dans la diviſion combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le dividende, & que les fractions peuvent ſe contenir entre elles de même que les nombres entiers; il eſt évident qu'à moins que la fraction qui diviſe ne ſoit plus grande que la fraction diviſée, le quotient doit toujours être un entier, lequel par conſéquent doit être plus grand que la fraction à diviſer.

Des Fractions de Fractions.

XXIV. Les fractions de fractions ſont des parties de fractions, de même que les fractions ſont des parties d'entiers. Suppoſons, par exemple, qu'aïant acheté deux tiers d'aune d'une certaine étoffe, je coupe enſuite les trois quarts de ces deux tiers; ces trois quarts ſont une fraction de fraction, parce qu'ils ne ſont pas les trois

trois quarts d'une aune, mais ſimplement les trois quarts de deux tiers. Pour opérer ſur ces ſortes de fractions, il faut auparavant les réduire en fractions d'entiers, en multipliant leur numérateur par le numerateur de la fraction dont elles ſont fractions, & leur dénominateur par le dénominateur.

Soit la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 par 3, ce qui fait 6, & 3 par 4, ce qui fait 12; & la fraction $\frac{6}{12}$ d'entier eſt la même que la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$. Pour comprendre la raiſon de ceci, il n'y a qu'à faire attention, que l'entier aïant 4 quarts, & chaque quart aïant trois tiers, l'entier doit par conſéquent contenir 3 fois 4, ou 12 tiers de quart; de même puiſqu'on a $\frac{3}{4}$ & qu'il faut prendre $\frac{2}{3}$ de chacun, on a donc 3 fois deux tiers de quart, c'eſt-à-dire, $\frac{6}{3}$ de quart, leſquels ſix tiers comparés à l'entier, comme nous venons de voir, ſeront $\frac{6}{12}$ d'entier. Cette préparation faite, voici quelques exemples qui feront voir de quelle maniere il faut opérer.

PREMIER EXEMPLE.

Une perſonne a acheté d'une part 3 *aunes* $\frac{2}{3}$ *& les* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{2}{3}$ *d'une certaine étoffe, dont il avoit déja* 6 *aunes* $\frac{1}{6}$ *& les* $\frac{7}{8}$ *de* $\frac{1}{6}$ *: combien a-t-il d'aunes en tout?*

Je réduis d'abord la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ en fraction d'entier, ce qui fait $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$; enſuite pour ajouter cette moitié avec les $\frac{2}{3}$ d'entiers, je réduis ces deux fractions en même dénomination, ce qui fait $\frac{3}{6}$ & $\frac{4}{6}$, leſquels ajoutés enſemble font $\frac{7}{6}$ ou 1 aune & $\frac{1}{6}$. Cette perſonne a donc d'une part 3 aunes, 1 aune & $\frac{1}{6}$, c'eſt-à-dire, 4 aunes & $\frac{1}{6}$.

6		3	4	$\frac{7}{6}$ ou 1 aune $\frac{1}{6}$
$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	
12		6		
	35		$\frac{1}{6}$ ou $\frac{40}{48}$ & $\frac{31}{48}$ font $\frac{71}{48}$	
	$\frac{7}{8}$ de $\frac{1}{6}$			c'eſt-à-dire, 1 aune $\frac{27}{48}$
	48			
4.	$\frac{1}{6}$ ou $\frac{8}{48}$			
7-	$\frac{27}{48}$			
11.	$\frac{31}{48}$			

Je réduis de même la fraction de fraction $\frac{7}{8}$ de $\frac{1}{6}$, ce qui fait $\frac{35}{48}$ d'entier; enſuite pour ajouter cette fraction à la fraction $\frac{1}{6}$, je réduis celle-ci en quarante-huitiéme, en multipliant ſon numérateur & ſon dénominatur par 8, ce qui fait $\frac{40}{48}$, leſquels ajoutés à $\frac{35}{48}$ font $\frac{75}{48}$ ou 1 aune & $\frac{27}{48}$. Cette perſonne a donc d'une autre part 6 aunes, 1 aune & $\frac{27}{48}$, c'eſt-à-dire, 7 aunes & $\frac{27}{48}$. Je réduis la fraction $\frac{1}{6}$ ci-deſſus en quarante-huitiéme, en multipliant ſon numérateur & ſon dénominateur par 8, ce qui fait $\frac{8}{48}$; ainſi cette perſonne a d'une part 4 aunes $\frac{8}{48}$, & de l'autre 7 aunes $\frac{27}{48}$, & ces deux ſommes ajoutées enſemble, font 11 aunes $\frac{35}{48}$.

SECOND EXEMPLE.

On veut ſavoir ce qui reſtera d'une piéce d'étoffe qui a 36 aunes $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, lorſqu'on en aura retranché 25 aunes $\frac{6}{7}$ & $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$.

La fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ étant réduite en fraction d'entier, donne $\frac{8}{15}$ d'entier: pour ajouter cette fraction à la fraction $\frac{4}{5}$, je réduis celle-ci en quinziéme, en multipliant ſon numérateur & ſon dénominateur par 3, ce qui fait $\frac{12}{15}$, leſquels ajoutés à $\frac{8}{15}$ font $\frac{20}{15}$ ou 1 aune & $\frac{5}{15}$, & ces $\frac{5}{15}$ réduits en moindre dénomination font $\frac{1}{3}$; ainſi la piéce d'étoffe a 36 aunes, 1 aune & $\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, 37 aunes $\frac{1}{3}$.

La fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ réduite en fraction d'entier, donne $\frac{6}{12}$ d'entier, & pour ajouter cette fraction à la fraction $\frac{6}{7}$, je les réduis l'une & l'autre en même dénomination, ce qui fait $\frac{42}{84}$ & $\frac{72}{84}$, dont la ſomme eſt $\frac{114}{84}$ ou 1 aune & $\frac{30}{84}$. Ce qu'on veut retrancher de la piéce d'étoffe eſt donc 25 aunes, 1 aune & $\frac{30}{84}$; je réduis la fraction $\frac{40}{84}$ & la fraction $\frac{1}{3}$ ci-deſſus en même dé-

$\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ — 8, 15 — $\frac{4}{5}$ ou $\frac{12}{15}$ & $\frac{8}{15}$ font $\frac{20}{15}$, c'eſt-à-dire, 1 aune $\frac{5}{15}$ ou $\frac{1}{3}$.

$\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ — 6, 12 — $\frac{6}{12}$ — 42, 72, 84 — $\frac{6}{7}$ — $\frac{114}{84}$, c'eſt-à-dire, 1 aune $\frac{30}{84}$.

84, 90 — $\frac{1}{3}$ — $\frac{30}{84}$

252

37 $\frac{84}{252}$

26 $\frac{90}{252}$

10 $\frac{246}{252}$

nomination, ce qui fait $\frac{90}{252}$ & $\frac{84}{252}$; ainſi la piéce d'étoffe contient 37 aunes $\frac{84}{252}$, & ce qu'on en veut retrancher eſt 26 aunes & $\frac{90}{252}$. Je fais donc la ſouſtraction en empruntant 1 aune ſur les 37, & cette aune vaut $\frac{252}{252}$, leſquels ajoutés à $\frac{84}{252}$ font $\frac{336}{252}$; deſquels ôtant $\frac{90}{252}$ reſte $\frac{246}{252}$, & achevant le reſte à l'ordinaire, je trouve qu'il reſtera 10 aunes $\frac{246}{252}$.

Remarques ſur les Fractions.

XXV. Pour multiplier un nombre entier par une fraction, ou une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur de la fraction par le nombre entier, & l'on écrit le dénominateur ſous le produit, ou bien l'on diviſe le produit par le dénominateur, ſi le dénominateur eſt plus petit. Soit l'entier 15 à multiplier par la fraction $\frac{2}{3}$, je multiplie 2 par 15, ce qui fait 30, & j'écris le dénominateur 3, ce qui fait $\frac{30}{3}$; ou bien je diviſe par 3, ce qui me donne 10 entiers. Tout cela eſt évident; car on voit bien que 15 fois $\frac{2}{3}$ font $\frac{30}{3}$, & que $\frac{30}{3}$ valent 10.

Lorſqu'un nombre entier, par exemple 15, doit être multiplié ſucceſſivement par pluſieurs fractions, comme par $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, on peut, pour abréger, multiplier d'abord les trois numérateurs les uns par les autres, ce qui donne 24, enſuite multiplier l'entier 15 par 24, ce qui donne 360 pour le numérateur.

Pour avoir le dénominateur, il faut multiplier les trois dénominateurs enſemble, ce qui donne 60, & écrire 60 ſous 360, ou bien diviſer 360 par 60, ce qui donne 6 entiers. Tout ceci n'eſt qu'une ſuite des remarques que nous avons fait touchant la multiplication.

15. par $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$

	3	2	
		3	
15	4	6	
24		4	
60	12		24 multiplic.
30	5		
360	60 divis.		

$\frac{360}{60}$ ou 6 entiers.

Si l'on propoſe un nombre entier à diviſer par une fraction, on multiplie le nombre à diviſer par le dénominateur de la fraction, & l'on diviſe le produit par le numérateur, ou, ce qui revient au même, on diviſe d'abord l'entier par le numérateur, & l'on multiplie le quotient par le dénominateur. La premiere de

ces deux façons vaut mieux, parce que lorſqu'on commence par la diviſion, le quotient peut contenir une fraction qu'il faut enſuite multiplier, ce que l'on évite en commençant par la multiplication. Soit 15 à diviſer par $\frac{2}{3}$, je multiplie 15 par 3, & j'ai 45 que je diviſe par 2, ce qui me donne $22\frac{1}{2}$; ou bien je diviſe 15 par 2, ce qui fait $7\frac{1}{2}$; mais comme j'ai trop diviſé, en diviſant par 2, puiſque je ne devois diviſer que par $\frac{2}{3}$, qui eſt trois fois plus petit que 2, je multiplie $7\frac{1}{2}$ par 3, ce qui me donne de même $22\frac{1}{2}$.

15 par $\frac{2}{3}$ 15 × 3 = 45 ; 45 ÷ 2 = 22 $\frac{1}{2}$; reſte 5 ; 5 ÷ 2 = reſte 1

Que ſi le nombre à diviſer 15 devoit être diviſé ſucceſſivement par pluſieurs fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c. on feroit le produit des dénominateurs 3, 4, 5, multipliés les uns par les autres, & l'on multiplieroit 15 par leur produit 60, ce qui donneroit 900; enſuite on feroit le produit 24 des numérateurs 2, 3, 4, multipliés les uns par les autres, & diviſant 900 par 24, on auroit le quotient $37\frac{12}{24}$, ou bien en réduiſant $\frac{12}{24}$ en moindre dénomination, $37\frac{1}{2}$ ſeroit le quotient cherché. Ceci n'eſt encore qu'une ſuite de nos remarques ſur la multiplication & ſur la diviſion.

15 par $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; 3 × 4 = 12 ; 12 × 5 = 60 multiplic. ; 2 × 3 = 6 ; 6 × 4 = 24 diviſ. ; 15 × 60 = 900 ; 900 ÷ 24 = $37\frac{12}{24}$ ou $\frac{1}{2}$; reſte 180 ; 180 ÷ 24 = reſte 12

De la multiplication compoſée.

XXVI. La multiplication compoſée ſe fait ordinairement de deux façons : la premiere, en réduiſant les nombres compoſés à leurs dernieres eſpéces ; & l'autre, en multipliant par les parties aliquotes. Nous allons expliquer l'une & l'autre de ces manieres dans les exemples ſuivans, après quoi nous examinerons laquelle des deux doit emporter la préférence.

PREMIER EXEMPLE.

De la Multiplication par réduction.

La livre d'une certaine Drogue coûte 3 livres, 10 ſols, 6 deniers : combien coûteront 18 livres ?

Je réduis 3 liv. 10 ſ. 6 den. en ſa derniere eſpéce, c'eſt-à-dire, je multiplie 3 livres par 20, parce que la livre contient 20 ſols, le produit eſt 60, auquel j'ajoute les 10 ſols, ce qui fait 70 ; enſuite je réduis 70 ſols en deniers, en les multipliant par 12, parce qu'un ſol vaut 12 deniers, & le produit eſt 840, auquel j'ajoute les 6 deniers, ce qui fait 846 ; ainſi 3 livres dix ſols ſix deniers ſont 846 deniers. Cela fait, je multiplie 18 livres par 846 deniers, & le produit eſt 15228 ; mais comme avant de faire ce produit, j'ai agrandi le multiplicateur 3 livres, en le multipliant par 20 ſols, & enſuite par 12, je dois donc diviſer ſucceſſivement par 20 & par 12, ou tout d'un coup par 240 qui eſt le produit de 20 par 12 ; diviſant donc 15228 par 240, le quotient eſt 63 livres, & il reſte une fraction $\frac{108}{240}$ que j'évalue en multipliant le numérateur 108 par 20, parce que la livre vaut 20, & diviſant le produit par le dénominateur 240, le quotient eſt 9 ſols, & il ne reſte rien. Ainſi le produit total eſt 63 livres 9 ſols.

3
20

60
10

70 ſols
12

140
70
6

846 deniers
20
12

40
20

240 diviſeur

846
18

6768
846

15228 produit

240 | 15228 | 63 livres
828
108

240 | 2160 | 9 ſols
000

2160

total 63 liv. 9 ſ.

SECOND EXEMPLE.

De la Multiplication par réduction.

Une perſonne a acheté 12 aunes ¼ d'étoffe à 4 livres 5 ſols 3 deniers l'aune : on demande à combien ſe monte le tout ?

Je réduis 12 aunes en quarts, en les multipliant par 4, & j'ajoute 3 au produit 48, parce qu'il y a ¾, ce qui me donne 51.

Je réduis de même 4 livres en ſols, en les multipliant par 20, ce qui fait 80 ſols, auſquels j'ajoute les cinq ſols, & j'ai 85 ſols. Je réduis ces ſols en deniers, en les multipliant par 12, & j'ajoute les 3 deniers au produit, ce qui me donne 1023 deniers.

Cela fait, je multiplie 1023 par 51, & le produit eſt 52173 ; mais comme avant de faire ce produit, j'ai agrandi le nom-

12 × 4 = 48 + 3 = 51 quarts

4 × 20 = 80 + 5 = 85 ; 85 × 12 = 170 + 85 + 3 = 1023 deniers

1023 × 51 = 1023 + 5115 = 52173 produit

4 × 20 = 80 + 12 = 160 + 80 = 960 diviſeur

52173 | 960 = 54 livres ; 417 ; 333

333 × 20 = 6660 ; 6660 | 960 = 6 ſols ; 900

900 × 12 = 10800 ; 10800 | 960 = 11 den. $\frac{240}{960}$; 240

Total 54 liv. 6 ſols 11 den. $\frac{240}{960}$ ou $\frac{1}{4}$

bre à multiplier, en le multipliant par 4, & le multiplicateur 4 livres en le multipliant par 20 & par 12, je dois donc diviſer ſucceſſivement par 4, par 20 & par 12, ou tout d'un coup par 960, qui eſt le produit de ces trois nombres les uns par les autres; diviſant donc 52172 par 960, le quotient eſt 54 livres, & il reſte une fraction $\frac{333}{960}$ que j'évaluë en multipliant le numérateur 333 par 20, & diviſant par le dénominateur 960, le quotient eſt 6 ſols; & il reſte une fraction $\frac{900}{960}$ que j'évaluë encore en multipliant le numérateur 900 par 12, parce que le ſol vaut 12 deniers, & diviſant par 960, le quotient eſt 11 deniers, & il reſte une fraction $\frac{240}{960}$ qui ne peut plus s'évaluer, parce que le denier eſt la derniere eſpéce, mais qui étant réduite en moindre dénomination donne $\frac{1}{4}$; ainſi le total eſt 54 livres, 6 ſols, 11 deniers $\frac{1}{4}$.

TROISIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication par réduction.

Un Maſſon a fait 6 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, 8 lignes de maçonnerie à 5 liv. 9 ſols, 8 den. la toiſe : combien lui revient-il ?

Je réduis les ſix toiſes en pieds, en les multipliant par 6, parce que la toiſe vaut 6 pieds, le produit eſt 36 auquel j'ajoute les 3 pieds, ce qui fait 39 pieds. Je multiplie 39 par 12, parce que le pied vaut 12 pouces, & j'ajoute les 6 pouces au produit, ce qui donne 474 pouces; je les multiplie par 12, parce que le pouce vaut 12 lignes, j'ajoute les 8 lignes au produit, & j'ai 5696 lignes pour la valeur de 6 toiſes, 5 pieds, 6 pouces, 8 lignes.

Je réduis de même les 5 livres en ſols, en les multipliant par 20, & ajoutant les 9 ſols au produit, j'ai 109 ſols;

6		5
6		20
36		100
3		9
39	pieds	109 ſols
12		12
78		218
39		109
6		8
474	pouces	1316 deniers
12		
948		
474		
8		
5696	lignes	

je les multiplie par 12, & ajoutant les 8 deniers au produit, j'ai 1316 deniers pour la valeur de 5 livres, 9 sols, 6 deniers.

Cela fait, je multiplie 5696 lignes par 1316 deniers, le produit est 7495936; mais comme avant de faire ce produit j'ai agrandi le nombre à multiplier, en le multipliant par 6, par 12, & par 12, & le multiplicateur en le multipliant par 20, & par 12; je dois aussi diviser successivement par 6, 12, 12, 20 & 12, ou tout d'un coup par 207360, qui est le produit de ces 5 nombres les uns par les autres. Divisant donc le produit 7495936 par 207360 le quotient est 36 livres, & il reste une fraction $\frac{30976}{207360}$ que j'évaluë, en multipliant le numérateur par 20, & divisant par le dénominateur 207360, le quotient est 2 sols, & il reste une fraction $\frac{204800}{207360}$; je l'évaluë en multipliant son numérateur par 12, & divisant par le dénominateur, ce qui me donne 11 deniers & une fraction $\frac{176640}{207360}$ qui ne peut plus s'évaluer. Ainsi le total est 36 livres, 2 sols. 11 deniers $\frac{176640}{207360}$.

```
   6
  12
  --
  72
  12
  --
 144
  72
  --
 864
  20
  --
17280
  12
  --
34560
17280
  --
207360 diviseur

 5696
 1316
 ----
34176
 5696
17088
 5696
 ----
7495936 produit

207360 | 36 liv.
749593 6
--------
127513.6
--------
30976

   30976
      20
   ------
  619520
207360 | 2 sols
619520 |
-------
204800
204800
    12
------
409600
204800
------
2457600

   207360 | 11 den. 176640/207360
  2457600 |
  -------
   384000
   ------
   176640

Total 36 liv. 2 s. 11 den. 176640/207360
```

QUATRIE'ME

QUATRIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication par réduction.

Une Salle a 4 toiſes, 3 pieds, 6 pouces de largeur, ſur 8 toiſes, 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes de profondeur : on demande combien elle a de toiſes quarrées ?

Je réduis les 4 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, en pouces, ajoutant les 3 pieds aux pieds, & les 6 pouces aux pouces, & j'ai 330 pouces pour la valeur.

Je réduis de même les 8 toiſes, 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes, en lignes, ajoutant les 2 pieds aux pieds, les 4 pouces aux pouces, & les 3 lignes aux lignes, & j'ai 7251 lignes pour la profondeur.

Cela fait, je multiplie la profondeur 7251 par la largeur 330, & le produit eſt 2392830. Mais comme avant de faire ce produit j'ai agrandi la largeur 4 toiſes, en la multipliant par 6 & par 12, & la profondeur, en la multipliant par 6, 12, & 12; je dois donc diviſer ſucceſſivement par 6, 12, 6, 12 & 12, ou tout d'un coup par 62208, qui eſt le produit de ces 5 nombres les uns par les autres. Diviſant donc le produit 2392830 par 62208, le quotient eſt 38 toiſes quarrées, & il reſte une fraction $\frac{28926}{62208}$ que j'évaluë en multipliant le numérateur par 36, parce que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés; & diviſant par le dénominateur 62208, le quotient eſt 16 pieds quarrés, & il reſte une fraction $\frac{46008}{62208}$, je l'évaluë en multipliant le numérateur par 144, parce que le pied quarré contient 144 pouces quarrés, & diviſant par le dénominateur,

4	8
6	6
24	48
3	2
27 pieds	50 pieds
12	12
54	100
27	50
6	4
330 pouces	604 pouces
	12
	1208
	604
	3
	7251 lignes
	7251
	330
	217530
	21753
	2392830 produit

le quotient eſt 106 pouces quarrés, & il reſte une fraction $\frac{31104}{62208}$ que j'évalue en multipliant le numérateur par 144, parce que le pouce quarré contient 144 lignes quarrées; & diviſant par le dénominateur, le quotient eſt 72 lignes quarrées, & il ne reſte rien. Ainſi le total eſt 38 toiſes, 16 pieds, 106 pouces, 72 lignes quarrées.

Cette méthode eſt extrêmement longue & très-ſuſceptible d'erreur, à cauſe des réductions & des diviſions qu'on eſt obligé de faire avant d'en venir à une derniere réſolution; c'eſt pourquoi je préférerai la méthode ſuivante, qui joint à la briéveté beaucoup d'autres avanta-

6.
12

72
6

432
12

864
432

5184
12

10368
5184

62208 diviſeur

62208 | 23928.30 | 38 toiſes
52659.0
28926.

28926
36

173556
86778

1041336

62208 | 1041336 | 16 pieds
41925.6
46008

46008
144

184032
184032
46008

6625152

62208 | 6625152 | 106 pouces
4043.5
40435.2
31104

31104
144

124416
124416
31104

4478976

62208 | 4478976 | 72 lignes
12441.6
00000

ges, surtout lorsqu'il s'agit de multiplier des toises, pieds, pouces & lignes, par des toises, pieds, pouces & lignes : ce qu'on va voir dans les exemples suivans.

PREMIER EXEMPLE.

De la Multiplication composée par les parties aliquotes.

A 22 livres, 10 sols l'aune : combien coûteront 356 aunes?

J'écris 22 livres sous 356 aunes, & j'avance 10 sols vers la droite; ensuite je multiplie 356 par 22, à la maniere ordinaire, ce qui me donne les deux produits partiaux 712 & 712; cela fait, il me reste à multiplier par 10 sols : or j'examine que si j'avois à multiplier 356 aunes par une livre, le produit seroit 356 livres, donc n'aïant à multiplier que par 10 sols, qui est la moitié d'une livre, le produit ne doit être que la moitié de 356; je prens donc cette moitié, en disant : La moitié de 3 est $1\frac{1}{2}$, mais pour ne pas écrire $1\frac{1}{2}$, je ne prens que la moitié de deux, qui est un, & j'écris un au produit; ensuite 1 qui me reste & 5 font 15, dont la moitié est $7\frac{1}{2}$, ainsi je ne prens que la moitié de 14 qui est 7, & j'écris 7 au produit, en tirant à droite; enfin 1 qui me reste & 6 font 16, dont la moitié est 8, que j'écris au produit. Ainsi le produit de 356 aunes par 10 sols est 178 livres : ajoutant donc ensemble ce produit avec les deux partiaux que 22 m'a donnés, je trouve 8010 livres pour la valeur de 356 aunes à 22 livres 10 sols l'aune.

356 aunes	
22 liv. 10 s.	
712	
712	
178	
8010 liv.	

J'ai pris la moitié de 356, de gauche à droite, parce que prendre la moitié d'un nombre, c'est faire la même chose que si on le divisoit par 2.

Si au lieu d'avoir à multiplier par 10 sols j'avois eu à multiplier par un autre nombre de sols, depuis 1 jusqu'à 19, j'aurois examiné quelle partie ce nombre de sols auroit été à l'égard de la livre qui en contient 20, & j'aurois pris cette partie sur 356; ainsi pour 1 qui est le $\frac{1}{20}$ de la livre, j'aurois pris le $\frac{1}{20}$ de 356; pour 2 qui est le $\frac{1}{10}$, j'aurois pris le $\frac{1}{10}$; pour 4 qui est le $\frac{1}{5}$, j'aurois pris le $\frac{1}{5}$; & pour 5 qui est le $\frac{1}{4}$, j'aurois pris le $\frac{1}{4}$; mais si le nombre de sols n'avoit pas été une partie aliquote de 20 sols, c'est-à-dire, si ce nombre n'avoit pas été contenu dans 20 exactement & sans reste, j'aurois partagé ce nombre en deux ou

trois autres qui auroient été chacun partie aliquote de la livre ; par exemple, pour 3 j'aurois pris pour 2 qui eſt le $\frac{1}{10}$, & enſuite pour 1 qui eſt le $\frac{1}{20}$; pour 5 j'aurois pris pour 4 qui eſt le $\frac{1}{4}$, & pour 1 qui eſt le $\frac{1}{20}$; pour 6 j'aurois pris pour 4 qui eſt le $\frac{1}{5}$, & pour 2 qui eſt le $\frac{1}{10}$; pour 19 j'aurois pris pour 10 qui eſt le $\frac{1}{2}$, pour 4 qui eſt $\frac{1}{5}$, & pour 5 qui eſt le $\frac{1}{4}$, & ainſi des autres, ce qu'on découvre aiſément avec un peu de pratique.

SECOND EXEMPLE.

De la Multiplication compoſée par les parties aliquotes.

La livre d'outremer coûte 12 *livres* 13 *ſols : combien coûteront* 535 ℔ 8 *onces ?*

J'écris 12 livres, 13 ſols ſous 535 ℔ 8 onces, comme on voit ici ; je néglige les 8 onces, & je multiplie 535 par 12 livres, ce qui me donne les deux produits partiaux 1070, & 535 ; enſuite pour multiplier par 13 ſols qui n'eſt pas partie aliquote de 20, je coupe ce nombre en trois autres, 10 qui eſt la moitié, 2 qui eſt le $\frac{1}{10}$ & 1 qui eſt le $\frac{1}{20}$, & je dis : 535 multipliés par une livre me donneroient 535 livres, donc multipliant par 10 ſols qui eſt le $\frac{1}{2}$ d'une livre, je ne dois avoir que la moitié de 535 livres ; je dis donc : La moitié de 5, ou plutôt la moitié de 4 eſt 2, que j'écris au produit ſous 5 ; 1 qui reſte & 3 font 13 dont la moitié, ou plutôt la moitié de 12 eſt 6, que j'écris de même au produit ; 1 qui reſte & 5 font 15 dont la moitié, ou plutôt celle de 14 eſt 7 que j'écris ; enfin reſte 1, dont la moitié eſt une moitié de livre, c'eſt-à-dire 10 ſols, & j'écris 10 ſols vers la droite, un peu éloignés des livres. Ainſi le produit de 635 par 10 ſols eſt 267 livres, 10 ſols.

535 ℔	8 onces					
12 liv.	13 ſols					
1070						
535						
267 liv.	10 ſols			pour	10	
53 liv.	10 ſols			pour	2	
26 liv.	15 ſols			pour	1	
6 liv.	6 ſols	6 den.		pour	8	onces
6774 liv.	1 ſol	6 den.				

A préſent pour multiplier par 2 ſols, qui eſt le $\frac{1}{10}$ de la livre, il faut que je prenne le $\frac{1}{10}$ de 535, ou que je diviſe 535 par 10 : or nous avons vû dans les remarques ſur la diviſion, que lorſ-

qu'on diviſe un nombre par 10, le quotient contient les mêmes caractéres du nombre à diviſer, à l'exception du dernier à droite, lequel reſte & fait une fraction, dont 10 eſt le dénominateur; ainſi j'écris 53 livres au produit, en l'avançant d'un rang vers la droite, & le dernier caractére 5 faiſant $\frac{5}{10}$, chacun deſquels vaut 2 ſols, fait par conſéquent 10 ſols, que j'écris ſous les 10 ſols précédens; le produit pour 2 ſols eſt donc 53 livres 10 ſols.

Pour multiplier par 1 ſol, qui eſt le $\frac{1}{20}$ d'une livre, je dois prendre le $\frac{1}{20}$ de 535, ou bien diviſer 535 par 20: or ſelon les mêmes remarques déja citées, quand on diviſe par 20, le quotient contient la moitié de chaque caractére du dividende, à l'exception du dernier & d'une dixaine reſtante s'il en reſte, ce qui fait une fraction, dont le dénominateur eſt 20; ainſi je prens la moitié de 53 ou plutôt de 52, ce qui fait 26 que j'écris au produit, en l'avançant de même d'un rang vers la droite; enſuite la dixaine reſtante jointe au dernier caractére 5 faiſant $\frac{15}{20}$, chacun deſquels vaut 1 ſols, fait par conſéquent 15 ſols que j'écris ſous les 10 ſols précédens: donc 1 ſol donne pour produit 26 livres 15 ſols.

Enfin, pour revenir aux 8 onces que j'avois négligées, j'examine que 8 onces ſont la moitié d'une ℔, & que ſi une ℔ vaut 12 livres 13 ſols, la moitié d'une ℔ n'en doit valoir que la moitié; je prens donc la moitié de 12 qui eſt 6, que j'écris au produit, enſuite la moitié de 13 ſols, ou plutôt de 12 qui eſt 6 ſols, que j'écris ſous les ſols, & enfin la moitié du ſol reſtant qui eſt 6 deniers, que j'écris un peu éloignés en tirant à droite: le produit de 8 onces eſt donc 6 livres, 6 ſols, 6 deniers.

Ajoutant donc tous ces produits enſemble, je trouve 6774 livres, 1 ſol, 6 deniers pour la valeur de 535 ℔ 8 onces d'outremer.

TROISIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication par les parties aliquotes.

A 25 livres, 10 ſols, 6 deniers l'aune d'une certaine étoffe: combien coûteront 687 aunes?

Cette régle ne différe des deux précédentes que par la multiplication par deniers, que nous ſerons obligés de faire de la maniere dont je vais l'expliquer.

La multiplication de 687 aunes par 25 livres, me donne les deux produits partiaux 3435 & 1374.

Multipliant par 10 ſols, j'ai 343 livres, 10 ſols pour produit.

A préſent pour multiplier par 6 deniers, j'examine que ſi j'avois eu à multiplier par 2 ſols, j'aurois eu au produit les deux premiers caractéres 68 du nombre 687, & que le dernier caractére 7 valant des dixiémes, qui font chacun deux ſols, auroit dû être doublé pour faire 14 ſols; le produit par 2 ſols auroit donc été

687 aunes			
25 livres,	10 ſols,	6 deniers	
3435			
1374			
343 livres,	10 ſols		
17 livres,	3 ſols,	6 deniers	
17535 livres,	13 ſols,	6 deniers	

68 livres, 14 ſols: or 6 deniers ſont le quart de deux ſols, je dois donc avoir le $\frac{1}{4}$ de 68 livres, 14 ſols; ainſi je mets un point entre le caractére 8 & le dernier caractére 7 du nombre 687, & je dis: Le $\frac{1}{4}$ de 6 eſt 1 & reſte 2, j'écris donc 1 au produit en avançant d'un rang à droite; 2 qui reſtent & 8 font 28, dont le quart eſt 7 que j'écris auſſi au produit, il reſte 7 que je devrois doubler pour faire 14 ſols, dont je prendrois le $\frac{1}{4}$; mais pour n'être pas obligé de doubler 7, je prens la moitié de 7, ce qui revient au même; car la moitié de la moitié de 14 eſt égale au $\frac{1}{4}$ de 14: or la moitié de 7 ſols eſt 3 ſols, 6 deniers; ajoutant enſuite tous ces produits partiaux, je trouve 17535 livres, 13 ſols, 6 deniers pour la valeur de 687 aunes.

Si au lieu de multiplier par 6 deniers j'avois eu à multiplier par un autre nombre de deniers, depuis 1 juſqu'à 11 qui eſt le plus grand, j'aurois examiné quelle partie ce nombre auroit été à l'égard de 24 qui eſt la valeur de 2 ſols, & j'aurois pris cette partie ſur les deux premiers caractéres 68 du nombre 687, après quoi, ſans doubler le dernier 7, ni la dixaine reſtante s'il en étoit reſté, j'aurois pris une partie de ce reſte exprimée par une fraction, dont le dénominateur n'auroit été que la moitié du dénominateur de la fraction que j'aurois pris ſur 68; ainſi pour 1 denier qui eſt le $\frac{1}{24}$ de 2 ſols, j'aurois pris le $\frac{1}{24}$ de 68, & le $\frac{1}{12}$ de 7 joint à ce qui auroit reſté; pour 2 ſols qui eſt le $\frac{1}{12}$, j'aurois pris le $\frac{1}{12}$ de 68, & le $\frac{1}{6}$ du reſte; pour 3 qui eſt le $\frac{1}{8}$, j'aurois pris le $\frac{1}{8}$ de 68, & le $\frac{1}{4}$ du reſte; pour 4 qui eſt le $\frac{1}{6}$, j'aurois pris le $\frac{1}{6}$ de 68, & le $\frac{1}{3}$ du reſte; pour 8 qui eſt le $\frac{1}{3}$, j'aurois pris le $\frac{1}{3}$ de 68, & comme je ne puis pas prendre un dénominateur

qui ſoit la moitié de 3, j'aurois doublé le numérateur de $\frac{1}{3}$, ce qui auroit fait $\frac{2}{3}$, & j'aurois pris les $\frac{1}{3}$ du reſte; car prendre, par exemple, la $\frac{1}{2}$ d'un nombre, ou prendre les $\frac{1}{4}$ d'un nombre, c'eſt la même choſe. Que ſi le nombre des deniers n'étoit pas partie aliquote de 24, j'aurois coupé ce nombre en deux ou trois autres, chacun deſquels auroit été partie aliquote: ainſi pour 5 j'aurois pris pour 4 & pour 1, ou pour 3 & pour 2; pour 7, j'aurois pris pour 6 & 1, ou pour 4 & pour 3; pour 9 j'aurois pris pour 6 & pour 3, & ainſi des autres, ce qu'on connoîtra facilement avec un peu de pratique.

La plupart des Arithmeticiens expliquent ceci par deux ſuppoſitions qui obligent de regarder le nombre de deniers, par leſquels on multiplie, tantôt comme partie aliquote de 2 ſols ou de 24 deniers, & tantôt comme partie aliquote de 12 ou d'un ſol; mais comme ce que je viens d'enſeigner me paroît & plus ſimple & plus naturel, je n'en parlerai point, de peur de broüiller les idées dans l'eſprit des Commençans.

Pour éviter l'embarras où l'on ne manque pas de ſe trouver lorſqu'il faut prendre un $\frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{12}$, à moins qu'on n'aïe recours à la diviſion, on peut ſuppoſer qu'on aïe à multiplier par quelqu'autre partie aliquote, dont le $\frac{1}{24}$ ou le $\frac{1}{12}$ ſoit le tiers, le quart ou le ſixiéme, &c. & enſuite prendre le tiers, le quart ou le ſixiéme du produit que cette ſuppoſition aura donné.

Soit, par exemple, le nombre 5677 à multiplier par 3 livres, 5 ſols, 1 denier, je multiplie d'abord 5677 par 3 livres, & le produit eſt 17031; je multiplie enſuite par 5 qui eſt le $\frac{1}{4}$ d'une livre, & le produit eſt 1419 livres, 5 ſols.

5677				
	3 liv.	5 ſols	1 denier	
17031				
1419	liv.	5 ſols		
94	liv.	12 ſols	4 deniers	
23	liv.	13 ſols	1 denier	
18473	liv.	18 ſols	1 denier	

Cela fait, il me reſte à multiplier par 1 denier; pour cela, je conſidére que ſi j'avois à multiplier par 2 ſols j'aurois pour produit les trois premiers caractéres 567, du nombre 5677, & qu'il faudroit doubler le reſte 7 ce qui feroit 14 ſols. Or 1 denier eſt le $\frac{1}{24}$ de deux ſols, donc je dois prendre le $\frac{1}{24}$ de 567, & le $\frac{1}{12}$ du reſte; mais comme cela eſt trop embarraſſant, je ſuppoſe que j'aïe à multiplier par 4 deniers qui eſt le $\frac{1}{6}$ de 24, & dont 1 eſt le $\frac{1}{4}$; je prens donc le $\frac{1}{6}$ de 567 qui eſt 94 livres, & reſte 37 qu'il faudroit doubler pour

en prendre le $\frac{1}{6}$; mais ſans doubler ce nombre, j'en prens le $\frac{1}{3}$ qui eſt 12 ſols, 4 deniers; ainſi ſi j'avois à multiplier par 4 deniers, le produit ſeroit 94 livres, 12 ſols, 4 deniers; mais comme je n'ai à multiplier que par 1 denier, qui eſt le $\frac{1}{4}$ de 4, j'efface ce produit, & j'en prens le $\frac{1}{4}$ que j'écris au-deſſous; ce $\frac{1}{4}$ eſt 23 livres 13 ſols, 1 denier: car le $\frac{1}{4}$ de 9 eſt 2 & reſte 1, lequel ajouté à 4 fait 14; le $\frac{1}{4}$ de 14 eſt 3 & reſte 2 livres ou quarante ſols, leſquels ajoutés à 12 font 52; le $\frac{1}{4}$ de 52 eſt 13, & enfin le $\frac{1}{4}$ de 4 eſt 1; ajoutant donc tous ces produits enſemble, je trouve 18473 livres, 18 ſols, 1 denier pour le produit total.

Soit encore 3789 à multiplier par 4 livres, 4 ſols, 2 deniers, je multiplie d'abord 3789 par 4 livres, & j'ai 15156, enſuite par 4 ſols qui eſt le $\frac{1}{5}$ d'une livre, & le produit eſt 757; car le $\frac{1}{5}$ de 37 eſt 7 & reſte 2, leſquels ajoutés à 8 font 28; le $\frac{1}{5}$ de 28 eſt 5 & reſte 3, qui ajoutés à 9 font 39, dont le $\frac{1}{5}$ eſt 7 & reſte $\frac{4}{5}$ de livres, chacun deſquels valant 4 ſols, font 16 ſols.

378.9				
	4 liv.	4 ſols	2 deniers	
15156				
757	liv.	16 ſols		
94	liv.	24 ſols	6	deniers
31	liv.	11 ſols	6	deniers
15945	liv.	7 ſols	6	deniers

Enſuite pour multiplier par 2 deniers, je conſidére que ſi je multipliois par 2 ſols, j'aurois au produit les trois premiers caractéres 378 du nombre 3789, & qu'il faudroit doubler le dernier pour avoir 18 ſols: or je n'ai à multiplier que par 2 deniers qui eſt le $\frac{1}{12}$ de 2 ſols; ainſi je dois prendre le $\frac{1}{12}$ de 378, & le $\frac{1}{6}$ du reſte; mais comme cela eſt trop embarraſſant, je ſuppoſe que j'ai à multiplier par 6 deniers qui eſt le $\frac{1}{4}$ de 2 ſols, & dont 2 deniers ſont le $\frac{1}{3}$; je prens donc le $\frac{1}{4}$ de 378 qui eſt 94 livres, & reſte 29 qu'il faudroit doubler pour en prendre le $\frac{1}{4}$, mais ſans doubler 29, j'en prens la moitié qui eſt 14 ſols 6 deniers; ainſi le produit par 6 deniers ſeroit 94 livres, 14 ſols, 6 deniers; mais comme je ne dois multiplier que par 2 deniers qui eſt le $\frac{1}{3}$ de 6, j'efface ce produit & j'en prens le tiers qui eſt 31 livres, 13 ſols, 6 deniers; car le $\frac{1}{3}$ de 9 eſt 3, le $\frac{1}{3}$ de 4 eſt 1, & reſte une livre ou 20 ſols, leſquels ajoutés à 14 font 34, le $\frac{1}{3}$ de 34 eſt 13, & reſte 1 ſols ou 12 deniers, leſquels ajoutés à 6 font 18, & le $\frac{1}{3}$ de 18 eſt 6 deniers: ajoutant donc tous ces produits enſemble, le produit total eſt 15945 livres, 7 ſols, 6 deniers.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication par les parties aliquotes.

A 6 livres, 10 ſols, 6 deniers la toiſe, combien ſe montent 236 toiſes, 2 pieds, 3 pouces, 6 lignes.

Je néglige d'abord les 2 pieds, 3 pouces, 6 lignes, & je multiplie 236 toiſes par 6 livres, ce qui fait 1416; enſuite pour 10 ſols qui eſt la moitié d'une livre, je prens la moitié de 236, ce qui donne 118. Pour multiplier par 6 deniers, j'obſerve que ſi j'avois à multiplier 236 par 2 ſols, le produit ſeroit 23 livres, & le dernier caractére 6 du nombre 236 devroit être doublé pour faire 12 ſols; mais je n'ai à multiplier que par 6 deniers qui eſt le $\frac{1}{4}$ de 2 ſols, ainſi je dois prendre le $\frac{1}{4}$ de 23 livres 12 ſols; je mets donc un point entre 3 & 6, & je dis: Le $\frac{1}{4}$ de 23 eſt 5 livres, que j'écris au produit en l'avançant d'un rang à droite, & il reſte 3 qui joint à 6 font 36, & je devrois doubler 36 pour en prendre le $\frac{1}{4}$; mais ſans le doubler j'en prens la moitié qui fait 18 ſols que j'écris au quotient.

23.6 toiſes 2 pieds 3 pouces 6 lignes
6 liv. 10 ſols 6 den.

		1416						
pour 10 ſols		118						
pour 6 deniers		5 liv.	18	ſols				
pour 2 pieds		2 liv.	3	ſols	6	den.		
pour 3 pouces			5	ſols	5	den.	$\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$ ou	$\frac{6}{24}$
pour 6 lignes				ſols	10	den.	$\frac{21}{24}$	$\frac{21}{24}$
		1542 liv.	7	ſols	10	den.		$\frac{1}{24}$ ou $\frac{1}{2}$

Il me reſte les 2 pieds, 3 pouces, 6 lignes que j'ai négligés; j'obſerve donc que puiſqu'une toiſe vaut 6 livres, 10 ſols, 6 deniers, 2 pieds qui ne ſont que le $\frac{1}{3}$ d'une toiſe ne doivent produire que le $\frac{1}{3}$ de 6 livres, 10 ſols, 6 deniers; je dis donc: Le $\frac{1}{3}$ de 6 eſt 2, le $\frac{1}{3}$ de 10 ſols eſt 3, & reſte 1 ſol ou 12 deniers, leſquels ajoutés à 6 font 18, dont le $\frac{1}{3}$ eſt 6 deniers. 2 pieds donnent donc 2 livres, 3 ſols, 6 deniers; or ſi 2 pieds, qui font 24 pouces donnent cette ſomme, 3 pouces, par leſquels il faut que je multi-

plie n'étant que le $\frac{1}{8}$ de 2 pieds, ne doivent me rendre que le $\frac{1}{8}$ de 2 livres, 3 ſols, 6 deniers; je dis donc: Le $\frac{1}{8}$ de 2 n'eſt rien, mais ces 2 livres réduites en ſols font 40 ſols, leſquels ajoutés à 3 font 43; le $\frac{1}{8}$ de 43 eſt 5 ſols, & reſte 3 ſols ou 36 deniers, leſquels ajoutés à 6 font 42; le $\frac{1}{8}$ de 42 eſt encore 5, & reſte $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$. Le produit de 3 pouces eſt donc 5 ſols, 5 deniers $\frac{1}{4}$. Or puiſque 3 pouces qui font 36 lignes produiſent 5 ſols, 5 deniers $\frac{1}{4}$, 6 lignes, par leſquelles il me reſte à multiplier, n'étant que le $\frac{1}{6}$ de 36, ne doivent donner que le $\frac{1}{6}$ de 5 ſols, 5 deniers $\frac{1}{4}$, je dis donc: Le $\frac{1}{6}$ de 5 ſols ne peut pas ſe prendre, mais ces 5 ſols valent 60 deniers & 5 font 65, dont le $\frac{1}{6}$ eſt 10 deniers & reſte 5 deniers, leſquels réduits en quarts font 20 quarts & 1 font $\frac{21}{4}$; le $\frac{1}{6}$ de $\frac{21}{4}$, c'eſt-à-dire, $\frac{21}{4}$ multipliés par $\frac{1}{6}$ font $\frac{21}{24}$; ainſi le produit de 6 pouces eſt 10 deniers $\frac{21}{24}$. Je réduis $\frac{21}{24}$ & $\frac{1}{4}$ en même dénomination, en multipliant le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{1}{4}$ par 6, ce qui fait $\frac{6}{24}$; après quoi ajoutant tous ces produits enſemble, je trouve pour la valeur totale des toiſes propoſées 1542 livres, 7 ſols, 10 deniers $\frac{3}{24}$, leſquels réduits en moindre dénomination font $\frac{1}{8}$.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication par les parties aliquotes.

Une ſurface a 3 toiſes, 2 pieds de largeur ſur 4 toiſes, 3 pieds de longueur: on demande combien elle contient de toiſes quarrées?

Nous voici parvenus au calcul du toiſé que nous allons expliquer. Mais auparavant il faut ſe ſouvenir qu'une toiſe, multipliant des toiſes, produit des toiſes quarrées; que la même toiſe, multipliant des pieds, produit des pieds de toiſe quarrée; que multipliant des pouces ou des lignes, elle produit des pouces ou des lignes de toiſe quarrée. Cela ſuppoſé.

3	toiſes	2	pieds
4	toiſes	3	pieds
13	toiſes	2	
1	toiſe	4	
15	toiſes	0	

Je multiplie d'abord 3 toiſes 2 pieds par 4 toiſes, en commençant par les pieds. Quatre fois 2 pieds font 8 pieds de toiſe quarrée, c'eſt-à-dire, 1 toiſe quarrée & 2 pieds; car la toiſe quarrée contient 6 de ces pieds; j'écris donc 2 pieds ſous les pieds, & je retiens 1; 4 fois 3 toiſes font 12 toiſes quarrées, & 1 que j'ai retenu font 13 que j'écris ſous les toiſes.

Il me reſte à multiplier par 3 pieds : or ſi j'avois à multiplier par 1 toiſe quarrée ; le produit ſeroit 3 toiſes quarrées & 2 pieds ; donc aïant à multiplier par 3 pieds, qui eſt la $\frac{1}{2}$ de la toiſe, je dois avoir la moitié de ce produit ; je dis donc : La moitié de 3 eſt 1 & reſte 1 toiſe ou 6 pieds, leſquels ajoutés à 2 font 8, dont la moitié eſt 4 ; ajoutant les deux produits enſemble, le produit eſt 15 toiſes quarrées.

On voit par cet exemple, que la méthode que nous emploïons ici eſt beaucoup plus courte que celle où l'on emploïe la réduction aux deux dernieres eſpéces. L'on va voir dans le ſuivant, que cette méthode a d'ailleurs d'autres avantages qui doivent la faire préférer.

Suppoſons que nous aïons à multiplier 2 toiſes 3 pieds, par 3 toiſes 3 pieds, je dis : 3 fois 3 font 9, c'eſt-à-dire, 1 toiſe 3 pieds ; j'écris 3 & je retiens 1 ; 3 fois 2 font 6, & 1 de retenu font 7.

Pour multiplier par 3 pieds, qui eſt la $\frac{1}{2}$ d'une toiſe, je dis : La moitié de 2 eſt 1, & la moitié de 3 pieds eſt 1 pied 6 pouces de toiſe quarrée ; ajoutant enſemble ces deux produits, j'ai 8 toiſes, 4 pieds, 6 pouces de toiſe quarrée.

2 toiſes	3 pieds		
3 toiſes	3 pieds		
7 toiſes	3 pieds		
1 toiſe	1 pied	6 pouces	
8 toiſes	4 pieds	6 pouces	

Que ſi l'on vouloit ſavoir combien ces 4 pieds 6 pouces font de pieds & de pouces quarrés, ce qui n'eſt point abſolument néceſſaire, à moins qu'on ne voulût extraire la racine quarrée, comme nous dirons dans la ſuite ; on examineroit que le pouce de toiſe quarrée aïant une toiſe de longueur ; ſur un pouce de hauteur, & la toiſe courante contenant 72 pouces courans, le pouce de toiſe quarrée contient par conſéquent 72 pouces quar-

72
6
432 pouces

144 | 3 pieds quarrés
432 |
000

4
6
24
3
27 pieds quarrés

rés ; c'eſt pourquoi multipliant 6 par 72, on auroit 432 pouces quarrés, & comme le pied quarré en contient 144, diviſant par 144, le quotient donneroit 3 pieds quarrés pour la valeur de 6 pouces de toiſe quarrée.

On examineroit encore que le pied de toiſe quarrée aïant un pied de hauteur, ſur une toiſe ou 6 pieds de longueur, contient 6 pieds quarrés ; multipliant donc 4 par 6, & ajoutant au produit 24 les 3 pieds déja trouvés, on auroit 27 pieds quarrés : de ſorte que les 8 toiſes, 4 pieds, 6 pouces de toiſe quarrée ſe réduiroient à 8 toiſes, 27 pieds quarrés.

Maintenant pour faire voir en quoi conſiſte l'avantage que notre Méthode a ſur la Méthode de réduction, outre celui de la briéveté, il n'y a qu'à ſuppoſer qu'on nous propoſe de païer 8 toiſes, 4 pieds, 6 pouces de toiſes quarrées, ou 8 toiſes, 27 pieds quarrés, à raiſon, par exemple, de 3 livres la toiſe quarrée ; on voit bien que pour 4 pieds il faut prendre les $\frac{1}{3}$ de 3 livres, & que pour 6 pouces, qui ſont le $\frac{1}{8}$ de 4 pieds ou de 48 pouces, il faut prendre le $\frac{1}{8}$ des $\frac{1}{3}$; mais il n'en eſt pas de même ſi l'on veut multiplier 8 toiſes, 27 pieds par 3 ; car pour ſavoir quelle partie aliquote de la toiſe quarrée eſt 27, on ſe trouve embarraſſé ſi l'on n'a recours à la diviſion ; l'embarras devient même bien plus grand lorſqu'il y a des pouces & des lignes quarrées ; car comme le pied quarré contient 144 pouces quarrés, & le pouce quarré contient 144 lignes, il ſe trouve à tout moment de la difficulté pour ſavoir quelle partie aliquote un certain nombre de pouces, ou un certain nombre de lignes ſont à l'égard du pied ou du pouce ; ſans compter que lorſque ce nombre n'eſt pas partie aliquote, & qu'il faut le partager en deux ou trois autres, la difficulté augmente de beaucoup. Au contraire, dans notre Méthode, la toiſe quarrée ne contenant que 6 pieds, le pied ne contenant que 12 pouces, & le pouce 12 lignes, on trouve aiſément quelle partie un certain nombre de pieds, ou de pouces, ou de lignes eſt à l'égard de la toiſe, ou du pied, ou du pouce ; & quand même ce nombre ne ſeroit pas partie aliquote, on peut le partager aiſément en deux ou pluſieurs autres, ſans ſe trouver embarraſſé.

Et pour montrer que les pieds, pouces & lignes de toiſe quarrée ne ſont pas des grandeurs en idée, que l'on n'ait imaginé que pour la facilité du calcul, mais qu'au contraire elles conviennent mieux à la nature de la choſe, on n'a qu'à jetter les yeux

ſur la figure douziéme dont le côté AB repréſente les 2 toiſes, 3 pieds de la derniere régle ci-deſſus, & le côté BC repréſente les 3 toiſes, 3 pieds qui ſont le multiplicateur de la même régle ; que de tous les points de diviſion on tire des lignes au côté oppoſé : & l'on trouvera, 1°. Que l'eſpace BEFG contient 6 toiſes quarrées. 2°. Que l'eſpace ECHF contient 6 pieds de toiſe, c'eſt-à-dire 1 toiſe, laquelle ajoutée aux 6 précédentes fait 7. 3°. Que l'eſpace AGML contient encore 6 pieds ou 1 toiſe, laquelle ajoutée aux 7 que nous venons de trouver, fait 8 toiſes. 4°. Que l'eſpace MFIL contient 3 pieds de toiſe quarrée. 5°. Enfin, que l'eſpace FHDI contient 9 pieds quarrés, c'eſt-à-dire, 1 pied & demi de toiſe quarrée, ce qui ajouté aux trois précédens, fait 4 pieds & demi, ou 4 pieds 6 pouces ; & par conſéquent que la ſurface totale contient 8 toiſes, 4 pieds, 6 pouces de toiſe quarrée, ainſi que nous l'avons trouvé ci-deſſus.

Pour procurer aux Commençans la facilité de faire les opérations ſelon cette Méthode, nous ajouterons ici quelques régles ſur leſquelles ils pourront s'exercer à meſure qu'ils les liront.

Soient propoſées 36 toiſes, 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, à multiplier par 6 toiſes, 3 pieds, 4 pouces, 6 lignes.

Je multiplie d'abord 36 toiſes, 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, par 6 toiſes ; 6 fois 8 font 48 lignes, c'eſt-à-dire, 4 pouces, j'écris zero & je retiens 4 ; 6 fois 6 font 36, & 4 de retenu font 40 pouces, ou 3 pieds, 4 pouces, j'écris 4 & je retiens 3 ; 6 fois 4 font 24, & 3 de retenu font 27, c'eſt-à-dire 4 toiſes, 3 pieds, j'écris 3 pieds & je retiens 4 ; 6 fois 6 font 36, & 4 de retenu font 40, j'écris zero & je retiens 4 ; 6 fois 3 fois 18, & 4 font 22, j'écris 22.

	36 toiſes	4 pieds	6 pouces	8 lignes	
	6 toiſes	3 pieds	4 pouces	6 lignes	
	220	3	4	0	
pour 3 pieds	18	2	3	4	
pour 4 pieds	2	0	3	0	$\frac{4}{9}$
		1	6	4	$\frac{1}{9}$
	241 toiſes	1 pied	4 pouces	9 lignes	

Pour multiplier par 3 pieds, j'examine que ſi j'avois à multiplier par 1 toiſe ou 6 pieds, le produit ſeroit 36 toiſes, 4 pieds, 6

pouces, 8 lignes; donc n'aïant à multiplier que par 3 pieds, qui eſt la moitié d'une toiſe, je ne dois avoir que le $\frac{1}{2}$ de ce produit; je dis donc: La moitié de 36 eſt 18, la moitié de 4 eſt 2, la moitié de 6 eſt 3, & la moitié de 8 eſt 4.

3 pieds ou 36 pouces ont produit 18 toiſes, 2 pieds, 3 pouces, 4 lignes; donc 4 pouces par leſquels il faut que je multiplie n'étant que le $\frac{1}{9}$ de 36 ne doivent donner que le $\frac{1}{9}$ de ce produit; je dis donc: Le $\frac{1}{9}$ de 18 eſt 2, le $\frac{1}{9}$ de 2 ne peut pas ſe prendre; mais ces 2 pieds réduits en pouces valent 24, & 3 font 27; le $\frac{1}{9}$ de 27 eſt 3; le $\frac{1}{9}$ de 4 ne peut pas ſe prendre, & comme c'eſt ici la derniere eſpéce, il reſte donc $\frac{4}{9}$.

4 pouces ou 48 lignes ont produit 2 toiſes, 0 pieds, 3 pouces, 0 lignes $\frac{4}{9}$; donc 6 lignes, par leſquelles il faut que je multiplie, n'étant que le $\frac{1}{8}$ de 48 ne doivent donner que le $\frac{1}{8}$ de ce produit; je dis donc: Le $\frac{1}{8}$ de 2 ne peut pas ſe prendre, mais ces 2 toiſes font 12 pieds, dont le $\frac{1}{8}$ eſt 1 & reſte 4 pieds ou 48 pouces, auſquels ajoutant les 3 ſuivans, j'ai 51; le $\frac{1}{8}$ de 51 eſt 6, & reſte 3 pouces ou 36 lignes, dont le $\frac{1}{8}$ eſt 4 & reſte 4 lignes; je réduis ces lignes en neuviémes, ce qui fait $\frac{36}{9}$ & $\frac{4}{9}$ font $\frac{40}{9}$; le $\frac{1}{8}$ de $\frac{40}{9}$ eſt $\frac{5}{9}$.

Ajoutant enſuite tous ces produits enſemble, j'ai pour produit total 241 toiſes, 1 pied, 4 pouces, 9 lignes de toiſe quarrée.

Qu'on me propoſe de même 326 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 10 lignes à multiplier par 8 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, 11 lignes.

Je multiplie d'abord 326 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 10 lignes par 8 toiſes; 8 fois 10 font 80, c'eſt-à-dire, 6 pouces 8 lignes, j'écris 8 & je retiens 6; 8 fois 11 font 88, & 6 de retenu ſont 94 ou 7 pieds & 10 pouces, j'écris 10 & je retiens 7; 5 fois 8 font 40, & 7 font 47 ou 7 toiſes, 5 pieds, j'écris 5 & je retiens 7; multipliant enſuite 326 par 8, & ajoutant 7 au produit, j'ai 2615 toiſes.

Pour multiplier par 4 pieds qui ſont les $\frac{2}{3}$ d'une toiſe, je prens d'abord le $\frac{1}{3}$ de 326 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 10 lignes; & ce $\frac{1}{3}$ donne 108 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 11 lignes $\frac{1}{3}$; mais comme c'eſt par les $\frac{2}{3}$ que je dois multiplier, j'efface ce produit qui n'étoit qu'une ſuppoſition, & j'écris le double au-deſſous; ce double eſt 217 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 10 lignes $\frac{2}{3}$: que ſi je n'avois pas voulu effacer le produit que le $\frac{1}{3}$ avoit donné, j'aurois écrit encore une fois ce même produit par-deſſous, ce qui auroit fait également les $\frac{2}{3}$.

	326 toiſes	5 pieds	11 p.	10 lig.	
	8 toiſes	4 pieds	9 p.	11 lig.	
	2615.	5.	10.	8.	
pour 2 pieds ſupp.	108	9	11	11	$\frac{1}{3}$
pour 4 pieds	217	5	11	10	$\frac{3}{3}$ ou $\frac{288}{432}$
pour 6 pouces	27	1	5	11	$\frac{20}{24}$ ou $\frac{360}{432}$
pour 3 pouces	13	3	8	11	$\frac{22}{24}$ ou $\frac{396}{432}$
pour 6 lignes	2	1	7	5	$\frac{142}{144}$ ou $\frac{426}{432}$
pour 3 lignes	1	0	9	8	$\frac{143}{144}$ ou $\frac{429}{432}$
pour 2 lignes	0	4	6	5	$\frac{430}{432}$ ou $\frac{430}{432}$
	2879		1	3	$\frac{179}{432}$

Nota. Que les fractions qui reſtent aux produits ſuppoſés, ne ſont point barrées de même que ces produits, parce que l'Imprimeur n'a pû trouver de caractéres de fractions barrées; ainſi on prie le Lecteur de les regarder comme étant effacées dans cet exemple, de même que dans tous les autres de ce Livre où il ſe trouvera de pareilles fractions.

Pour multiplier par 9 pouces, qui ne ſont pas partie aliquote de 4 pieds ou 48 pouces, je coupe ce nombre en deux parties 6 & 3, parce que 6 eſt $\frac{1}{8}$ de 48, & que 3 étant la moitié de 6, je prendrai pour 3 la moitié du produit que 6 aura donné. Or puiſque 4 pieds donnent 217, 5 pieds, &c. 6 pouces qui en ſont le $\frac{1}{8}$ doivent donner le $\frac{1}{8}$ de ce produit; ainſi je dis: Le $\frac{1}{8}$ de 21 eſt 2 & reſte 5 qui ajouté à 7 fait 57; le $\frac{1}{8}$ de 57 eſt 7 & reſte une toiſe ou 6 pieds, qui ajoutés aux 5 ſuivans ſont 11; le $\frac{1}{8}$ de 11 eſt 1 & reſte 3 ou 36 pouces, 36 & 11 ſont 47; le $\frac{1}{8}$ de 47 eſt 5 & reſte 7 pouces ou 84 lignes, leſquelles avec les 10 ſuivantes ſont 94; le $\frac{1}{8}$ de 94 eſt 11 & reſte 6 lignes, leſquelles réduites en tiers ſont $\frac{18}{3}$ & $\frac{2}{3}$ ſont $\frac{20}{3}$; le $\frac{1}{8}$ de $\frac{20}{3}$ eſt $\frac{20}{24}$.

Pour multiplier par 3 pouces, je prens le $\frac{1}{2}$ du produit précédent, & cette moitié eſt 13 toiſes, 3 pieds, 8 pouces, 11 lignes $\frac{22}{24}$.

Pour multiplier par 11 lignes, qui ne ſont pas parties aliquotes de 3 pouces ou 36 lignes, je partage 11 en trois parties 6, 3 & 2, parce que 6 eſt le $\frac{1}{6}$ de 36, & que 3 étant la moitié de 6,

& 2 le $\frac{1}{3}$, je prendrai enſuite la moitié & le $\frac{1}{3}$ du produit que 6 aura donné : or puiſque 6 lignes eſt le $\frac{1}{6}$ de 3 pouces, je prens le $\frac{1}{6}$ du produit que 3 pouces ont donné ; ce $\frac{1}{6}$ eſt 2 toiſes, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes $\frac{252}{144}$. Je prens enſuite le $\frac{1}{2}$ de ce produit, puis le $\frac{1}{3}$, comme on voit ci-deſſus, & ajoutant tous ces produits, la ſomme me donne le produit total.

Avant de calculer le produit total, il faut auparavant réduire toutes les fractions au même dénominateur ; mais ſans avoir recours aux régles que nous avons données ci-deſſus pour cela, j'examine que la fraction $\frac{1}{3}$ peut avoir le dénominateur des deux ſuivantes en multipliant ſon numérateur & ſon dénominateur par 8, ce que l'opération même de la régle me fait découvrir ; de même que ces 3 fractions qui auront 24 pour dénominateur, pourront avoir 144 en multipliant leur numérateur & leur dénominateur par 6 ; & enfin, que toutes ces fractions qui auront 144 pour dénominateur, pourront avoir le dénominateur 432 en multipliant leur numérateur & leur dénominateur par 3 ; ainſi je multiplie le numérateur & le dénominateur de $\frac{1}{3}$ ſucceſſivement par 8, 6 & 3, ou tout d'un coup par 144, ce qui me donne $\frac{288}{432}$; je multiplie les fractions qui ont 24 au dénominateur, par 6 & 3, c'eſt-à-dire par 18, ce qui me donne $\frac{360}{432}$, $\frac{324}{432}$; enfin, je multiplie les numérateurs & les dénominateurs des fractions qui ont 144 par 5, ce qui me donne $\frac{426}{432}$ & $\frac{429}{432}$, & tout eſt réduit en même dénomination. On pourra toujours faire les mêmes obſervations dans toutes les régles ſemblables à celles-ci, & abréger beaucoup par-là les réductions des fractions.

Soit encore 536 toiſes, 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes à multiplier par 234 toiſes, 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes.

Comme il ſeroit trop embarraſſant de multiplier les 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes du nombre à multiplier par 234 toiſes du multiplicateur, je néglige ces 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes, & je multiplie 536 par 234, ce qui me donne les trois produits partiaux, tels qu'on les voit ci-après.

Enſuite je multiplie 536 par les 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes du multiplicateur, & pour cela je partage 5 pieds en deux parties aliquotes de la toiſe, c'eſt-à-dire 3 & 2, dont l'une eſt la moitié, & l'autre le $\frac{1}{3}$. Or en multipliant par une toiſe, j'aurois 536 de produit, donc en multipliant par 3 & puis par 2, je dois avoir le $\frac{1}{2}$, puis le $\frac{1}{3}$ de 536.

Je partage de même 7 pouces en 2 parties, 6 & 1, dont l'une

eſt

eſt le $\frac{1}{4}$ de 2 pieds, & l'autre eſt le $\frac{1}{6}$ de 6 pouces ; ainſi 2 pieds m'aïant produit 178 toiſes, 4 pieds ; 6 pouces me produiront le $\frac{1}{4}$ de ce produit, & 1 pouce me donnera enſuite le $\frac{1}{6}$ de ce $\frac{1}{4}$.

536 toiſ. 5 pieds 7 pou. 7 lig.
234 toiſ. 5 pieds 7 pou. 7 lig.

2144
1608
1072

pour 3 pieds	268							
pour 2 pieds	178	toiſ.	4	pieds				
pour 6 pouc.	44	toiſ.	4	pieds				
pour 1 pouc.	7	toiſ.	2	pieds	8	pou.		
pour 6 lignes	3	toiſ.	4	pieds	4	pou.		
pour 1 ligne	0	toiſ.	3	pieds	8	pou.	8 lig.	
pour 3 pieds	117	toiſ.	2	pieds	9	pou.	9 lig. $\frac{1}{2}$	ou $\frac{432}{864}$
pour 2 pieds	78	toiſ.	1	pied	10	pou.	6 lig. $\frac{1}{3}$	ou $\frac{288}{864}$
pour 6 pouc.	19	toiſ.	3	pieds	5	pou.	7 lig. $\frac{7}{12}$	ou $\frac{104}{864}$
pour 1 pouc.	3	toiſ.	1	pied	6	pou.	11 lig. $\frac{19}{72}$	ou $\frac{228}{864}$
pour 6 lignes	1	toiſ.	3	pieds	9	pou.	5 lig. $\frac{91}{144}$	ou $\frac{546}{864}$
pour 1 ligne	0	toiſ.	1	pied	7	pou.	6 lig. $\frac{811}{864}$	ou $\frac{811}{864}$

126147 3. 10. 7. $\frac{217}{864}$

Je partage de même 7 lignes en 2 parties, 6 & 1, dont l'une eſt le $\frac{1}{2}$ d'un pouce, & l'autre eſt le $\frac{1}{6}$ de 6 lignes ; ainſi 1 pouce aïant produit 7 toiſes, 2 pieds, 8 pouces, je prens le $\frac{1}{2}$ de ce produit pour 6 lignes, puis le $\frac{1}{6}$ du produit de ces lignes.

Il me reſte les 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes du nombre à multiplier, que j'avois d'abord négligé ; pour cela j'obſerve que ſi le nombre à multiplier étoit une toiſe, le produit par 234 toiſes, 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes ſeroit 234 toiſes, 5 pieds, 7 pouces, 7 lignes ; mais au lieu d'une toiſe, j'ai 5 pieds, ou 3 pieds & 2 pieds ; ainſi 3 pieds me doivent produire la moitié de ce produit, & 2 pieds me doivent rendre le $\frac{1}{3}$.

J'ai encore 7 pouces que je partage en deux parties, 6 & 1,

dont l'une eſt le $\frac{1}{4}$ de 2 pieds ; ainſi puiſque 2 pieds ont donné 78 toiſes, 1 pied, 10 pouces, &c. 6 pouces m'en donneront le $\frac{1}{4}$, & 1 pouce me rendra le $\frac{1}{6}$ de ce quart.

Enfin je partage 7 lignes que j'ai encore, en deux parties, 6 & 1, dont l'une eſt la moitié d'un pouce ; je prens la moitié du produit qu'un pouce m'a donné, & enſuite le $\frac{1}{6}$ de cette $\frac{1}{2}$ pour 1 ligne.

Toutes les opérations que nous avons faites dans ce cinquiéme exemple, contiennent des toiſes, pieds, pouces & lignes, au nombre à multiplier & au multiplicateur ; mais s'il n'y avoit que des pieds, pouces & lignes dans l'une ou l'autre de ces dimenſions, ou dans toutes les deux à la fois, ou encore ſi l'une n'aïant que des pieds, pouces & lignes, l'autre n'avoit que des pouces & lignes, ou ſimplement des lignes ; voici de quelle maniere on pourroit opérer.

Suppoſons 3 pieds, 6 pouces, 8 lignes à multiplier par 2 pieds, 4 pouces, 6 lignes.

		0	toiſ.	3	pieds	6	pou.	8	lig.
		0		2	pieds	4	pou.	6	lig.
pour 2	pieds	0		1	pied	2	pou.	2	lig. $\frac{1}{3}$
pour 4	pou.	0		0		2		4	$\frac{1}{18}$ ou $\frac{4}{9}$
pour 6	lig.	0		0		0		3	$\frac{1}{9}$
		0	toiſ.	1	pied	4	pou.	10	lig. $\frac{1}{3}$

J'écris ces deux dimenſions l'une ſous l'autre, mettant des zeros à la place des toiſes ; enſuite je fais réfléxion que ſi j'avois à multiplier 3 pieds, 6 pouces, 8 lignes par une toiſe, le produit ſeroit 3 pieds, 6 pouces, 8 lignes ; donc 2 pieds qui ſont le $\frac{1}{3}$ d'une toiſe ne rendront que le $\frac{1}{3}$ de ce produit, & ce $\frac{1}{3}$ eſt 1 pied, 2 pouces, 2 lignes $\frac{1}{3}$.

De même 4 pouces n'étant que le $\frac{1}{6}$ de 2 pieds, ne doivent me donner que le $\frac{1}{6}$ de ce que 2 pieds ont produit, & ce $\frac{1}{6}$ eſt 2 pouces, 4 lignes $\frac{4}{9}$; enfin 6 lignes n'étant que le $\frac{1}{2}$ de 4 pouces, ne doivent me rendre que le $\frac{1}{2}$ de leur produit, & ce $\frac{1}{2}$ eſt 5 lignes $\frac{1}{9}$: je ne réduis point les trois fractions au même dénominateur, parce que je m'aperçois que $\frac{4}{9}$ & $\frac{1}{9}$ font un entier que je tranſporterai aux lignes, & qu'il reſtera la fraction $\frac{1}{3}$.

Suppoſons encore 4 pieds, 10 pouces, 11 lignes à multiplier par 9 pouces, 8 lignes.

Je n'ai ici que des pouces & des lignes au multiplicateur ; mais pour me tirer d'embarras, je ſuppoſe un nombre de pieds dont 9 pouces ſoient partie aliquote, comme par exemple 3, & je dis ; Puiſque ſi j'avois à multiplier par une toiſe, le produit ſeroit 4 pieds ; 10 pouces, 11 lignes ; ſi je ne multiplie que par 3 pieds, le produit ſera 2 pieds, 5 pouces, 5 lignes $\frac{1}{2}$; mais comme ce n'eſt ici qu'une ſuppoſition, je l'efface, & j'en prens le $\frac{1}{4}$, parce que j'ai à multiplier par 9 pouces, qui ſont le $\frac{1}{4}$ de 3 pieds.

		0 toiſ.	4 pieds	10 pouc.	11 lig.			
		0 toiſ.	0 pied	9 pouc.	8 lig.			
pour	3 pieds ſupp.	0 toiſ.	2 pieds	5 pouc.	5 lig.	$\frac{1}{2}$		
pour	9 pouces.	0 toiſ.	0 pied	7 pouc.	4 lig.	$\frac{3}{8}$	ou	$\frac{81}{216}$
pour	3 pouc. ſupp.	0 toiſ.	0 pied	2 pouc.	5 lig.	$\frac{11}{24}$		
pour	4 lignes	0 toiſ.	0 pied	0 pouc.	3 lig.	$\frac{19}{216}$	ou	$\frac{19}{216}$
pour	4 lignes	0 toiſ.	0 pied	0 pouc.	3 lig.	$\frac{19}{216}$	ou	$\frac{19}{216}$
		0 toiſ.	0 pied	7 pouc.	10 lig.			$\frac{199}{216}$

Enſuite pour multiplier par 8 lignes, j'examine que 9 pouces ſont 108 lignes, dont 8 lignes ne ſont pas parties aliquotes, c'eſt pourquoi je ſuppoſe de nouveau que j'ai à multiplier par 3 pouces, dont 8 lignes ſont les $\frac{2}{9}$. Or 9 pouces aïant produit 7 pouces, 4 lignes $\frac{3}{8}$, 3 pouces doivent m'en produire le $\frac{1}{3}$, & ce $\frac{1}{3}$ eſt 2 pouces, 5 lignes $\frac{11}{24}$; mais comme ce n'eſt ici qu'une ſuppoſition, j'efface ce produit & j'en prens le $\frac{1}{9}$ pour 4 lignes ; ce $\frac{1}{9}$ eſt 3 lignes $\frac{19}{216}$, que j'écris deux fois, parce que j'ai à multiplier par 8 lignes ; ainſi le produit total eſt 7 pouces, 10 lignes $\frac{199}{216}$.

		0 toiſ.	5 pieds	7 pouc.	8 lignes			
		0 toiſ.	0 pied	0 pouc.	9 lignes			
pour	3 pieds ſupp.	0 toiſ.	2 pieds	5 pouc.	10 lignes			
pour	6 pou. ſupp.	0 toiſ.	0 pied	2 pouc.	7 lignes	$\frac{4}{6}$	ou	$\frac{2}{3}$
					8 lignes			$\frac{11}{24}$
		0 toiſ.	0 pied	0 pouc.	8 lignes			$\frac{11}{24}$

Suppoſons enfin 5 pieds, 7 pouces, 8 lignes à multiplier par 9 lignes, je n'ai ici que des lignes au multiplicateur ; mais je ſup-

pose d'abord que j'ai à multiplier par 3 pieds, ce qui me donne 2 pieds, 9 pouces, 10 lignes que j'efface, parce que c'est une supposition ; je suppose encore que j'aie à multiplier par 6 pouces, qui sont le $\frac{1}{6}$ de 3 pieds, & dont 9 lignes sont le $\frac{1}{8}$, c'est pourquoi je prens le $\frac{1}{6}$ du produit que trois pieds m'ont donné, & ce $\frac{1}{6}$ est 5 pouces, 7 lignes $\frac{1}{3}$; mais comme c'est encore un produit supposé, je l'efface & j'en prens le $\frac{1}{8}$, parce que 9 lignes par lesquelles j'ai à multiplier sont le $\frac{1}{8}$ de 6 pouces ou 72 lignes, ce $\frac{1}{8}$ est 8 lignes $\frac{11}{24}$, & c'est le produit demandé.

On va voir dans l'exemple suivant de quelle maniere se fait la multiplication des toises, pieds & pouces lorsqu'il y a trois dimensions, c'est-à-dire, longueur, largeur & profondeur ; mais auparavant il faut se rappeller ce que nous avons dit ci-dessus, que si une toise courante multiplie des toises quarrées, elle produit des toises cubiques ; & que si elle multiplie des pieds, pouces & lignes de toise quarrée, elle produit des pieds, pouces & lignes de toise cube.

SIXIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication composée par les parties aliquotes.

On a fait dans un Port de mer une jettée qui a 625 toises, 3 pieds, 6 pouces de longueur, 35 toises, 2 pieds, 9 pouces de largeur, & 22 toises, 3 pieds, 7 pouces de profondeur ; & comme l'on est convenu de paier à tant la toise cubique, on demande combien cette jettée contient de cette espéce de toise ?

Je multiplie d'abord la longueur par la largeur, en négligeant les 3 pieds 6 pouces de la longueur ; ainsi 625 toises par 35 toises, me donnent les deux produits partiaux qu'on voit ici.

Pour les 2 pieds, je prens le $\frac{1}{3}$ de 625, à cause que 2 pieds sont le $\frac{1}{3}$ d'une toise.

Quant aux 9 pouces, je les partage en deux parties 6 & 3, dont la premiere est le $\frac{1}{6}$ de 3 pieds, & l'autre est la $\frac{1}{2}$ de 6 pouces ; ainsi pour 6 pouces, je prens le $\frac{1}{6}$ du produit que 3 pieds m'ont rendu, & pour 3 pouces, je prens la moitié de ce $\frac{1}{6}$.

Il me reste les 3 pieds, 6 pouces de la longueur que j'avois négligés ; pour cela je considere que si j'avois une toise à multiplier par 35 toises, 2 pieds, 9 pouces, le produit feroit 35 toises, 2 pieds, 9 pouces ; donc aiant à multiplier par 3 pieds, qui est le $\frac{1}{2}$ de la toise, je dois avoir la moitié de ce produit ; je prens donc

cette moitié, & comme 6 pouces ſont le $\frac{1}{6}$ de 3 pieds, je prens auſſi le $\frac{1}{6}$ de cette moitié : ajoutant tous ces produits, j'ai 22182 toiſes, 0 pied, 10 pouces, 3 lignes, qui eſt la ſurface ou le plan de la jettée.

longueur	625	toiſ.	3	pieds	6	pou.			
largeur	35	toiſ.	2	pieds	9	pou.			
	3125								
	1875								
pour 2 pieds	208	toiſ.	2	pieds					
pour 6 pouces	52	toiſ.	0	pied	6	pou.			
pour 3 pouces	26	toiſ.	0	pied	3	pou.			
pour 3 pieds	17	toiſ.	4	pieds	4	pou.	6	lig.	
pour 6 pouces	2	toiſ.	5	pieds	8	pou.	9	lig.	
ſurface ou plan	22182	toiſ.	0	pied	10	pou.	3	lig.	
	22	toiſ.	3	pieds	7	pou.			
	44364								
	44364								
pour 3 pieds	11091	toiſ.							
pour 6 pouces	1848	toiſ.	3	pieds					
pour 1 pouce	308	toiſ.	0	pied	6	pou.			
pour 3 pieds ſuppoſés	22	toiſ.	2	pied	9	pou.	8	lig.	
pour 9 pouces	2	toiſ.	4	pieds	11	pou.	4	lig. $\frac{1}{2}$	ou $\frac{36}{72}$
pour 1 pouce			1	pied	10	pou.	7	lig. $\frac{3}{18}$	ou $\frac{12}{72}$
pour 3 lignes			0	pied	5	pou.	7	lig. $\frac{57}{72}$	ou $\frac{57}{72}$
ſolidité	501254	toiſ.	4	pieds	9	pou.	7	lig.	$\frac{33}{72}$

Pour avoir ſa ſolidité je multiplie cette ſurface par la profondeur 22 toiſes, 3 pieds, 7 pouces, en négligeant d'abord les pieds, pouces & lignes de la ſurface ; ainſi les toiſes de la ſurface multipliées par 22 me donnent les deux produits qu'on voit ici. Pour 3 pieds, je prens le $\frac{1}{2}$ des toiſes de la ſurface ; je partage enſuite 7 pouces en deux nombres 6 & 1, dont le premier eſt le $\frac{1}{6}$ de 3 pieds, & l'autre eſt le $\frac{1}{6}$ de 6 pouces ; ainſi je prens le $\frac{1}{6}$ du produit que 3 pieds m'ont donné, & enſuite le $\frac{1}{6}$ de ce ſixiéme.

Il me reſte les 10 pouces, 3 lignes de la ſurface que j'avois négligés, & comme je n'ai point de pieds, je ſuppoſe le produit de 3 pieds, ce qui donne la moitié du multiplicateur ; enſuite je partage 10 pouces en deux parties 9 & 1, dont la premiere eſt le

$\frac{1}{4}$ de 3 pieds, & l'autre eſt le $\frac{1}{9}$ de 9 pouces; ainſi je prens le $\frac{1}{4}$ du produit que la ſuppoſition de 3 pieds m'a donné, & enſuite le $\frac{1}{9}$ de ce $\frac{1}{4}$; enfin pour 3 lignes qui ſont le $\frac{1}{4}$ d'un pouce, je prens le $\frac{1}{4}$ du produit par un pouce. Ajoutant tous ces produits enſemble, je trouve pour la ſolidité ou pour le nombre de toiſes cubiques contenuës dans cette jettée, la ſomme de 501254 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, 7 lignes $\frac{33}{72}$.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

De la Multiplication compoſée par les parties aliquotes.

Une piéce de bois a 5 toiſes, 3 pieds, 6 pouces de longueur, 1 pied 9 pouces, 9 lignes de largeur, & 1 pied, 6 pouces, 6 lignes d'épaiſſeur: on demande combien elle contient de ſolives?

La queſtion propoſée dans cet exemple, concerne le toiſé des bois de charpente, lequel eſt bien différent du toiſé ordinaire que nous avons expliqué dans les exemples précédens. Il faut donc ſavoir qu'à l'égard des bois on ſe ſert d'une meſure qu'on appelle *ſolive*, & qui contient 3 pieds cubiques. Sa longueur eſt de 6 pieds, ſa largeur de 12 pouces & ſon épaiſſeur de 6 pouces, ce qui fait 3 pieds cubiques; car en multipliant 6 pieds par 12 pouces ou 1 pied, on a 6 pieds quarrés, leſquels multipliés par 6 pouces ou par $\frac{1}{2}$ pied, font en effet 3 pieds cubes. Voïez la figure treiziéme ABCDE, dont la ligne AB repréſente la longueur de la ſolive, la ligne AD la largeur, & la ligne DE l'épaiſſeur; la largeur & l'épaiſſeur s'appellent *l'équarriſſage* ou *les dimenſions de l'équarriſſage*.

6 pieds	
1 pieds ou 12 pouces	
6	
0 pied 6 pouces	
3 pieds cubiques	

Si l'on diviſe la petite dimenſion de l'équarriſſage, c'eſt-à-dire, l'épaiſſeur de la ſolive repréſentée par la ligne DE en ſix parties égales, & qu'on coupe la ſolive dans toute ſa longueur ſelon ces 6 diviſions, la ſolive ſe trouvera partagée en 6 parties égales qu'on appelle *pieds de ſolive*. La figure quatorziéme repréſente un de ces pieds; diviſant de même la petite dimenſion de l'équariſſage d'un pied de ſolive en 12 parties égales, & coupant le pied ſelon ces diviſions, on le partagera en 12 parties égales, qui s'appellent *pouces de ſolive*, & le pouce ſe diviſera de même en 12 lignes de ſolive.

Nous avons dit plus haut que la toiſe cubique contient 216 pieds cubes; diviſant donc 216 par 3 pieds, qui eſt la valeur de

la ſolive, le quotient 72 fera voir que la toiſe cubique vaut 72 ſolives, ou qu'elle eſt 72 fois plus grande qu'une ſolive. Or comme la toiſe cubique contient 6 pieds de toiſe cubique, le pied de toiſe cubique 12 pouces de toiſe cubique, le pouce 12 lignes de toiſe cubique; de même que la ſolive contient 6 pieds de ſolive, le pied 12 pouces de ſolive, & le pouce 12 lignes de ſolive; il s'enſuit que les pieds, pouces, & lignes de toiſe cubique ſont auſſi 72 fois plus grands que les pieds, pouces, & lignes de ſolive.

3	
216	72 ſolives
6	
0	

Cela ſuppoſé, il eſt évident que dans ces ſortes de queſtions on n'a qu'à faire le calcul des toiſes, pieds & pouces à l'ordinaire, & multiplier enſuite le produit total par 72, ce qui donnera des *ſolives*.

longueur	5	toiſes	3	pieds	6	pou.		
largeur	0	toiſe	1	pied	9	pou.	9	lig.
pour 1 pied	0	toiſe	5	pieds	7	pou.		
pour 6 pouces			2	pieds	9	pou.	6	lig.
pour 3 pouces			1	pied	4	pou.	9	lig.
pour 6 lignes			0	pied	2	pou.	9	lig. $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$
pour 3 lignes					1	pou.	4	lig. $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4}$
	1	toiſe	4	pieds	1	pou.	5	lig. $\frac{1}{4}$
épaiſſeur	0	toiſe	1	pied	6	pou.	6	lig.
pour 1 pied			1	pied	8	pou.	2	lig. $\frac{21}{24}$ ou $\frac{7}{8}$ ou $\frac{168}{192}$
pour 6 pouces					10	pou.	1	lig. $\frac{7}{16}$ ou $\frac{84}{192}$
pour 3 pouc. ſup.					8	pou.	0	lig. $\frac{21}{192}$
pour 6 lignes					0	pou.	10	lig. $\frac{21}{192}$ ou $\frac{25}{192}$
ſolidité	0	toiſe	2	pieds	7	pou.	2	lig. $\frac{81}{192}$
	72							
pour 2 pieds	24							
pour 6 pouces	6							
pour 1 pouce	1							
pour 2 lignes	0	ſolid.	1	pied				
pour $\frac{81}{192}$					2	pou.	7	lig. $\frac{1}{8}$
	31	ſolid.	1	pied	2	pou.	7	lig. $\frac{1}{8}$

Ainſi pour revenir à la queſtion propoſée, je multiplie la lon-

gueur par la largeur, en prenant d'abord pour 1 pied, qui eſt le $\frac{5}{6}$ de la toiſe, le $\frac{1}{6}$ de la longueur; je partage enſuite 9 en deux parties 6 & 3, dont l'une eſt la moitié d'un pied, & l'autre eſt la moitié de 6 pouces, & je prens le $\frac{1}{2}$ du produit d'un pied, & enſuite la $\frac{1}{2}$ de cette moitié. Je partage de même 9 lignes en 2 parties 6 & 3, dont l'une eſt le $\frac{1}{6}$ de 3 pouces, & l'autre eſt la moitié de 6 lignes; ainſi je prens le $\frac{1}{6}$ du produit de 3 pouces, puis la moitié de ce $\frac{1}{6}$, & ajoutant tous ces produits, j'ai 1 toiſe, 4 pieds, 1 pouce, 5 lignes, $\frac{1}{4}$ que je vais multiplier par 1 pied, 6 pouces, 6 lignes, qui eſt l'épaiſſeur.

Pour 1 pied, je prens le $\frac{1}{6}$ de 1 toiſe, 4 pieds, 1 pouce, 5 lignes $\frac{1}{4}$.

Pour 6 pouces, je prens le $\frac{1}{2}$ de ce produit; enſuite comme 6 lignes ſont le $\frac{1}{12}$ de 6 pouces, & que ce $\frac{1}{12}$ ſeroit trop embarraſſant à prendre, je ſuppoſe que j'ai à multiplier pour 3 pouces, qui eſt le $\frac{1}{2}$ de 6 pouces, & dont 6 lignes ſont le $\frac{1}{6}$; je prens donc le $\frac{1}{2}$ du produit de 6 pouces, mais comme cette moitié n'eſt qu'une ſuppoſition, je l'efface, & j'en prens le $\frac{1}{6}$; ajoutant enſuite tous ces produits, j'ai 2 pieds, 7 pouces, 2 lignes, $\frac{31}{192}$ pour la ſolidité.

Maintenant pour réduire cette ſolidité en ſolives, je la multiplie par 72, prenant pour 2 pieds le $\frac{1}{3}$ de 72; pour 7 pouces, c'eſt-à-dire, pour 6 & pour 1, le $\frac{1}{4}$ du produit de 2 pieds, & enſuite le $\frac{1}{6}$ de ce quart, & pour 2 lignes le $\frac{1}{6}$ du produit d'un pouce. Quant à la fraction, je multiplie le numérateur par 72, & diviſant le produit par 192, le quotient me donne 31 lignes $\frac{24}{192}$ ou $\frac{1}{8}$, c'eſt-à-dire, 2 pouces, 7 lignes $\frac{1}{8}$; ajoutant enſemble tous ces produits, j'ai 31 ſolives, 1 pied, 2 pouces, 7 lignes, $\frac{1}{8}$.

On peut toujours agir de la même façon dans toutes les queſtions qui concernent le toiſé des bois; mais pour abréger, & éviter en même-tems la multiplication des fractions, on a trouvé une autre méthode plus commode, qui néanmoins dépend toujours des mêmes principes, comme on va voir.

Pour me ſervir de la même queſtion que je viens de réſoudre, je prens une des deux dimenſions de l'équarriſſage 1 pied, 6 pouces, 6 lignes, je la réduis en pouces, ce qui fait 18 pouces, 6 lignes; je mets les 18 pouces au rang des toiſes, ce qui ne peut ſe faire ſans que ces pouces ne deviennent 72 fois plus grands qu'ils n'étoient, puiſque la toiſe contenant 72 pouces, eſt par conſéquent 72 fois plus grande que le pouce.

Quant

Quant aux 6 lignes, je ne puis les mettre au rang des pieds ſans qu'elles ne deviennent 144 fois plus grandes qu'elles ne ſont, puiſque le pied contient 12 pouces, & le pouce 12 lignes. Pour faire donc que ces lignes ne deviennent que 72 fois plus grandes qu'elles n'étoient, je n'en écris que la moitié, c'eſt-à-dire 3; ainſi ces 3 lignes miſes au rang des pieds ne ſont plus grandes à l'égard de 6 lignes, que la moitié de 144 fois, c'eſt-à-dire 72 fois. Voilà donc la dimenſion, 1 pied, 6 pouces, 6 lignes multipliés par 72.

	18 toiſes	3 pieds			
	0 toiſes	1 pied	9 pouces	9 lignes	
pour 1 pied	3	0	6		
pour 6 pouces	1	3	3		
pour 3 pouces	0	4	7	6	
pour 6 lignes	0	0	9	3	
pour 3 lignes			4	7	$\frac{1}{2}$
	5	3	6	4	$\frac{1}{2}$
	5 toiſes	3 pieds	6 pouces		
	27	5	7	10	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{4}{8}$
	2	4	9	2	$\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{8}$
	0	2	9	6	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{3}{8}$
	31 ſolid.	1	2	7 lignes	$\frac{1}{8}$

Je multiplie cette dimenſion par l'autre dimenſion de l'équariſſage, c'eſt-à-dire par 1 pied, 9 pouces, 9 lignes, prenant pour 1 pied le $\frac{1}{6}$ de 18 toiſes, 3 pieds, pour 9 pouces ou pour 6 pouces & pour 3, la moitié du produit d'un pied, puis la $\frac{1}{2}$ de cette moitié; pour 9 lignes ou pour 6 & pour 3, le $\frac{1}{6}$ du produit de 3 pouces, & enfin la $\frac{1}{2}$ de ce $\frac{1}{6}$; & ajoutant tous ces produits enſemble; je trouve 5, 3, 6, 4, $\frac{1}{2}$, que je dois multiplier par la longueur 5 toiſes, 3 pieds, 6 pouces.

Je multiplie donc le tout, d'abord par 5 toiſes; enſuite pour 3 pieds je prens le $\frac{1}{2}$ de 5, 3, 6, 4, $\frac{1}{2}$, & pour 6 pouces le $\frac{1}{6}$ du produit de 3 pieds; & ajoutant tous ces produits enſemble, je trouve 31 ſolives, 1 pied, 2 pouces, 7 lignes, $\frac{1}{8}$, comme ci-deſſus. On voit bien que ce produit doit être des ſolives; car la pre-

miere dimenſion étant devenuë 72 fois plus grande qu'elle n'étoit, tous les produits qui ont été faits en conſéquence ſont auſſi devenus 72 fois plus grands qu'ils n'auroient dû l'être, & par conſéquent le produit total doit être des ſolives, qui ſont 72 fois plus petites que les toiſes.

Suppoſons de nouveau une piéce de bois de 7 toiſes, 2 pieds, 6 pouces, 8 lignes de longueur, ſur 1 pied, 4 pouces, 10 lignes de largeur, & 5 pouces, 10 lignes d'épaiſſeur, à réduire en ſolives.

	5 toiſes	5 pieds			
		1 pied	4 pouc.	10 lignes	
pour 1 pied		5	10		
pour 4 pouc.		1	11	4	
pour 8 lignes		0,	3	10	$\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$
pour 2 lignes			0	11	$\frac{2}{3}$
	1	2	2	2	$\frac{1}{3}$
	7 toiſes	2 pieds	6	8 lignes	
pour 7 toiſes	9	3	3	4	$\frac{1}{3}$ ou $\frac{108}{324}$
pour 2 pieds	0	2	8	8	$\frac{7}{9}$ ou $\frac{252}{324}$
pour 6 pouc.			8	2	$\frac{7}{36}$ ou $\frac{63}{324}$
				10	$\frac{295}{324}$ ou $\frac{295}{324}$

10 ſolid. 0 pieds 9 pouc. 2 lignes $\frac{70}{324}$

Je prens l'épaiſſeur 5 pouces, 10 lignes, & je mets 5 pouces au rang des toiſes, & la moitié de 10 lignes, c'eſt-à-dire, 5 lignes au rang des pieds; ainſi cette dimenſion devient 72 fois plus grande qu'elle n'étoit.

Je multiplie cette dimenſion ainſi agrandie, par la largeur 1 pied, 4 pouces, 10 lignes; prenant pour 1 pied le $\frac{1}{6}$ de 5 toiſes, 5 pieds; pour 4 pouces, le $\frac{1}{3}$ du produit d'un pied; & pour 10 lignes ou pour 8 & pour 2, le $\frac{1}{6}$ du produit de 4 pouces, puis le $\frac{3}{4}$ de ce $\frac{1}{4}$. Ajoutant tous les produits enſemble, j'ai 1, 2, 2, 2, $\frac{1}{3}$, que je dois multiplier par la longueur 7 toiſes, 2 pieds, 6 pouces, 8 lignes.

Je multiplie d'abord le tout par 7 toiſes; enſuite pour 2 pieds, je prens le $\frac{1}{3}$ de 1, 2, 2, &c. pour 6 pouces le $\frac{1}{4}$ du produit de 2 pieds,

& pour 8 lignes le $\frac{1}{9}$ du produit de 6 pouces. Ajoutant enſuite tous ces produits enſemble, j'ai 10 ſolives, 0 pied, 9 pouces, 2 lignes, $\frac{70}{324}$, & c'eſt la valeur en ſolives de la piéce de bois.

Ceci eſt ſuffiſamment expliqué par les queſtions que nous venons de réſoudre ; mais j'ajouterai, pour ſatisfaire la curioſité de ceux qui ne ſont pas inſtruits de ce qui regarde le bois de charpente, qu'ordinairement on le vend à piéces longues & équarrées, ainſi que je l'ai dit ci-deſſus ; ce qui fait qu'on appelle ces piéces *bois équarré* ou *refait* & *ſans flaches*, c'eſt-à-dire, ſans être émouſſé par les bouts.

Quand l'une & l'autre des deux dimenſions de l'équarriſſage ſont plus grandes que de ſix pouces, le bois s'appelle *équarré* ; quand elles ſont moindres, on l'appelle *bois de ſciage* s'il a été équarré avec la ſcie, & *bois de brin* s'il a été équarré avec la hache ; enfin, lorſque les dimenſions de l'équarriſſage ſont inégales, le bois s'appelle *mi-plat* ou à *deux faces*.

Comme le *bois de brin*, aïant été équarré avec la hache, n'eſt pas également épais par les deux bouts, il faut avant de le toiſer, ajouter les deux équarriſſages enſemble, c'eſt-à-dire, la largeur à la largeur, & l'épaiſſeur à l'épaiſſeur, & prendre la moitié de leur ſomme pour en faire un équarriſſage moïen, que l'on multipliera enſuite par la longueur.

On appelle *bois en grume* un arbre que l'on vend avec toute ſon écorce & ſans être équarré. Ce bois ſe meſure de même que celui de charpente, c'eſt-à-dire, qu'on meſure d'abord ſa longueur avec une toiſe ou un cordeau ; enſuite on prend ſa groſſeur ou ſon diametre vers le milieu, parce qu'un arbre eſt toujours plus menu par le haut que par le bas, & l'on donne la valeur de ce diametre à chacune des dimenſions de l'équarriſſage ; ainſi ſi le diametre étoit 1 pied, 3 pouces, les deux dimenſions de l'équarriſſage auroient chacune 1 pied, 3 pouces ; après quoi on feroit le calcul comme nous l'avons enſeigné ci-deſſus.

De la Diviſion compoſée.

XXVII. Lorſqu'il s'agit de faire une diviſion compoſée, ou le dividende & le diviſeur ſe trouvent compoſés d'eſpéces différentes, ou c'eſt le diviſeur ſeul qui eſt compoſé, ou c'eſt le dividende ſeul. Dans les deux premiers cas, le plus court eſt de réduire tout aux dernieres eſpéces, en obſervant ce que nous dirons

ci-dessous; mais dans le troisiéme on peut se passer de cette réduction.

PREMIER EXEMPLE.

De la Division composée.

Une Troupe composée de soixante-quatre personnes a fait un butin qui se monte à 46752 livres, 8 sols, 6 deniers: on demande combien il revient à chacun?

Comme il n'y a ici que le dividende qui soit composé d'espéces différentes, je néglige d'abord les 8 sols, 6 deniers qu'il contient, & je divise 46752 par 64, le quotient est 730 liv. & il reste une fraction $\frac{32}{64}$ que j'évaluë en multipliant le numérateur 32 par 20, parce que la livre contient 20 sols, ce qui me donne 640 sols, ausquels j'ajoute les 8 sols que j'avois négligés, & j'ai 648 sols que je divise par 64; le quotient est 10 sols, & il reste une fraction $\frac{8}{64}$ que j'évaluë en multipliant 8 par 12 pour en faire des deniers, & j'ajoute au produit 96 les 6 deniers que j'avois négligés, ce qui fait 102 deniers; je divise 102 par 64, le quotient est 1 denier, & il reste une fraction $\frac{38}{64}$ ou $\frac{19}{32}$ que je ne puis plus évaluer, parce que les deniers sont la derniere espéce. Ainsi la part qu'il revient à chacune des personnes qui ont fait le butin est 730 liv. 10 s. 1 den. $\frac{19}{32}$.

64 | 46752 | 730 liv.
19.5
3.2
32

64 | 648 | 10 sols.
0.8

64 | 102 | 1 denier
38

32
20
640
8
648

8
12
96
6
102

quotient 730 liv. 10 sols 1 den. $\frac{38}{64}$ ou $\frac{19}{32}$

SECOND EXEMPLE.

De la Division composée.

232 ℔ 6 onces d'une certaine drogue ont coûté 3246 livres, 9 sols, 8 deniers: on demande combien coûte la livre?

232 ℔ 6 onces
16

1392
232
6

3718 onces
240

148720
74436

diviseur 892320

3246 livres 9 sols 8 deniers
20

64920
9

64929 | 12
12 | 20

129858 sols | 240 den.
64929
8

779156 deniers
16

4674936
779156

dividende 12466496

Si je savois la valeur de la livre, je n'aurois qu'à multiplier 232 ℔ 6 onces par cette valeur, & le produit seroit 3246 livres, 9 sols, 8 deniers; donc je n'ai qu'à diviser 3246 livres, 9 sols, 8 deniers par 232 ℔ 6 onces, & j'aurai la valeur qu'on me demande. Mais avant de faire cette division, je réduis d'abord le dividende & le diviseur à leur derniere espéce; ainsi 232 ℔ 6 onces valent 3718 onces, & 3246 livres, 9 sols, 8 deniers se réduisent à 779156 deniers; mais comme pour réduire le dividende en deniers, je l'ai multiplié par 20 & par 12, c'est-à-dire, par 240; au lieu que le diviseur, pour être réduit en onces, n'a été multiplié que par 16, le quotient de la division deviendroit beaucoup

892320 | 13 livres
12466496

354329.6

866336

866336
20

17326720

8923 20 | 19 sols
17326720

840352.0

372640

372640
12

745280
372640

4471680

plus grand qu'il ne faut ; c'eſt pourquoi je multiplie le dividende 779156 deniers par 16, & le diviſeur 3718 par 240, & par ce moïen le dividende & le diviſeur ſe trouvant également multipliés, le quotient deviendra le même que ſi on ne les avoit point multipliés du tout. Diviſant donc 12466496 par 892320, le quotient donne 13 livres & une fraction $\frac{866336}{892320}$ que j'évaluë en multipliant le numérateur par 20 ; & diviſant par le dénominateur, cette ſeconde diviſion donne 19 ſols & une fraction $\frac{372640}{892320}$ que j'évaluë ; en multipliant le numérateur par 12, & diviſant par le dénominateur, le quotient de cette troiſiéme diviſion eſt 5 deniers, & une fraction $\frac{10080}{892320}$ qui ne peut plus s'évaluer, mais qui réduite en moindre dénomination donne $\frac{21}{1859}$; ainſi la valeur de la livre eſt 13 livres, 19 ſols, 5 deniers, $\frac{21}{1859}$.

892320 | 4471680 | 5 deniers

10080

valeur de la livre 13 l. 19 ſ. 5 den. $\frac{21}{1859}$.

TROISIE'ME EXEMPLE.

De la Diviſion compoſée.

336 toiſes, 4 pieds, 6 pouces, 10 lignes de Maçonnerie ont coûté 2356 livres, 10 ſols, 6 deniers : on demande quel eſt le prix de la toiſe ?

Pour faire cette diviſion, je réduis le nombre à diviſer 2356 livres, 10 ſols, 6 deniers en deniers, ce qui me donne 565566 deniers ; je réduis auſſi le diviſeur 336 toiſes, 4 pieds, 6 pouces, 10 lignes en lignes, & j'ai 290962 lignes.

Mais comme le diviſeur & le dividende ſe trouvent inégalement multipliés par ces réductions, ce qui feroit que le quotient deviendroit autre qu'il ne doit être, je fais enſorte que l'un & l'autre ſoit également multiplié, en multipliant les lignes par 20, parce que les livres ont été multipliées par 20, & les livres par 6 & par 12, c'eſt-à-dire par 72, parce que les toiſes ont été multipliées par 6 & par 12 ; ainſi tout eſt bien, car l'autre multiplication par 12, que j'ai faite ſur les toiſes, ſe trouve compenſée par la multiplication par 12 que j'ai faite ſur les livres.

Je diviſe donc le dividende 40720752 par le diviſeur 4819240, & évaluant les fractions à la maniere ordinaire, je trouve que la valeur de la toiſe eſt 6 livres, 19 ſols, 11 deniers, $\frac{61913}{145481}$.

336 toiſes 4 pieds 6 pouces 10 lignes

6

2016

4

2020 pieds

12

4040
2020

6

24246 pouces

12

48492
24246

10

290962 lignes

20

2356 livres 10 ſols 6 deniers.

20

47120

10

47130 ſols

12

94260
47130

6

565566 deniers.

72

1131132
3958962

40720752 dividende.

diviſeur 4819240

5819240 | 40720752 | 6 livres

5805312

5805312

20

116106240

5819240 | 116106240 | 19 ſols.

5791384.0

5540680.

5540680

12

11081360
5540680

66488160

5819240 | 66488160 | 11 deniers.

829576.0

2476520

valeur de la toiſe 6 livres 19 ſols 11 deniers $\frac{2476520}{5819240}$ ou $\frac{61913}{145481}$

QUATRIE'ME EXEMPLE.

De la Diviſion compoſée.

476 aunes $\frac{2}{3}$ d'étoffes ont coûté 17236 livres, 10 ſols, 6 deniers : à combien ſe monte l'aune ?

Pour faire cette diviſion, je réduis le dividende 17236 livres, 10 ſols, 6 deniers en deniers, & j'ai 4136766 deniers ; je réduis auſſi le diviſeur 476 aunes $\frac{2}{3}$ en tiers, & j'ai 1430 tiers d'aunes. Enſuite, pour faire que l'un & l'autre ſoient multipliés également, je multiplie les deniers par trois, parce que les aunes ont été multipliées par trois ; & je multiplie les tiers d'aunes par 240, parce que les livres ont été multipliées par 20 & par 12, ce qui fait 240.

476 aunes $\frac{2}{3}$ — 17236 livres 10 ſols 6 deniers

3 — 20

1428 — 344720

2 — 10

1430 tiers d'aunes. — 344730 ſols

240 — 12

57200 — 689460

2860 — 344730

343200 diviſeur — 6

4136766 deniers

3

12410298 dividende

343200 | 36 livres

1241029.8

211429.8

55098

55098

20

1101960

343200 | 3 ſols

1101960

72360

72360

12

144720

72360

868320

343200

343200
868320 2 deniers

181920

valeur de l'aune 36 livres 3 ſols 2 deniers $\frac{181920}{343200}$ ou $\frac{379}{715}$

Diviſant enſuite à l'ordinaire, & évaluant les fractions, je trouve que la valeur de l'aune eſt 36 livres, 3 ſols, 2 deniers, $\frac{379}{715}$.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

De la Diviſion compoſée.

Un Champ contient 3672 toiſes quarrées, 4 pieds, 8 pouces de toiſe quarrée; & ſa largeur eſt de 32 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes : on veut ſavoir quelle eſt ſa longueur ?

Je réduis le dividende 3672 toiſes, 4 pieds, 6 pouces en pouces, ce qui fait 264440 pouces; je réduis auſſi le diviſeur 32 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes en lignes, & j'ai 28158 lignes; & comme le dividende n'a pas été réduit en lignes de même que le diviſeur, je multiplie 264440 pouces par 12, ce qui donne pour le dividende 3173280.

3672 toiſes 4 pieds 8 pouc.	32 toiſes 3 pieds 6 pouc. 6 lig.
6	6
22032	192
4	3
22036 pieds	195 pieds
12	12
44072	390
22036	195
8	6
264440 pouces	2346 pouces
12	12
528880	4692
264440	23466
3173280 dividende	28158 lignes diviſeur

Diviſant enſuite à l'ordinaire, & évaluant les fractions, je trouve que la longueur de ce Champ eſt de 112 toiſes, 4 pieds, 2 pouces, & une fraction de pouces qui ne peut donner des lignes, puiſqu'en multipliant ſon numérateur par 12, elle donne un produit moindre que le dividende; c'eſt pourquoi j'ai zero de lignes & une fraction de lignes $\frac{23776}{28158}$, laquelle réduite au moindre dénominateur vaut $\frac{11888}{14079}$.

28158
3173280 | 112 toiſes
3574.8
7590.0
19584

28158
117504 | 4 pieds
4872

28158
58464 | 2 pouces.
2148

19584
6
117504

4872
12
9744
4872
58464

2148
12
2296
2148
23776

$\frac{23776}{28158}$ fraction de lignes.

Longueur 112 toiſ. 4 pieds 2 pouc. 0 ligne $\frac{11888}{14079}$

Si les pieds, pouces & lignes qui ſuivent les toiſes quarrées étoient des pieds, pouces & lignes quarrées, il faudroit les réduire auparavant en pieds, pouces & lignes de toiſe quarrée, comme nous avons déja dit ailleurs; & pour cela, il faudroit ſe reſſouvenir que le pied de toiſe quarrée aïant un pied de hauteur, & une toiſe ou 6 pieds de longueur, contient par conſéquent 6 pieds quarrés; de même qu'un pouce de toiſe quarrée aïant un pouce de hauteur, & une toiſe ou 72 pouces de longueur, contient 72 pouces quarrés; & enfin, qu'une ligne de toiſe quarrée aïant une ligne de hauteur & une toiſe ou 864 lignes de longueur, contient 864 lignes quarrées.

Ainſi ſuppoſant que nous aïions 472 toiſes quarrées, 28 pieds, 98 pouces, & 110 lignes quarrées à diviſer par 32 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes, je réduis d'abord les 28 pieds quarrés en pieds de toiſe quarrée, en les diviſant par 6, parce qu'un pied de toiſe contient 6 pieds quarrés; le quotient eſt 4, & il reſte 4 pieds quarrés que je réduis en pouces quarrés, en les multipliant par

144, parce que le pied quarré contient 144 pouces quarrés ; le produit eſt 576, auquel ajoutant les 98 pouces, la ſomme eſt 674 que je diviſe par 72, parce que le pouce de toiſe quarrée vaut 72 pouces quarrés ; le quotient eſt 9, & il reſte 26 pouces quarrés que je réduis en lignes quarrées, en les multipliant par 144, parce que le pouce quarré vaut 144 lignes quarrées ; j'ajoute au produit les 110 lignes quarrées du dividende, & la ſomme eſt 3854, que je diviſe par 864, parce que la ligne de toiſe quarrée contient 864 lignes quarrées ; le quotient eſt 4 lignes, & il reſte une fraction $\frac{328}{864}$, qui, réduite au moindre dénominateur, eſt $\frac{199}{432}$. Ainſi le dividende 472 toiſes, 28 pieds, 98 pouces, 110 lignes quarrées, ſe trouve réduit à 472 toiſes, 4 pieds, 9 pouces, 4 lignes $\frac{199}{432}$ de toiſe quarrée.

A préſent, pour faire la diviſion, je réduis le dividende en pieds, pouces & lignes, & j'ai 408496 lignes ; & comme il y a une fraction, je multiplie ces lignes par le dénominateur 432, & ajoutant au produit le numérateur 199, j'ai pour dividende 176470471 ; je réduis auſſi le diviſeur en lignes, & j'ai 28158 lignes que je multiplie encore par 432, à cauſe que le dividende a été multiplié par 432, & j'ai pour diviſeur 12164256 ; faiſant enſuite la diviſion à l'ordinaire, & évaluant les fractions, le quotient me donne 14 toiſes, 3 pieds ; après quoi évaluant la fraction, je trouve qu'elle ne donne point de pouces ; c'eſt pourquoi évaluant encore pour avoir des lignes, je trouve 6 lignes & une fraction $\frac{3702240}{12164256}$.

6
28 | 4 pieds de toiſ. quar.
4

144
4
576
98
674 pou. quar.

72
674 | 9 pouces
26

144
26
864
288
110
3854 lig. quarrées

864
3854 | 4 lignes
398

472 toiſ. 4 pieds 9 po. 4 lig. $\frac{192}{432}$

6

2832

4

2836 pieds

12

5672

2836

9

34041 pouces

12

68082

34041

4

408496 lignes

432

816992

1225488

1633984

199

176470471 dividende

32 toiſ. 3 p. 6 p. 61.

6

192

3

195 pieds

12

390

195

6

2346 pouces

12

4692

2346

6

28158 lignes

432

56316

84474

112632

12164256 diviſeur

12164256 | 14 toiſes

176470471

5482791.1

6170887

6170887

6

37025322

12164256 | 3 pieds		532554
37025322		12
532554		1065108
		532554
		6390648
12164256 | 6 lignes		12
76687776		12781296
3702240		6390648
		76687776

quotient total 14 toiſes 3 pieds 0 pouces 6 lignes $\frac{3702240}{12164256}$.

De toutes les manieres dont on peut faire la diviſion compoſée, je n'en trouve point de plus commode que celle que je viens d'enſeigner, attendu qu'en obſervant de multiplier également le dividende & le diviſeur, on eſt toujours sûr que le premier quotient donnera le plus haute eſpéce du dividende, c'eſt-à-dire des toiſes, ſi ce ſont des toiſes; des livres, ſi ce ſont des livres, &c. au lieu qu'en faiſant autrement, on eſt ſouvent embarraſſé pour ſavoir quelle ſera l'eſpéce que le premier quotient doit donner.

Fin de la premiere Partie.

L'ARITHMETIQUE DES GÉOMÉTRES.

SECONDE PARTIE.

Des autres Opérations de l'Arithmetique.

De la Régle de trois ou de proportion, vulgairement dite Régle d'or.

I. ON appelle *régle de trois* ou *de proportion*, une opération par laquelle trois nombres étant donnés, on en cherche un quatriéme qui ſoit au troiſiéme comme le ſecond eſt au premier; c'eſt-à-dire, que ſi le ſecond contient le premier, ou eſt contenu dans lui 2 fois, 3 fois, 4 fois, &c. le quatriéme doit contenir le troiſiéme, ou être contenu dans lui de la même façon. Le vulgaire a donné à cette régle le nom de *régle d'or*, à cauſe que ſon uſage eſt extrêmement étendu.

Pour faire cette opération, on a coutume de multiplier le ſecond nombre par le troiſiéme, & de diviſer enſuite le produit par le premier. Voici quelle en eſt la raiſon.

Suppoſons les trois nombres 2, 12, 6, & qu'il faille trouver un quatriéme nombre qui ſoit au troiſiéme 6, comme le ſecond

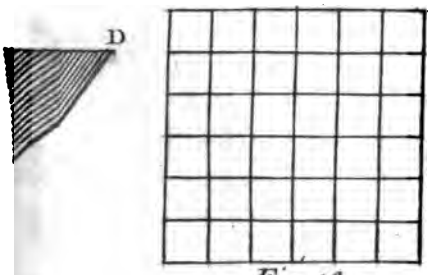
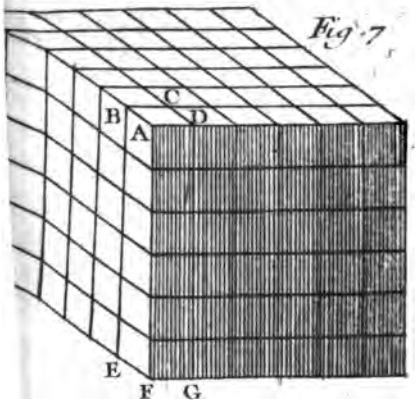
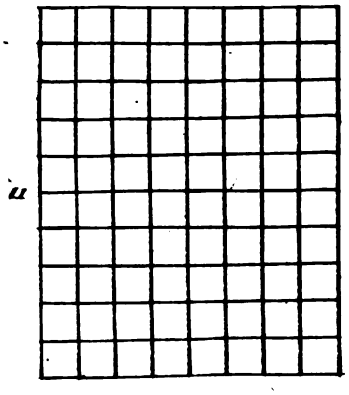


Fig. 4e

Fig. 7





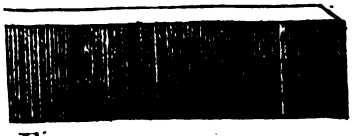


Fig. 14.

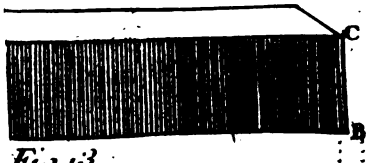


Fig. 13.

12 eſt au premier 2 ; comme le premier eſt plus petit que le ſecond, il eſt évident que pour ſavoir combien ce premier eſt contenu dans le ſecond, il faut diviſer 12 par 2, & le quotient 6 fait voir que le ſecond eſt 6 fois plus grand que le premier ; ainſi, puiſque le quatriéme doit être 6 fois plus grand que le troiſiéme, je n'ai qu'à multiplier le troiſiéme 6 par 6, & le produit 36 ſera le nombre cherché. D'où l'on voit que lorſque le ſecond eſt plus grand que le premier, il faudroit diviſer le ſecond par le premier, & enſuite multiplier le quotient par le troiſiéme. Or c'eſt la même choſe de multiplier d'abord le ſecond par le troiſiéme, & puis diviſer par le premier ; car 6 fois 12 font 72, leſquels diviſés par 2 donnent également 36 : donc la régle preſcrit juſtement ce qu'il faut opérer.

Suppoſons à préſent que les trois nombres ſoient 12, 2, 36, auquel cas le premier eſt plus grand que le ſecond. Il eſt encore évident que pour ſavoir ce que le ſecond eſt au premier, il faut diviſer 12 par 2, & que le quotient 6 marque que 2 eſt 6 fois plus petit que 12 ; ainſi puiſque le quatriéme doit être 6 fois plus petit que 36, je n'aurois qu'à diviſer 36 par 6, & le quotient 6 donneroit le nombre cherché. Or on fait la même choſe en multipliant 36 par 2 & puis diviſant par 12, puiſque 2 fois 36 font 72, leſquels diviſés par 12 donnent également 6 ; ainſi la régle preſcrit encore ici ce qu'il faut opérer. Que ſi on commence d'abord par la multiplication, & non par la diviſion, c'eſt que par-là on évite de multiplier des fractions, qui, la plupart du tems ſe trouvent après la diviſion.

Toutes les fois que quatre nombres ſont en proportion, c'eſt-à-dire, que le premier eſt au ſecond comme le troiſiéme eſt au quatriéme, ſi l'on compare le premier au troiſiéme & le ſecond au quatriéme, on trouvera qu'ils ſont encore en proportion. Soient par exemple, les quatre nombres 2, 4, 6, 12, dont le premier eſt au ſecond comme le troiſiéme au quatriéme, ſi vous comparez 2 & 6, 4 & 12, vous trouverez que ces quatre nombres 2, 6, 4, 12 ſont encore en proportion ; car 2 eſt 3 fois dans 6, comme 4 eſt 3 fois dans 12. Or c'eſt de cette facon qu'on conſidére ordinairement la proportion des quatre termes de la régle de trois, parce qu'on met au premier & au troiſiéme rang deux nombres de même eſpéce, & au ſecond & quatriéme deux autres nombres d'une autre eſpéce. Quand on dit, par exemple, 6 hommes ont gagné 30 écus, combien 8 hommes en gagneront-ils ? Voilà une

régle de trois ou de proportion, & vous voïez que deux nombres d'une même eſpéce, c'eſt-à-dire les nombres d'hommes, ſont mis l'un au premier, & l'autre au troiſiéme rang, & les deux autres d'une autre eſpéce ſont mis au ſecond & au quatriéme.

La régle de trois, de la maniere dont je viens de l'expliquer, s'appelle *régle de trois directe*, pour la diſtinguer d'une autre qu'on appelle *régle de trois indirecte* ou *inverſe*, à cauſe que la proportion des termes ſe conſidére d'une façon toute oppoſée à celle-ci, ainſi que nous le dirons plus bas.

D'où il ſuit que pour juger ſi une queſtion propoſée appartient à la régle de trois *directe*, il faut néceſſairement obſerver ſi ce qu'on propoſe eſt de telle nature que le premier terme étant plus petit que le troiſiéme, le ſecond doive être auſſi moindre que le quatriéme dans la même proportion; car, ſi cela eſt, l'on peut en toute ſûreté opérer comme nous avons dit ci-deſſus, & comme on verra mieux dans les exemples ſuivans.

PREMIER EXEMPLE.

235 aunes d'étoffe ont coûté 6789 livres : combien 312 coûteront-elles ?

Selon qu'on me propoſe la queſtion, je m'apperçois que 312 aunes étant plus grandes que 235, le prix que je cherche doit auſſi être plus grand que 6789; ainſi la régle eſt directe, & pour la réſoudre je range d'abord les trois nombres comme on les voit ici.

235 aunes 6789 livres 312 aunes

312

13578
6789
20367

2118168

235 | 2118168 | 9013 livres

031
316

81.8

113

113
20

2260

235 | 2260 | 9 ſols

145

145
12
290
145
1740

235 | 7 deniers
1740
95

Réponſe 9013 livres 9 ſols 7 deniers $\frac{21}{235}$ ou $\frac{12}{47}$

Enſuite je multiplie le ſecond par le troiſiéme, & je diviſe le produit par le premier 235 ; & le quotient & les fractions évaluées donnent 9013 livres, 9 ſols, 7 deniers $\frac{12}{47}$ pour le prix de 312 aunes.

SECOND EXEMPLE.

On a planté 1566 arbres dans une Avenuë de 522 toiſes de longueur : combien en faudra-t-il planter pour une Avenuë de 950 toiſes ?

Dans cette queſtion, je vois que ſi pour 522 toiſes il a fallu 1566, il en faudra certainement davantage pour 950 toiſes ; & comme 950 toiſes ſont plus grandes que 522, ainſi le nombre que je cherche doit être plus grand que 1566 ; donc la régle eſt droite.

522. 1566.
950
78300
14094
1487700

950. Réponſe 2850

522
1487700 | 2850
4437
2610
0000
0

Je range donc au premier terme 522 toiſes, au ſecond 1566, & au troiſiéme 950 ; après quoi je multiplie 1566 par 950, & je diviſe le produit 1487700 par 522, ce qui me donne 2850, qui eſt le nombre d'arbres demandé.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un homme dépenſe en 20 jours 536 livres : combien doit-il dépenſer à proportion dans le courant d'une année ?

L'année a 365 jours, ainſi 20 jours ſont à 536 livres comme 365 au nombre que je cherche, & la régle eſt droite ; car le troi-

ſiéme terme étant plus grand que le premier, le quatriéme doit être auſſi plus grand que le ſecond.

Je multiplie donc 536 livres par 365 jours, & diviſant le produit 195640 par 20, le quotient 9782 marque que cet homme doit dépenſer par année 8782 livres.

20. 536. 365 Réponſe 9782 livres

365

2680
3216
1608

195640

20 | 195640 | 9782 livres

15.6

16.4

4.0

0

QUATRIE'ME EXEMPLE.

350 livres mis à intérêt pour une année, ont produit 17 livres, 10 ſols : combien produiront 6758 livres ?

Comme 6758 livres ſont plus grandes que 350, ainſi l'intérêt que je cherche doit être plus grand que 17 livres, 10 ſols : donc la régle eſt droite.

Ainſi je multiplie 6758 livres par 17 livres, 10 ſols ; & diviſant le produit 118263 par 350 livres, le premier quotient eſt 337 livres & une fraction, laquelle étant évaluée me donne 18 ſ. par conſéquent l'intérêt que je cherche eſt 337 livres, 18 ſols.

350 liv. 17 liv. 10 ſ. 6758 liv. R. 337 liv. 18 ſols

17 liv. 10 ſols

350
118 265 | 337 livres

132.6

276.5

315

47306
6758
3379

118265

350
63 00 | 18 ſols

280.0

000

315
20

6300

CINQUIE'ME EXEMPLE.

8 aunes $\frac{2}{3}$ d'étoffe ont coûté 56 livres, 6 ſols, 8 deniers : combien coûteront 15 aunes $\frac{3}{4}$ au même prix ?

Le prix de 15 aunes $\frac{3}{4}$ doit certainement être plus grand que celui de 8 aunes $\frac{2}{3}$, & par conſéquent la régle eſt droite.

Je multiplie donc 56 livres, 6 ſols, 8 deniers par 15 aunes $\frac{3}{4}$, & le produit eſt 887 livres, 5 ſols qu'il faut diviſer par 8 aunes $\frac{2}{3}$; c'eſt pourquoi je réduis les 887 livres, 5 ſols en ſols, ce qui me donne 17745 ſols; & je réduis auſſi les 8 aunes $\frac{2}{3}$ en tiers, ce qui me donne 26 tiers; mais comme le dividende & le diviſeur ne ſe trouvent pas multipliez également, je multiplie encore 26 tiers par 20, parce que les livres ont été multipliées par 20; & je multiplie auſſi 17745 ſols par 3, parce que les aunes ont été multipliées par 3; ainſi le premier quotient me donnera des livres.

Je diviſe donc

8 aunes $\frac{2}{3}$ — 3 — 24 — 2 — 26 tiers

56 liv. 6 ſ. 8 d. 15 $\frac{3}{4}$ — 15 $\frac{3}{4}$ — 280 — 56 — 3 liv. — 1 liv. 10 ſols — 0 liv. 10 ſols — 14 liv. 1 ſol 8 den. — 14 liv. 1 ſol 8 den. — 14 liv. 1 ſol 8 den.

887 liv. 5 0 — 20 — 17740 — 5 — 17745 ſols — 3 — 53235 dividende

26 tiers — 20 — 520 diviſeur

520 | 53235 | 102 livres — 123.5 — 195

195 — 20 — 3900

520 | 3900 | 7 ſols — 260

260 — 12 — 520 — 260 — 3120

520 | 3120 | 6 deniers — 000

Réponſe 102 livres 7 ſols 6 deniers.

53235 par 520, & évaluant les fractions, je trouve 102 livres, 7 sols, 6 deniers pour la valeur de 15 aunes $\frac{3}{4}$.

SIXIE'ME EXEMPLE.

48 hommes ont fait 288 toiſes d'ouvrages en un jour : on demande combien en feront 76 hommes ?

Le nombre de 76 hommes étant plus grand que celui de 48 hommes, celui des toiſes qu'ils feront ſera auſſi plus grand que 288 ; ainſi la régle eſt droite.

Je multiplie donc 288 par 76, & diviſant le produit 21888 par 48, le quotient 456 me fait voir que 76 hommes feront en un jour 456 toiſes.

48. 288. 76. Réponſe 456 toiſes

76

1728
2016

21888

48 | 21888 | 456

268
288

00

On ſera peut-être étonné de voir multiplier 288 toiſes par 76 hommes ; car quel produit peuvent donner des hommes multipliant des toiſes ? mais il faut prendre garde qu'on fait ici abſtraction de ce que les nombres peuvent ſignifier, & qu'on n'a égard qu'à la proportion qu'ils peuvent avoir entr'eux.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

Le baſſin d'une Fontaine a trois ouvertures ; par la premiere toute l'eau, dont le baſſin eſt rempli, s'écoule en trois heures ; par la ſeconde en cinq heures, & par la troiſiéme en ſept heures : on veut ſavoir en combien de tems s'écouleroit toute l'eau, ſi les trois ouvertures étoient ouvertes à la fois ?

La façon dont cette queſtion eſt énoncée pourroit embarraſſer ceux qui ne ſont pas au fait du calcul, attendu qu'on ne ſait d'abord par quelle régle il faut la réſoudre ; cependant avec un peu d'attention, il eſt facile de connoître que c'eſt une régle de trois droite, comme je vais le faire voir.

Si par la premiere ouverture toute l'eau s'écoule en 3 heures, donc il faut que dans une heure il ne s'en écoule qu'un $\frac{1}{3}$; de mê-

me ſi par la ſeconde toute l'eau s'écoule en 5 heures, donc dans une heure il s'en écoule un $\frac{1}{5}$, & par la même raiſon il s'en écoulera dans une heure $\frac{1}{7}$ par la troiſiéme ouverture.

Je réduis ces trois fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ en même dénomination, & les ajoutant enſemble leur ſomme eſt $\frac{71}{105}$; & je dis: Si $\frac{71}{105}$ de l'eau s'écoule dans une heure par les trois ouvertures, toute l'eau qui eſt 1 ou $\frac{105}{105}$, en combien de tems s'écoulera-t-elle? ce qui, comme l'on voit, eſt une régle de trois directe, puiſque $\frac{105}{105}$ étant plus grand que $\frac{71}{105}$, il faut néceſſairement que le tems que l'on cherche ſoit plus grand qu'une heure.

35	21	15	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	ſomme $\frac{71}{105}$

105

Je multiplie donc $\frac{105}{105}$ par 1, & le produit eſt encore $\frac{105}{105}$, lequel diviſé par $\frac{71}{105}$ donne au premier quotient 1 heure, & une fraction que j'évaluë en multipliant ſon numérateur par 60, parce que l'heure contient 60 minutes; diviſant enſuite par 71, le quotient eſt 28 minutes, & j'ai une nouvelle fraction que j'évaluë encore en multipliant de nouveau ſon numérateur par 60, parce que chaque minute contient 60 ſecondes; le quotient eſt 43 ſecondes, & il reſte une fraction que je pourrois évaluer en tierces, mais cela eſt inutile, d'autant plus que $\frac{67}{71}$ eſt à peu de choſe près la valeur d'une ſeconde. Ainſi toute l'eau du baſſin s'écouleroit par les trois ouvertures en 1 heure, 28 minutes, 43 ſecondes, $\frac{67}{71}$; ou ſi l'on veut en 1 heure, 28 minutes, 44 ſecondes.

$\frac{71}{105}$. 1. $\frac{105}{105}$. Réponſe 1. h. 28 m. 43 ſ. $\frac{67}{71}$

71 | 1 heure
105
34

34
60
2040

71 | 28 minutes
2040
620
52

52
60
3120

71 | 43
3120
280
67

HUITIE'ME EXEMPLE.

Une Fontaine a quatre tuïaux, dont le premier remplit ſeul le baſſin en ſix heures; le ſecond en huit heures; le troiſiéme en neuf heures, & le quatriéme en douze heures. Le baſſin a quatre ouvertures, dont la premiere laiſſe écouler l'eau en deux heures; la ſeconde en trois heures; la troiſiéme en quatre, & l'autre en ſix heures: l'on veut ſavoir en combien de tems toute l'eau s'écouleroit ſi on ouvroit tout à la fois les quatre tuïaux, & les quatre ouvertures?

Pour réſoudre cette queſtion, j'éxamine que le premier tuïau, dans une heure, ne doit donner qu'un $\frac{1}{6}$ de toute l'eau qui remplit le baſſin; que le ſecond n'en doit donner qu'un $\frac{1}{8}$; le troiſiéme $\frac{1}{9}$, & le quatriéme $\frac{1}{12}$.

Je réduis ces fractions au même dénominateur; mais comme les régles ordinaires donneroient un trop grand dénominateur, je prens le plus petit nombre qui puiſſe être diviſé exactement par les quatre dénominateurs 6, 8, 9, 12, & ce nombre eſt 72; [nous enſeignerons dans la ſuite la maniere de trouver ce nombre.] Ainſi je mets 72 à la place du dénominateur commun; je prens le $\frac{1}{6}$ de 72, qui eſt 12, & je le mets à la place du numérateur de la fraction $\frac{1}{6}$; je prens de même le $\frac{1}{8}$ de 72, qui eſt 9, & je le mets à la place du numérateur de la fraction $\frac{1}{8}$; je prens le $\frac{1}{9}$ de 72, qui eſt 8, & je le mets à la place du numérateur de la fraction $\frac{1}{9}$; enfin prenant le $\frac{1}{12}$ de 72, qui eſt 6, je le mets à la place du numérateur de la fraction $\frac{1}{12}$. J'ajoute toutes ces fractions enſemble, & la ſomme $\frac{35}{72}$ me fait voir que les quatre tuïaux donnent dans une heure le $\frac{35}{72}$ de l'eau qui remplit le baſſin.

12	9	8	6	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	ſomme $\frac{35}{72}$
72				

J'éxamine encore que la premiere ouverture du baſſin ne doit laiſſer écouler dans une heure que la $\frac{1}{2}$ de l'eau dont le baſſin ſeroit rempli; le ſecond $\frac{1}{3}$; le troiſiéme $\frac{1}{4}$; & le quatriéme $\frac{1}{6}$.

Je réduis ces fractions en même dénomination, & comme le dénominateur commun 72

36	24	18	12	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	ſomme $\frac{90}{72}$
72				

des fractions précédentes peut être exactement diviſé par les quatre dénominateurs 2, 3, 4, 6 de celle-ci, je prens ce dénominateur pour plus grande commodité. Ainſi le numérateur de $\frac{1}{2}$ doit être 36; celui d'un $\frac{1}{3}$ doit être 24; celui d'un $\frac{1}{4}$, 18; & celui d'un $\frac{1}{6}$, 12. J'ajoute ces fractions, & leur ſomme $\frac{20}{72}$ me fait voir que les quatre ouvertures laiſſeroient écouler dans une heure $\frac{20}{72}$ de l'eau qui peut remplir le baſſin: mais comme à meſure qu'ils laiſſent écouler cette ſomme, les quatre tuïaux donnent dans la même heure $\frac{55}{72}$, je retranche $\frac{55}{72}$ de $\frac{20}{72}$, & le reſte $\frac{55}{72}$ eſt la quantité d'eau qui s'écoule dans une heure. Je dis donc: Si $\frac{55}{72}$ de toute l'eau qui s'écoule, les tuïaux & les ouvertures étant lâchés, s'écoulent dans une heure; toute l'eau, qui eſt 1 ou $\frac{72}{72}$, dans combien de tems s'écoulera-t-elle? Ce qui viſiblement doit ſe réſoudre par une régle de trois directe.

Ainſi multipliant $\frac{72}{72}$ par 1, & diviſant le produit par $\frac{55}{72}$, je trouve en évaluant les fractions, que toute l'eau s'écoulera en 1 heure, 18 minutes, 32 ſecondes, $\frac{40}{55}$; deſorte que dans ce moment là il n'y aura point d'eau dans le baſſin, & qu'il n'y en ſauroit plus avoir tant que les quatre ouvertures ſeront ouvertes; parce que celles-ci laiſſent plus couler d'eau toutes à la fois, que les quatre tuïaux n'en fourniſſent.

$\frac{55}{72}$ 1 $\frac{72}{72}$ Rép. 1 heu. 18 min. 32 ſec. $\frac{40}{55}$.

55 / 72 | 1 heure — 17

17 / 60 — 1020

55 / 10 20 | 18 minutes — 47.0 — 30.

30 / 60 — 1800

55 / 18 00 | 32 ſecondes — 15.0 — 40

Je n'ai mis ces deux exemples que pour faire voir de quelle maniere on peut, avec un peu d'attention, réſoudre des queſtions qui paroiſſent d'abord compliquées, de façon qu'on ne ſait par quelle régle on peut en venir à bout, quoique la plupart du tems il ne faille pour cela que les plus ſimples opérations. Par exemple, le Pere Lami dans ſes Elémens de Mathématique,

demande quelle eſt la longueur d'une pique, dont la $\frac{1}{2}$ & le $\frac{1}{3}$ ſont dans l'eau, & dont le reſte qui eſt hors de l'eau a deux pieds de longueur. Un Commençant ne manqueroit pas de regarder cette queſtion, comme étant fort au-deſſus de ſa portée; cependant s'il vouloit y faire un peu de réfléxion, il connoîtroit bientôt que la $\frac{1}{2}$ & le $\frac{1}{3}$ réduits en même dénomination, & ajoutés enſemble ſont $\frac{5}{6}$, & par conſéquent que les deux pieds qui ſont hors de l'eau ne peuvent valoir que $\frac{1}{6}$, puiſque la pique en tout n'a que $\frac{6}{6}$; d'où il concluroit enſuite que $\frac{1}{6}$ de la pique étant de la valeur de deux pieds, la pique entiere ou $\frac{6}{6}$ vaudroit 12 pieds.

De la Régle de trois inverſe *ou* indirecte.

II. Lorſque trois nombres étant donnés, il faut en trouver un quatriéme qui ſoit au ſecond, non pas comme le troiſiéme eſt au premier, mais au contraire comme le premier eſt au troiſiéme; alors l'opération qu'on doit emploïer s'appelle régle de trois *inverſe*, & on la pratique en multipliant le ſecond terme par le premier, parce qu'il n'y auroit qu'à mettre le premier à la place du troiſiéme pour rendre la régle droite; & l'on diviſe enſuite par le troiſiéme, à cauſe que ſi la régle étoit droite, ce troiſiéme occuperoit la place du premier.

PREMIER EXEMPLE.

De la Régle de trois inverſe.

On a emploïé pour bâtir une muraille 6352 pierres de 3 pieds, 6 pouces de longueur: combien en faudroit-il de 2 pieds, 4 pouces pour une muraille de même grandeur?

Pour bien ranger les termes de cette queſtion, il faut dire: 3 pieds, 6 pouces de longueur éxigent qu'on emploïe 6352 pierres, combien 2 pieds, 4 pouces éxigeront-ils? Or je vois que les pierres aïant 3 pieds, 6 pouces de longueur, il en faut moins emploïer que ſi elles n'avoient que 2 pieds, 4 pouces; ainſi le troiſiéme terme de cette régle étant plus petit que le premier, il faut que le quatriéme qu'on demande ſoit au contraire plus grand que le ſecond, & par conſéquent la régle eſt inverſe.

Je multiplie donc 3 pieds, 6 pouces par 6352, & le produit eſt 22232 qu'il faut diviſer par 2 pieds, 4 pouces; c'eſt pourquoi je réduis les 2 pieds, 4 pouces en pouces, & je multiplie le dividende

donde par 12, à cauſe que les pieds du diviſeur ont été multipliés par 12; après quoi faiſant la diviſion, je trouve qu'il faudroit 9528 pierres de 2 pieds, 4 pouces de longueur pour bâtir une ſemblable muraille.

3 pieds 6 pouces 6352 2 pieds 4 pouces

3 pieds 6 pouces

19056

pour 6 pouces 3176 2 pieds 4 pouces

12

22232

12 24

4

44464

22232 28 diviſeur

266784 dividende.

28	
266784	9528
147	
78	
224	
0	

Réponſe 9528 pierres.

SECOND EXEMPLE.

On veut doubler un meuble qui a 25 aunes de longueur, & 3 ½ de largeur, avec une toile qui a 2 aunes ¼ de largeur; & l'on demande combien il faut d'aunes de cette toile?

Comme la toile a moins de largeur que le meuble, il faut néceſſairement qu'elle ait plus de longueur; ainſi ſi je mets la largeur du meuble au premier terme & celle de la toile au troiſiéme, je vois que la longueur de la toile que je cherche doit être à celle du meuble qui eſt le ſecond terme, non pas comme le troiſiéme terme eſt au premier, mais au contraire comme le premier eſt au troiſiéme; donc la régle eſt inverſe.

Je multiplie donc 25 aunes par 3 ½, & le produit eſt 87 ½ qu'il faut diviſer par 2 ¼; c'eſt pourquoi au lieu de la demi du dividende, je mets ¼ qui eſt la même choſe, & réduiſant enſuite

le dividende & le diviſeur en quarts, j'ai pour le premier 350, & pour l'autre 9. Faiſant donc la diviſion, je trouve qu'il faut 38 aunes $\frac{8}{9}$ pour doubler le meuble propoſé.

3 aunes $\frac{1}{2}$

25
3 $\frac{1}{2}$

75
12 $\frac{1}{2}$

87 $\frac{1}{2}$ ou $\frac{4}{8}$
4

348
2

350

$2\frac{1}{4}$
4

8
1

9 diviſeur

Réponſe 38 aunes $\frac{8}{9}$.

9	
350	38 $\frac{8}{9}$
80	
8	

TROISIE'ME EXEMPLE.

De la Régle de trois inverſe.

Il y a des vivres dans une Citadelle pour nourrir 536 hommes pendant une année; & l'on demande pour combien de jours il y en aura ſi l'on augmente la Garniſon juſqu'à la faire monter à 1124 hommes?

On voit bien que 536 hommes aïant dequoi vivre pour une année, ou 365 jours, 1124 n'auront dequoi vivre que pour beaucoup moins de tems; ainſi la régle eſt indirecte.

Je multiplie donc 365 par 536, & diviſant le produit par 1124, je trouve 174 jours $\frac{64}{1124}$ ou $\frac{16}{281}$, qui eſt le tems que 1124 hommes pourroient vivre des proviſions qui ſont dans la Forteresſe.

536. 365
536

2190.
1095
1825

195640

1124. Réponſe 174 jours $\frac{64}{1124}$

1124	
195 640	174 jours.
832.4	
456.0	
64.	

QUATRIE'ME EXEMPLE.

De la Régle de trois indirecte.

Une perſonne a une certaine ſomme qui lui permet de dépenſer 50 livres par jour, pendant 15 mois, & il veut ſavoir combien il pourroit dépenſer par jour avec la même ſomme pendant 3 ans & deux mois?

Comme 3 ans & 2 mois, c'eſt-à-dire 38 mois, ſont plus longs que 15 mois, il eſt évident que la dépenſe que cette perſonne pourra faire par jour ſera auſſi moindre que 50 livres; & par conſéquent la régle eſt indirecte.

Je multiplie donc 15 par 50, & diviſant le produit 750 par 38, le quotient & les fractions évaluées me donnent 19 livres, 14 ſols, 8 deniers, $\frac{32}{38}$ ou $\frac{16}{19}$, qui eſt la dépenſe que cette perſonne peut faire par jour pendant 38 mois.

15 mois 50 l. 38 Rép. 19 l. 14 ſ. 8 d. $\frac{16}{19}$

50

750

38 | 750 | 19 livres

370

28

38 | 560 | 14 ſols

180

28

38 | 336 | 8 deniers

32

28

20

560

28

12

56

28

336

De la Régle de trois directe compoſée.

III. Lorſque la queſtion propoſée contient 5 ou 7 termes au lieu de trois, la régle qu'il faut y emploïer s'appelle *régle de trois compoſée*, *directe* ſi la proportion eſt droite, & *indirecte* ſi la proportion eſt inverſe. Quelques-uns l'appellent régle *double* ou *triple*, parce qu'on peut réſoudre la queſtion par deux ou trois ré-

gles de trois, ſelon qu'il y a 5 ou 7 termes; mais la méthode la plus courte eſt de réduire les 5 ou les 7 termes au nombre de trois, & de faire enſuite l'opération comme ci-deſſus.

PREMIER EXEMPLE.

De la Régle de trois directe compoſée.

25 hommes en huit jours ont fait 320 toiſes d'ouvrages : combien 42 hommes en ſix jours en feront-ils ?

Si je conſidére cette queſtion ſans faire attention aux nombres de jours de part & d'autre, je vois que 42 hommes étant en plus grand nombre que 25, le nombre de toiſes qu'ils doivent faire doit être plus grand que 320; & ſi je la conſidére ſans faire attention au nombre des hommes de part & d'autre, je vois que 6 jours étant moindres que 8 jours, le nombre des toiſes faites pendant ces 6 jours devroit être plus petit que 320; ainſi ſous l'une & l'autre de ces conditions la régle eſt droite. Il s'agit donc de réduire les 5 termes au nombre de trois, & voici de quelle façon je m'y prens.

Je multiplie les 25 hommes du premier terme par les 8 jours du ſecond, & je prens le produit 200 pour le premier terme d'une régle de trois ſimple, ce qui ne gâte rien; car il eſt sûr que 200, ou 8 fois 25 hommes, font autant de travail en un jour, que 25 hommes en 8 jours.

Je multiplie de même 42 hommes du quatriéme terme par les 6 jours du cinquiéme, & je prens le produit 252 pour le troiſiéme terme d'une régle de trois ſimple, ce qui ne gâte rien non plus, puiſqu'il eſt évident que 252 hommes ou 6 fois 42 doivent faire

25 hom. 8 j. 320 toiſ. 42 hom. 6 j.

8 — 6

200 — 252

200 — 320 — 252 — 320

5040
756

80640

200 | 403 toiſes
80 640

006.4
64.0

40

40
6

240

re autant en un jour que 42 hommes en 6; ainſi je n'ai plus que 3 termes, & la queſtion ſe réduit à dire : 200 en un jour font 320, combien 252 en feront-ils en un même jour ?

Je multiplie 320 par 252, parce que la régle eſt droite, & diviſant par le premier terme 200, je trouve, après avoir évalué les fractions, que 42 hommes en 6 jours doivent faire 403 toiſes, 1 pied, 2 pouces, 4 lignes $\frac{4}{5}$.

200 | 1 pied
240

40

40
12

80
40

480

200 | 2 pouces
480

80

80
12

160
80

960

200 | 4 lignes
960

160

Rép. 403 toiſ. 1 pied 2 pouc. 4 lig. $\frac{160}{200}$ ou $\frac{4}{5}$.

Si on vouloit réſoudre la même queſtion par deux régles de trois, on négligeroit d'abord le nombre de jours de part & d'autre, en diſant : Si 25 hommes font 320, combien en feront 42 ?

Multipliant 320 par 42, & diviſant le produit par le premier terme 25, on trouveroit après avoir évalué les fractions, 537 toiſes, 3 pieds, 7 pouces, 2 lignes $\frac{2}{5}$, qui feroient le travail que 42 hommes auroient fait s'ils avoient travaillé pendant 8 jours, de même que les 25 hommes du premier terme.

25 | 320
42

640
1280

13440

25 | 42

25 | 13.440 | 537 toiſ.

9.4
19.0

15

15
6

90

25 | 90 | 3 pieds

15

15
12

30
15

180

Mais comme on ſuppoſe qu'ils n'ont travaillé que 6 jours il faut faire une ſeconde régle, en diſant : Si 8 jours donnent 537 toiſes, 3 pieds, 7 pouces, 2 lignes $\frac{1}{5}$, combien 6 jours en donneront-ils ?

25 | 5
180 | 7 pouces | 12
5 | 60

25
60 | 2 lignes
10

Rép. 537 toiſ. 3 pieds 7 pouc. 2 lig. $\frac{10}{25}$ ou $\frac{2}{5}$.

Multipliant 537 toiſes, 3 pieds, 7 pouces, 2 lignes $\frac{1}{5}$, par 6, on a 3225 toiſes, 3 pieds, 7 pouces, 2 lignes, $\frac{6}{5}$, qu'il faut diviſer par le premier terme 8 ; cette diviſion peut ſe faire ſans réduire les toiſes à leur derniere eſpéce, à cauſe que le diviſeur 8 n'eſt point compoſé, ainſi que je l'ai dit dans le premier exemple de la diviſion compoſée ; & le quotient, après avoir évalué les fractions, donnera 403 toiſes, 1 pied, 2 pouces, 4 lignes $\frac{4}{5}$, de même que nous l'avons trouvé par l'autre méthode, qui certainement doit être préférée à celle-ci, à cauſe de ſa briéveté.

8 — 537 toiſes 3 pieds 7 pouces 2 lignes $\frac{1}{5}$ — 6
6

3225 — 3 — 7 — 2 — $\frac{1}{5}$

8
3 225 | 403 toiſes

0.2

2.5

1

8
9 | 1 pied

1

8
19 | 2 pouces

3

1
6

6
3

9 pieds

3
12

36
2

38 lignes

1
12

12
7

19 pouc.

8 | 4 lignes
38 |
6

8 |
32 | 4 cinquiémes

6
5
30
2
32 cinquiémes

Réponſe 403 toiſes 1 pied 2 pouces 4 lignes $\frac{4}{5}$.

SECOND EXEMPLE.

De la Régle de trois directe compoſée.

225 livres en 18 mois ont produit 16 livres d'intérêt : combien 1350 livres en 3 années & 3 mois produiront-elles ?

Pour réduire les cinq termes de cette queſtion au nombre de trois, je multiplie les 225 livres du premier terme par 18 mois ; car 225 livres en 18 mois ne rendent pas plus que 18 fois 225 livres en un mois, le produit eſt 4050 livres que je prens pour le premier terme d'une régle de trois ſimple.

Je multiplie de même les 1350 liv. du quatriéme terme par les 39 mois du cinquiéme, parce que 1350 liv. rendent autant en 39 mois que 39 fois 1350 l. en un mois ; & je mets le produit 52650 au troiſiéme terme d'une régle de trois ſimple ; & la queſtion ſe réduit à dire : Si 4050 livres en un mois produiſent 16 livres, combien 52650

225. 18. 16. 1350. 39 mois.
18
1800
225
4050

4050.
4050
842 400 | 208 liv.
3240
32400
00

1350.
39
12150
4050
52650

16.

52650
16
315909
52650
842400

Réponſe 208 livres

en un mois en produiront-elles ? Multipliant donc 52650 par 16, & diviſant le produit par 4050, le quotient donne 208 livres, qui eſt l'intérêt qu'on demandoit.

TROISIE'ME EXEMPLE.

De la régle de trois directe compoſée.

Une piéce de toile longue de 48 aunes, & large d'une aune $\frac{1}{3}$ a coûté 356 livres : combien coûtera une piéce de toile longue de 56 aunes, & large de 2 aulnes $\frac{1}{4}$?

Pour réduire les 5 termes de cette queſtion au nombre de trois, je multiplie le premier terme 48 par le ſecond $1\frac{1}{3}$, & je mets le produit 64 à la place du premier terme d'une régle de trois ſimple, parce que 48 aunes, qui ont 1 aune & $\frac{1}{3}$ de largeur ſont la même choſe que une fois & $\frac{1}{3}$ de fois 48 aunes qui auroient 1 aune de largeur. Je multiplie de même le quatriéme terme 56 aunes par le cinquiéme $2\frac{1}{4}$, & je mets le produit 126 au troiſiéme terme d'une

48. $1\frac{1}{3}$. 356 liv. 56. $2\frac{1}{4}$.

$1\frac{1}{3}$ — $2\frac{1}{4}$

48 — 112
16 — 14

64 — 126

64. 356. 126.

126

2136
712
356

44856

64 | 44856 | 700 livres

0.5 — 56
5.6 — 20

56 — 1120 ſols

64 | 1120 | 17 ſols

48.0 — 32
32 — 64
32

380 deniers

64 | 384 | 6 deniers

0

Réponſe 700 livres 17 ſols 6 deniers.

d'une

d'une régle de trois, parce que 56 aunes, qui ont 2 ¼ de largeur, ſont la même choſe que 2 fois & ¼ de fois 48 aunes qui auroient une aune de largeur; ainſi la queſtion ſe réduit à dire : Si 64 aunes de toile, qui a une aune de largeur coûtent 356 livres, combien coûteront 126 aunes qui auront la même largeur? Faiſant donc la régle à l'ordinaire, le quotient donnera 700 livres, 17 ſols, 6 deniers pour la valeur de 56 aunes de toile à 2 aunes ¼ de largeur.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

De la Régle de trois directe compoſée.

Une Tranchée longue de 500 toiſes, large de 2 toiſes, & profonde de 6 pieds, a été faite en huit jours : combien de tems faudra-t-il pour en faire une longue de 900 toiſes, large de 2 toiſes, 3 pieds, & profonde de 10 pieds, en emploïant le même nombre d'ouvriers?

500 toiſ. 2 toiſ. 6 pieds. 8 jours. 900 toiſ. 2 toiſ. 3 p. 10 p.

2

1000

0 6 pieds

1000 toiſes

2 toiſes 3 pieds

1800

450

2250

1 toiſe 4 pieds

2250

pour 2 pieds 750

750

3750

Cette queſtion comprend 7 termes que je réduis au nombre de 3, en multipliant les 500 toiſes du premier terme par les 2 toiſes du ſecond, & le produit 1000 par les 6 pieds du troiſiéme, c'eſt-à-dire par 1 toiſe, ce qui fait encore 1000 toiſes, que je mets au premier terme d'une régle de trois ſimple; car 500 de longueur, 2 de largeur & une de profondeur font 1000 toiſes cubiques. Je multiplie de même les 900 toiſes du cinquiéme terme par les 2 toiſes, 3 pieds du ſixiéme, & le produit 2250 par les 10 pieds du ſeptiéme, c'eſt-à-dire par une toiſe, 4 pieds, & je mets le produit 3750 au troiſiéme rang d'une régle de trois ſimple, parce que 900 toiſes de longueur, 2 toiſes, 3 pieds de largeur, & 10 pieds de

profondeur font 3750 toiſes cubiques ; ainſi la queſtion ſe réduit à dire : Si 1000 toiſes cubiques ont été faites en 8 jours, 3750 en combien de jours ſeront-elles faites ?

Multiplant donc 3750 par 8, & diviſant le produit par le premier terme 1000, le quotient donne 30 jours, qui eſt le tems qu'il faut emploïer pour une tranchée de 900 toiſes de longueur, 2 toiſes, 3 pieds de largeur, & 10 pieds de profondeur.

1000. 8. 3750 Réponſe 30 jours

8

30000

1000 | 30
30000

0000.0

0

Cette queſtion pourroit ſe réſoudre par trois régles de trois, en cette ſorte ; je fais d'abord abſtraction de la largeur & de la profondeur de part & d'autre, & je dis : Si 500 toiſes demandent 8 jours, combien 900 en demanderont-elles ?

Faiſant la régle à l'ordinaire, je trouve qu'il faudroit emploïer 14 jours $\frac{2}{5}$ ſi la tranchée de 900 toiſes avoit la même largeur & la même profondeur : mais comme cela n'eſt pas, je fais une

500. 8. 900. Rép. 14 $\frac{200}{500}$ ou $\frac{2}{5}$

8

7200.

500 | 14
7200

2200.

200

ſeconde régle où je ſuppoſe que la profondeur eſt la même, & que la différence ne conſiſte que dans la largeur, & je dis : Si 2 toiſes de largeur demandent 14 $\frac{2}{5}$, combien 2 toiſes, 3 pieds en demanderont-elles ?

2 toiſes. 14 $\frac{2}{5}$. 2 t. 3 p. R. 18 jours.

2 toiſes 3 pieds.

28

pour 3 pieds 7
pour $\frac{1}{5}$ 0 toiſe 3 pieds
pour $\frac{1}{5}$ 0 3 pieds

36. 0.

2 | 36 | 18

16

0.

Multipliant donc 14 $\frac{2}{5}$ par 2 toiſes, 3 pieds,

& diviſant le produit par le premier terme 2 toiſes, je trouve 18 jours qu'il faudroit emploïer ſi la profondeur étoit la même; mais comme les profondeurs ſe trouvent différentes, je fais une troiſiéme régle, en diſant: Si 6 pieds de profondeur, c'eſt-à-dire une toiſe, demandent 18 jours, combien 10 pieds, ou 1 toiſe 4 pieds en demanderont-ils?

Je multiplie 18 jours par 1 toiſe, 4 pieds, ce qui donne 30; & diviſant par le premier terme 1, je trouve encore 30 jours de même que j'avois trouvé par la méthode précédente.

1 toiſe. 18 1 toiſe 4 pieds. Réponſe 30 jours.

1 toiſe 4 pieds

18

pour 2 pieds 6

pour 2 pieds 6

30

CINQUIE'ME EXEMPLE.

De la Régle de trois directe compoſée.

Un bloc de marbre long de 3 toiſes, large de 2 toiſes, 2 pieds, & haut de 4 pieds, a coûté 358 livres: combien coûtera un bloc du même marbre, long de 2 toiſes, 3 pieds, large de 2 toiſes, & haut de 3 toiſes?

3 toiſes 2 toiſ. 2 p. 4 p. 358 l. 2 t. 3 p. 2 t. 3 t.

2 toiſes 2 pieds 2

6 4

1 1

7 5

0 4 pieds 3

pour 2 pieds 2 toiſes 2 pieds 15

pour 2 pieds 2 toiſes 2 pieds

4 toiſes 4 pieds

Pour réduire les 7 termes de cette queſtion au nombre de trois, je multiplie les trois toiſes du premier terme par les 2 toiſes, 2 pieds du ſecond, & le produit par les 4 pieds du troiſiéme; ce

qui me donne 4 toiſes cubiques & 4 pieds de toiſe cubique, qui eſt la ſolidité du premier bloc de marbre. Je multiplie de même les 2 toiſes, 3 pieds du cinquiéme terme, par les 2 toiſes du ſixiéme, & le produit par les trois toiſes du ſeptiéme, ce qui me donne la ſolidité du ſecond bloc. Ainſi la queſtion ſe réduit à dire : Si 4 toiſes, 4 pieds coûtent 358 liv. combien coûteront 15 toiſes ?

Je multiplie donc 358 livres par 15, ce qui donne 5370, que je multiplie encore par 6, à cauſe que le diviſeur 4 toiſes doit être multiplié par 6 pour être réduit en pieds ; & diviſant enſuite le produit par le diviſeur 28, je trouve, après avoir évalué les fractions, que le ſecond bloc doit coûter 1150 livres, 14 ſols, 3 deniers $\frac{3}{7}$.

4 toiſes 4 pieds
6
24
4
28 diviſeur

358 liv. 15 toiſes
15
1790
358
5370
6
32220 dividende

28 | 1150 livres
3220
42
14.2
2.0
20.

20
20
400 ſols

28 | 14 ſols
400
12.0
8

8
12
96 deniers

28 | 3 deniers
96
12

Réponſe 1150 liv. 14 ſols 3 den. $\frac{12}{28}$ ou $\frac{3}{7}$

Remarque. Dans les exemples que je viens d'expliquer, le dernier terme que nous cherchions, & celui de même eſpéce que les queſtions renfermoient, n'avoient point de conditions diffé-

rentes entr'eux ; c'eſt-à-dire, que ſi le terme cherché étoit des livres ou des toiſes, celui de même eſpece compris dans la régle étoit auſſi des livres ou des toiſes, ſans autre condition qui y mît de la différence ; & cela nous a donné la facilité de ſatisfaire à ce qu'on nous demandoit par une ſeule régle de trois. Mais s'il arrivoit que le terme cherché eût quelque condition particuliere qui ne fût pas attachée au terme de même eſpece compris dans la queſtion, alors il faudroit néceſſairement emploïer deux régles de trois pour le trouver, ainſi que l'on va voir dans les deux exemples ſuivans.

SIXIE'ME EXEMPLE.

De la Régle de trois directe compoſée.

Pour paver une cour large de 37 toiſes, 3 pieds, & longue de 41 toiſes, 4 pieds, il a fallu 60000 pierres larges de 9 pouces & longues d'un pied, 3 pouces. Pour paver une autre cour large de 40 toiſes, 3 pieds, & longue de 50 toiſes, 2 pieds, 8 pouces : combien faudra-t-il de pierres larges d'un pied, & longues d'un pied 4 pouces?

Cette queſtion comprend 10 termes, deux deſquels étant des conditions attachées au terme qu'il faut chercher, ne ſauroient entrer dans l'opération de la régle ; ainſi je néglige ces deux conditions, & celles qui ſont attachées au terme de même eſpéce compris dans la queſtion, c'eſt-à-dire, aux 60000 pierres ; & alors la régle n'a plus que 5 termes, qu'on peut énoncer en cette ſorte : Si pour une cour large de 37 toiſes, 3 pieds, & longue de 41 toiſes, 4 pieds, il a fallu 60000 pierres, pour une autre cour large de 40 toiſes, 3 pieds, & longue de 50 toiſes, 2 pieds, 8 pouces, combien faudra-t-il de pareilles pierres ?

37 toiſ. 3 p. 41 t. 4 p. 60000 pier. 40 t. 3 p. 50 t. 2 p. 8 pou.
41 toiſ. 4 p. 50 toiſ. 2 pieds 8 pouces.

37
148
12 toiſ. 2 p. pour 2 pieds
12 toiſ. 2 p. pour 2 pieds
20 5 p. pour 3 pieds

1562 toiſ. 3 p.

2000
13 toiſ. 2 pieds
4 toiſ. 2 pieds 8 pouces.
25 1 4

2043 toiſ. 0 0.

Je réduis ces 5 termes au nombre de trois, en multipliant les

deux premiers enſemble, ce qui me donne le contenu de la premiere cour en toiſes quarrées ; & le quatriéme par le cinquiéme, ce qui me donne le contenu de la ſeconde cour en mêmes toiſes. Ainſi je dis : Si pour 1562 toiſes, 3 pieds, il a fallu 60000 pierres, pour 2043 toiſes combien en faudra-t-il ?

Je multiplie donc le ſecond terme par le troiſiéme, & après avoir multiplié le produit par 6, à cauſe que le diviſeur doit être multiplié par 6, pour être réduit en pieds, je diviſe par le premier terme, & je trouve 78451 $\frac{1}{5}$, qui eſt le nombre de pierres qu'il faudroit pour la ſeconde cour, ſi elles étoient de la même grandeur que celles de la premiere.

1562 toiſes 3 — 60000 — 2043

6 — 60000

9372 — 1225 80000

3 — 6

9375 — 7354 80000

9375 | 7354 80000 | 78451 $\frac{1875}{9375}$ ou $\frac{1}{5}$.

7923.0

4230.0

4800.0

1125.0

1875

Réponſe 78451 $\frac{1}{5}$.

Mais comme les dimenſions des pierres ne ſont pas les mêmes, je fais une ſeconde régle, en diſant : Si 9 pouces de largeur, & 1 pied trois pouces de longueur, qui ſont les dimenſions des pierres de la premiere cour, & que j'avois ſuppoſé être les mêmes pour les pierres de la ſeconde, demandent 78451 $\frac{1}{5}$, combien 1 pied de largeur & 1 pied 4 pouces de longueur, qui ſont les véritables dimenſions des pierres de la ſeconde cour, demanderont-elles ?

9 pouces 1 pied 3 pouc. — 78451 $\frac{1}{5}$ — 1 pied — 1 pied 4 p.

15 pouces — 12 pouces

16 pouces

135 pouces

72

12

192 pouces

La régle contient 5 termes, que je réduis au nombre de trois,

en multipliant les deux premiers termes l'un par l'autre ; ce qui me donne le contenu d'une pierre de la premiere cour en pouces quarrés. Je multiplie de même le quatriéme par le cinquiéme ; ce qui me donne le contenu d'une pierre de la ſeconde cour en pouces quarrés auſſi, & la régle ſe trouve réduite à dire : Si 135 pouces quarrés exigent 78451 $\frac{1}{7}$ pierres pour la ſeconde cour, combien 192 pouces en exigeront-ils pour cette même cour ?

En obſervant cette derniere queſtion, je m'apperçois que le troiſiéme terme 192 pouces étant plus grand que 135 pouces du premier terme, le quatriéme doit devenir non pas plus grand que le ſecond, mais au contraire plus petit, parce que les pierres étant plus grandes, on doit en emploïer moins. Ainſi cette derniere régle eſt indirecte.

135. 78451 $\frac{1}{7}$. 192. Réponſe 55161.

135

392255
235353
78451
27

10590912

192

105 90912 | 55161 pierres pour la ſeconde cour.

990

309

1171

192

0

Je multiplie donc le premier terme par le ſecond, & diviſant le produit par le troiſiéme, je trouve que pour paver la ſeconde cour, il faut 55161 pierres de 9 pouces de largeur, & d'un pied quatre pouces de longueur.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

De la Régle de trois directe compoſée.

Pour bâtir une muraille de 17 toiſes, 2 pieds de longueur, & 10 pieds de hauteur, on a emploïé 2080 pierres longues de 2 pieds, larges d'un pied, & hautes de 6 pouces. Pour bâtir une autre muraille longue de 25 toiſes, large de 6 pieds, & haute de 15 pieds, combien faudra-t-il de pierres longues de 3 pieds, larges de 2 pieds, & hautes d'un pied ?

Cette queſtion comprend 13 termes, trois deſquels étant les dimenſions des pierres dont on cherche le nombre, ne peuvent entrer dans l'opération de la régle; ainſi je néglige ces trois dimenſions, de même que celles des pierres de la premiere muraille, & la régle n'a plus que 7 termes, qu'on peut ranger ainſi, en diſant: Si une muraille de 17 toiſes, 2 pieds de longueur, 2 pieds de largeur, & 10 de hauteur, exige qu'on emploïe 2080 pierres, combien en faudra-t-il pour une muraille longue de 25 toiſes, large de 6 pieds, & haute de 15?

long.	17 toiſ.	2 pieds.	2 p.	1 t. 4 p.	2080.	25 toiſ.	6 p.	2 t. 3 p.
larg.	0	2 pieds				1 largeur		
	5 toiſ.	4 pieds	8 pouces			25		
haut.	1 toiſ.	4 pieds			hauteur	2 toiſes	3	
	5	4	8			50		
	1	5	6 pouc.	8 lignes		12 toiſes	3 pieds	
	1	5	6 pouc.	8 lignes		62 toiſes	3 p.	ſolid.
ſolid.	9 toiſ.	3 pieds	9 pouc.	4 lignes				

Pour réduire ces 7 termes au nombre de 5, je multiplie les trois premiers termes les uns par les autres, & leur produit eſt la ſolidité de la premiere muraille: je multiplie les trois derniers termes les uns par les autres, ce qui me donne la ſolidité de la ſeconde muraille; ainſi la régle n'a plus que trois termes, & je vois aiſément qu'elle eſt directe, puiſque pour 62 toiſes, 3 pouces de ſolidité, il faut plus de pierres que pour 9 toiſes, 3 pieds, 9 pouces, 4 lignes, en ſuppoſant, comme nous faiſons, que ce ſont les mêmes pierres qu'on emploïe. Je dis donc: Si 9 toiſes, 3 pieds, 9 pouces, 4 lignes exigent 2080 pierres, combien en exigeront 62 toiſes, 3 pieds? Je multiplie le ſecond terme par le troiſiéme, & comme le diviſeur doit être multiplié ſucceſſivement par 6, 12, 12, pour être réduit en lignes; je multiplie le produit par 864, qui eſt le produit de ces trois nombres; après quoi faiſant la diviſion, je trouve 13500, qui eſt le nombre de pierres qu'il faudroit emploïer pour la ſeconde muraille, ſi elles avoient les mêmes dimenſions que celles de la premiere.

Mais comme ces dimenſions ſont différentes, je fais une ſeconde régle, en diſant: Si 2 pieds de longueur, 1 de largeur & 6 pouces de hauteur, qui ſont les dimenſions des pierres de la premiere muraille,

muraille, & que j'avois ſuppoſé les mêmes pour les pierres de la ſeconde, exigent qu'on emploie 13580 pierres, combien en exigeront 3 pieds de longueur, 2 de largeur & 1 de hauteur, qui ſont les véritables dimenſions de ces pierres ?

9 t. 3 p. 9 p. 41. 6 — 54 — 3 — 57 pieds — 12 — 114 — 57 — 9 — 693 pouces — 12 — 1386 — 693 — 4 — 8320 lignes diviſeur

2080 62 t. 3 p. 62 toiſ. 3 pieds — 4160 — 12480 — 1040 — 130000 — 864 — 520000 — 780000 — 1040000 — 112320000 divid.

6 — 12 — 72 — 12 — 144 — 72 — 864

La régle contient encore 7 termes, que je réduis au nombre de 3, en multipliant d'abord les 3 premiers termes enſemble, ce qui me donne 1 pied cube pour la ſolidité des pierres de la premiere muraille ; je multiplie auſſi les trois derniers les uns par les autres, & j'ai 6 pieds cubes, qui eſt la ſolidité des pierres de la ſeconde ; ainſi la régle n'a plus que trois termes ; mais comme 6 pieds cubes ſont plus grands qu'un pied, le quatriéme nombre doit devenir plus petit que le ſecond, parce

8320 | 112320000 | 13500

29120 — 41600 — 00000 — 00000 — 0 Réponſe 13500.

long. 2 p. 1 p. 6. p. — larg. 1 pied — 2 — haut. 0 pied 6 pouces — ſolid. 1 pied cube

13500. 3 p. 2 p. 1 p. — 2 p. — 6 — 1 — 6 pieds cubes

qu'il faut moins de pierres de 6 pieds que de celles d'un pied, & par conſéquent cette ſeconde régle eſt indirecte ; ainſi multipliant le ſecond terme par le premier, & diviſant le produit 13500 par le troiſiéme 6 je trouve 2250, qui eſt le nombre de pierres

1 pied. 13500. 6. Réponſe 2250.

6 | 13500 | 2250
15
30
0.0
0

qu'il faut emploïer pour la ſeconde muraille, en ſuppoſant que ces pierres ont 3 pieds de longueur, 2 de largeur & 1 de hauteur.

De la Régle de trois indirecte compoſée.

IV. Quand après avoir réduit les cinq ou les ſept termes d'une queſtion au nombre de trois, on trouve que ces trois nombres ſont en proportion inverſe, c'eſt-à-dire, que le quatriéme doit être au ſecond comme le premier eſt au troiſiéme, alors la régle eſt indirecte ; & l'on doit la réſoudre de même que nous avons dit en parlant de la régle *inverſe ſimple*.

PREMIER EXEMPLE.

600 hommes, dans une Place aſſiégée, peuvent avoir pendant 4 mois, 15 onces de pain par jour ; mais comme on craint que le ſiége ne dure davantage, on demande combien cette Garniſon ſe trouvant réduite à 500 hommes peut avoir par jour pendant l'eſpace de 6 mois ?

Je réduis les cinq termes de cette queſtion au nombre de trois, en multipliant les deux premiers termes enſemble, & les deux derniers de même, parce qu'il eſt indifférent de dire : 600 hommes pendant 4 mois, ou 4 fois 600, c'eſt-à-dire, 2400 pendant un mois ; & 500 pendant 6 mois, ou 6 fois 500, c'eſt-à-dire 3000 pendant un mois ; ainſi la queſtion ſe réduit à celle-ci : 2400 ont 15 onces par jour à manger, 3000 hommes combien pourront-ils en avoir ? Et la régle eſt indirecte, à cauſe que le nombre des

hommes augmentant, les vivres doivent se consommer plus vite, & qu'il faut par conséquent diminuer les portions, si on veut les faire durer autant de tems; multipliant donc le premier terme par le second, & divisant par le troisiéme, le quotient donnera 12 onces par jour pour chaque soldat.

600 4 mois. 15 onc. 500 6 mois.

4 6

2400 3000

2400 15 onces. 3000

15

12000 30000 | 12

2400 600.0

36000 0

Réponse 12 onces

SECOND EXEMPLE.

Pour bâtir une muraille on a emploïé 6400 briques de 6 pouces de longueur, 3 de largeur & 2 de hauteur : combien en faudroit-il de 9 pouces de longueur, 5 de largeur & 3 de hauteur pour bâtir une muraille semblable?

Cette question a 7 termes que je puis réduire aisément à trois, parce que les trois premiers, multipliés les uns par les autres, donnent la solidité des briques de la premiere muraille; de même que le produit des trois derniers donne la solidité de celles de la seconde; faisant donc ces deux produits, je dis: Si 36 de solidité exigent 6400

6 p. 3 p. 2. 6400. 9 p. 5 p. 3 p.

3 5

18 45

2 3

36 135

36. 6400. 135. Rép. 1706 $\frac{20}{135}$ ou $\frac{4}{27}$

36

38400 135

19200 23 0400 | 1706

230400 95.4

09.0

90.0

90

briques, 135 de solidité qu'éxigeront-ils ? & la régle est indirecte ; car à mesure que les briques sont plus grandes, on en emploïe certainement moins ; c'est pourquoi je multiplie les deux premiers termes l'un par l'autre, & divisant par le troisiéme, je trouve qu'il faut 1706 $\frac{2}{3}$ briques de la seconde espéce.

Remarque. Il arrive quelquefois dans ces sortes de questions, que la comparaison de certains termes exige une régle directe, tandis que la comparaison de quelques autres en exige une indirecte ; & que d'ailleurs il y auroit de l'inconvénient à réduire tous les termes à trois, à cause qu'on ne sauroit plus ce que leur produit pourroit signifier ; alors le plus court est de multiplier ensemble les termes qu'on peut multiplier sans inconvénient, & & de faire ensuite deux régles de trois, comme on va voir dans l'exemple suivant.

Si l'on suppose, par exemple, que 25 hommes travaillant 9 heures par jour ont fait 36 toises d'ouvrage en 8 jours, & qu'on veüille savoir combien de jours emploïeront 15 hommes, travaillant 8 heures par jour, pour faire 28 $\frac{4}{7}$ de toises, la comparaison des nombres d'hommes demande une régle indirecte, parce qu'il faut plus de journées de travail, à mesure que le nombre d'ouvriers diminuë ; & au contraire, la comparaison des toises demande une régle directe, à cause que l'ouvrage devenant moindre, les journées qu'il faut y emploïer doivent aussi être en moindre nombre. D'ailleurs cette question aïant sept termes, je ne puis la réduire à trois sans inconvénient ; car quoique je puisse multiplier les hommes par leurs heures de travail, à cause qu'il est indifférent de dire : 25 hommes à 9 heures par jour, ou 9 fois 25 hommes à une heure par jour ; je ne puis pas multiplier de même les hommes par les toises, attendu que ce n'est pas la même chose de dire : 25 ont fait 36 toises, & de dire : 36 fois 25 hommes ont fait une toise. Ainsi je multiplie de part & d'autre

25 hom. 9 heur. 36 t. 8 j. 15 hom. 8 h. 28 $\frac{4}{7}$.

9 8

225 120

225. 8. 120 Rép. 15 jours.

8

1800

120 | 1800 | 15 jours

600

0

les hommes par les heures, après quoi ſuppoſant que les uns & les autres aïent 36 toiſes à faire, je dis : Si 225 hommes ont travaillé 8 jours, combien 120 hommes en emploïeront-ils ? Et la régle eſt indirecte ; car le nombre des hommes diminuant, celui des jours doit augmenter. Multipliant donc les deux premiers termes enſemble, & diviſant par le troiſiéme, je trouve 15 jours que 120 emploïeroient pour faire 36 toiſes ; mais comme ils n'en ont que 28 $\frac{4}{7}$ à faire, je dis de nouveau : Si pour 36 toiſes il faut 15 jours, pour 28 $\frac{4}{7}$ combien en faudra-t-il ? Et la régle eſt directe ; car le nombre des toiſes diminuant, les journées de travail ſeront auſſi moindres.

Multipliant donc les deux derniers termes, & diviſant par le premier 36, je trouve 12 qui eſt le nombre de jours que 15 hommes travaillant 8 heures par jour emploïeroient à faire 28 $\frac{4}{7}$ de toiſes.

36. 15. 28 $\frac{4}{7}$.

15

140
28

12

432

Réponſe 12 jours.

36 | 432 | 12 jours

432

0

De la Régle conjointe directe.

V. Lorſqu'après avoir comparé deux à deux pluſieurs meſures, poids ou monnoies de différens endroits, & de valeur différente, on veut ſavoir ce que la premiere ou une certaine quantité de la premiere vaut à l'égard de la derniere ou d'une certaine quantité de la derniere ; la régle qu'on emploïe pour réſoudre la queſtion s'appelle régle *conjointe*, directe, parcequ'elle eſt un aſſemblage de pluſieurs régles de trois, que l'on ſeroit obligé de faire, ſi on vouloit ſe paſſer d'emploïer celle-ci. Les choſes que l'on compare dans ces ſortes de queſtions, doivent être diſpoſées de telle façon, que celles qui ſe trouvent entre la premiere & la derniere ſoient répétées deux fois ; c'eſt-à-dire, que chacune d'elles ſoit le ſecond terme d'une comparaiſon, & le premier de la comparaiſon ſuivante, ainſi qu'on va voir dans les exemples ci-deſſous.

PREMIER EXEMPLE.

Suppoſé que 6 meſures de Roüen vaillent 5 de Paris ; que 4 de

Paris vaillent 7 d'Hollande ; 26 $\frac{1}{4}$ d'Hollande, 9 de Languedoc, & 5 de Languedoc 30 livres : on demande combien 20 de Roüen vaudront de livres ?

Je diſpoſe les termes de cette queſtion de la façon qu'on voit ici, enſorte qu'ils forment deux colonnes, dont la ſeconde eſt la valeur de la premiere, & je mets après ces deux colonnes le nombre 20 de Roüen, qui eſt le nombre dont on veut ſavoir le rapport avec les livres. Cela fait, je multiplie les quatre termes de la premiere colonne les uns par les autres ; ce qui me donne 3150 ; je multiplie de même les quatre termes de la ſeconde les uns par les autres ; ce qui me donne 9450 ; & je dis : 3150 produit des quatre termes de la premiere, eſt à 9450 produit de leur valeur, comme 20 de Roüen eſt au nombre de livres que je cherche ; & faiſant une régle de trois directe, je trouve 60 liv. pour la valeur de 20 meſures de Roüen.

6	de Roüen,	5	de Paris.	combien 20 de Roüen
4	de Paris,	7	d'Hollande.	
26 $\frac{1}{4}$	d'Hollande ;	9	de Languedoc.	
5	de Languedoc,	30	livres	

130 $\frac{1}{4}$ — 270 — 7 — 1890 — 5 — 9450 — 9450 — 20 — 189000 — 3150 | 1890 00 | 60 liv. — 000,0 — 0

131 $\frac{1}{4}$ — 4 — 524 — 1 — 525 — 6 — 3150

Si je n'avois pas voulu me ſervir de cette opération, j'aurois été obligé de faire 4 régles de trois de cette façon : 1°. Si 5 de Paris valent 6 de Roüen, combien 4 de Paris en vaudront-elles ? Et j'aurois eu 4 $\frac{4}{5}$ de Roüen pour la valeur de 4 de Paris.

5 de Paris, 6 de Roüen, 4 de Paris. Réponſe 4 $\frac{4}{5}$.

4 — 24 — 5 | 24 | 4 — 4

2°. Paſſant enſuite à la ſeconde comparaiſon, j'aurois mis $4\frac{4}{5}$ de Roüen au lieu de 4 de Pariſqui ſont au premier terme, & j'aurois dit : Si 7 d'Hollande valent $4\frac{4}{5}$ de Roüen, combien $26\frac{1}{4}$ d'Hollande en vaudront-ils ? Et j'aurois trouvé que $26\frac{1}{4}$ d'Hollande valent 18 de Roüen.

7 d'Hollande. $4\frac{4}{5}$ de Roüen. $26\frac{1}{4}$ d'Hol. Rép. 18.

$4\frac{4}{5}$

104
1
21

126

7 | 126 | 18

56

3°. Paſſant à la troiſiéme comparaiſon, j'aurois mis au lieu de $26\frac{1}{4}$ d'Hollande, ſa valeur 18 de Roüen, & j'aurois dit : Si 9 de Languedoc valent 18 de Roüen, combien en vaudront 5 de Languedoc ? Et faiſant la régle, j'aurois trouvé que 5 de Languedoc valent 10 de Roüen.

9. 18. 5. Réponſe 10.

5

90

9 | 90 | 10

0.0

0

4°. Venant enfin à la derniere comparaiſon, j'aurois mis à la place de 5 de Languedoc, ſa valeur 10 de Roüen, & j'aurois dit : Si 10 de Roüen valent 30 livres, combien vaudront 20 de Roüen ? Et faiſant la régle, j'aurois trouvé que 20 de Roüen valent 60 livres, de même que nous l'avons trouvé par la régle conjointe qui nous a abrégé beaucoup le calcul.

10. 30. 20. Réponſe 60 livres

20

600

10 | 600 | 60

0.0

0

SECOND EXEMPLE.

Suppoſé que deux chevaux aïent coûté 90 livres, que 26 livres vaillent 4 ducats, que 12 ducats vaillent 130 florins : on demande combien ces chevaux valent de florins ?

Aïant rangé les termes en deux colonnes, dont l'une eſt la valeur de l'autre, je multiplie tous les termes de la premiere les uns par les autres, ce qui me donne 624 ; je multiplie tous les

termes de la ſeconde les uns par les autres, & j'ai 46800. Je dis enſuite: Le produit de 624 de la premiere eſt au produit 46800 de ſa valeur, comme deux chevaux au quatriéme terme que je cherche, & faiſant la régle, je trouve 150 florins, qui eſt la valeur de ces chevaux.

2 chevaux,	90 livres.	comb. 2 chevaux?
26 livres,	4 ducats.	
12 ducats,	130 florins.	
52	520	624 | 93600 | 150
26	90	312.0
312	46800	000.0
2	2	
624	93600	0

Réponſe 150 florins.

De la Régle conjointe indirecte.

VI. Si après avoir comparé pluſieurs meſures ou poids, &c. de différens Païs & de différente valeur, on demande combien une certaine quantité de la derniere peut valoir à l'égard de la premiere, la régle qu'on doit emploïer pour réſoudre la queſtion eſt indirecte, & ne différe de la précédente qu'en ce qu'après avoir réduit tous les termes au nombre de trois, il faut multiplier le premier par le troiſiéme, & diviſer le produit par le ſecond.

EXEMPLE.

On ſuppoſe que 6 de Roüen valent 5 de Paris; 4 de Paris, 7 d'Hollande; 26 $\frac{1}{4}$ d'Hollande, 9 de Languedoc, & 5 de Languedoc 30 livres: & l'on veut ſavoir combien on auroit de meſures de Roüen pour 60 livres?

Je fais le produit des deux colonnes, de même que dans les exemples ſuivans; après quoi je m'apperçois qu'il y a du dérangement dans mes trois termes; car les livres étant au troiſiéme, elles ſe trouvent auſſi au ſecond, au lieu qu'elles devroient être au premier; & de même la meſure de Roüen étant au quatriéme que je cherche, elle ſe trouve au premier, au lieu qu'elle devroit être au ſecond; c'eſt pourquoi je regarde le produit 3150 comme s'il étoit au ſecond rang d'une régle de trois directe, & multipliant 3150 par 60, je diviſe le produit par 9450 que je regarde comme

somme étant le premier terme d'une régle directe, & je trouve que pour 60 livres on auroit 20 mesures de Roüen. On pout regarder cette régle comme la preuve de celle que nous avons fait dans l'article précédent, où les mêmes mesures ont été emploïées.

6 de Roüen,	5 de Paris. com. 60 l.	R. 20 de Roüen.
4 de Paris,	7 d'Hollande.	
26 $\frac{1}{4}$ d'Hollande,	9 de Languedoc.	
5 de Languedoc,	30 livres.	

130	270			
1 $\frac{1}{4}$	7			
131 $\frac{1}{4}$	1890			
4	5			
524	9450			
1				
525		3150	9450 |	
6		60	1890 00 |	20 de R.
3150		189000	0000.0	
			0	

Si on avoit voulu résoudre cette question par quatre régles de trois, on auroit fait les trois premieres de la même façon qu'elles ont été faites ci-dessus ; & pour la quatriéme, au lieu de dire : Si 10 de Roüen valent 30 livres, combien en vaudront 20 ? on auroit dit : Si 30 livres valent 10 de Roüen, combien 60 en vaudront-elles ? Et l'on auroit trouvé 20 de même que par la régle conjointe.

Des Régles d'Intérêt.

VII. Il y a deux manieres de compter les intérêts ; la premiere à tant pour 100, comme par exemple, à 5, à 7 $\frac{1}{2}$, à 10 pour 100, &c. & cette maniere est usitée en Provence, en Languedoc & parmi la plupart des Financiers & des Marchands. La seconde, est au denier 10, 20, 25, &c. & dans l'usage ordinaire presque tout le monde compte de cette façon. Prêter ou tirer l'intérêt à 5, à 6, à 7 pour cent, &c. c'est tirer au bout de l'année 5, 6, ou 7 livres pour 100 livres que l'on a prêtées. Tirer l'intérêt au denier 10, 20, 25, &c. c'est tirer au bout de l'année une livre pour 10 livres, 20 livres, ou 25 livres qu'on a prêtées ; desorte qu'à

tant pour 100, l'intérêt & le capital joints enſemble montent à 105, 106 ou 107, &c. au lieu de 100; & au denier tant, l'intérêt & le capital joints enſemble, montent à 11, à 21 ou à 26, &c. au lieu de 10, 20 ou 25, &c.

Si l'on veut connoître le rapport que ces deux façons de compter peuvent avoir entr'elles, c'eſt-à-dire, ce que les deniers 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22 & 24, qui ſont les deniers les plus uſités, feroient à tant pour 100; il faut diviſer 100 par le denier qu'on veut comparer, comme par exemple, par le denier 20, & le quotient 5 marqueroit que le denier 20 eſt la même choſe que 5 pour 100; & en effet, puiſqu'on tire une livre pour chaque 20 livres qu'on a prêtées, & que 100 contient 5 fois 20, il eſt clair que 100 doivent produire 5. On trouvera de la même façon, que les différens deniers marqués ci-deſſus ſe réduiſent aux tant par 100 que j'ai marqués à côté de chaque denier dans la Table qu'on voit ici.

Denier 10	c'eſt	10 pour 100
Denier 12		8 $\frac{1}{3}$
Denier 14		7 $\frac{1}{7}$
Denier 15		6 $\frac{2}{3}$
Denier 16		6 $\frac{1}{4}$
Denier 18		5 $\frac{5}{9}$
Denier 20		5
Denier 21		4 $\frac{16}{21}$
Denier 22		4 $\frac{6}{11}$
Denier 24		4 $\frac{1}{6}$

Pour calculer les intérêts d'une ſomme qu'on a prêtée à un certain denier, il faut diviſer la ſomme prêtée par le denier, & le quotient donne les intérêts; ainſi ſi l'on a prêté 576 livres au denier 16, & qu'on veuille ſavoir quel en ſera l'intérêt au bout d'un an, on diviſera le capital, c'eſt-à-dire la ſomme prêtée 576, par 16, & le quotient 36 marquera qu'au bout de l'année on doit retirer 36 livres d'intérêt par-deſſus le capital 576.

16 | 576 | 36 livres d'intérêt.
96
0

Que ſi on vouloit calculer ces intérêts à 6 $\frac{1}{4}$ pour 100, qui eſt la même choſe que le denier 16, on diroit par régle de trois directe: Si 100 donnent 6 $\frac{1}{4}$ d'intérêt, combien don-

100. 6 $\frac{1}{4}$. 576 36 livres.
6 $\frac{1}{4}$
100 | 36 liv.
3600
60.0
0
3456
144
3600

neront 576 ? & l'on trouveroit 36 livres ; d'où l'on voit que l'un & l'autre reviennent au même ; mais qu'il y a de la différence dans la maniere d'opérer. Cela ſuppoſé, nous allons réſoudre pluſieurs queſtions ſur les intérêts, dont l'uſage eſt aſſez fréquent.

PREMIER EXEMPLE.

Un homme veut acheter une maiſon qui produit 700 livres de rente, & il prétend que la ſomme qu'il en donnera lui profite autant que s'il l'avoit miſe en rente au denier 18, c'eſt-à-dire, que les 700 livres que produit la maiſon ſoient égaux à l'intérêt que produiroit ſon argent au denier 18.

Pour réſoudre cette queſtion, j'éxamine que ſi je connoiſſois la ſomme qu'il doit païer, je n'aurois qu'à diviſer cette ſomme par 18, & le quotient donneroit 700 livres ; donc multipliant 700 par 18, le produit 12600 livres ſera l'argent qu'il doit donner pour l'achat de cette maiſon.

700
18
5600
700
12600 livres

Si je voulois réſoudre la même queſtion, en comptant à 5 $\frac{1}{9}$ pour 100, qui eſt la même choſe que le denier 18, je dirois : Si 5 $\frac{1}{9}$ ſont l'intérêt de 100 livres, 700 livres de quelle ſomme ſeront-elles l'intérêt ? Faiſant donc une régle de trois directe, je trouverois de même 12600 livres pour le capital de l'intérêt 700 livres.

5 $\frac{1}{9}$. 100. 700 Réponſe 12600 livres.

9 — 100

45 — 70000

5 — 9

50 — 630000

10
630000 | 12600
130
300
0
0
0

SECOND EXEMPLE.

Un homme veut vendre ſa maiſon 24570 *livres, parce qu'il en retire* 1365 *livres de rente : on demande à quel denier il prétend la vendre ?*

Si je connoiſſois le denier auquel il veut la vendre, je n'aurois qu'à diviſer 24570 par ce denier, & le quotient ſeroit 1365 ; donc diviſant 24570 par 1365, le quotient 18 me marquera que le deſſein de cet homme eſt de vendre au denier 18.

1365 | 24570 | 18
1092.0
0000

Que ſi je voulois réſoudre la queſtion en cherchant à combien pour 100 la maiſon ſera venduë, je dirois : Si 24570 livres rendent 1365 ; combien rendroient 100 livres ?

Multipliant les deux derniers termes l'un par l'autre, & diviſant par le premier, le quotient me marqueroit que la maiſon ſeroit venduë à 5 $\frac{1}{9}$ pour 100, qui eſt la même choſe que le denier 18.

24570. 1365. 100.
100
136500
24570 | 136500 | 5 $\frac{1}{9}$
13650

TROISIE'ME EXEMPLE.

Une perſonne fait une rente annuelle de 725 *livres qu'elle veut racheter en rembourſant le fonds : on demande quelle eſt la ſomme qu'il doit donner pour ce rembourſement, à raiſon du denier* 20 ?

Si j'avois le capital, je n'aurois qu'à diviſer par 20, & le quotient ſeroit la rente 725 livres ; donc multipliant 725 livres par 20, le produit 14500 livres ſera le fonds que cette perſonne doit païer pour le rachat de cette rente.

725
20
14500 livres.

Et ſi on avoit propoſé de faire ce rachat à raiſon de 5 pour 100, qui eſt la même choſe que le denier 20, j'aurois dit : Si 5 livres viennent de 100, 725 livres d'où viennent-elles ?

Multipliant 725 par 100, & diviſant le produit 72500 par

5, le quotient auroit été 14500, de même que ci-dessus.

5.	1000.		725.
			100
	5		
	72500 |	14500.	72500
	2.2		
	2.5		
	0.0		
	0.0		
	0		

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Un débiteur veut païer la ſomme de 12566 livres qu'il doit depuis 9 ans, 3 mois & 6 jours : on demande quelle eſt la ſomme totale qu'il doit païer, en comptant les intérêts au denier 25 par année ?

Je diviſe le capital 12566 par 25, & le quotient 502 $\frac{16}{25}$ livres eſt l'intérêt d'une année.

A préſent, pour avoir les intérêts de 9 ans, 3 mois & 6 jours, je réduis 9 ans, 3 mois & 6 jours en jours, en multipliant 9 ans par 365 jours, ce qui donne 3285, auſquels j'ajoute 96 jours pour les 3 mois, 6 jours, & j'ai 3381 jours, & je dis : Si une année, ou 365 jours produiſent 502 $\frac{16}{25}$ livres, combien produiront 3381 jours ?

25		
12566 |	502 $\frac{16}{25}$	intérêts d'une année.
0.6		
6.6		
16		

Je multiplie donc 3381 par 502 $\frac{16}{25}$, c'eſt-à-dire d'abord par 502, puis par la fraction, en multipliant 3381 par le numérateur 16, & diviſant par le dénominateur 25, ce qui me donne 2163 $\frac{21}{25}$, que j'écris ſous le produit de 502 : & faiſant le produit total, j'ai 1699425 $\frac{21}{25}$, que je réduis en vingt-cinquiéme, en multipliant par 25 & ajoutant au produit 21, & j'ai 42485646 qu'il faut diviſer par le premier terme 365, après l'avoir multiplié par 25, ce qui fait 9125. Faiſant donc la diviſion, & évaluant les fractions, je

365	
9	
3285	
96	
3381	jours.

trouve pour les intérêts de 9 ans, 3 mois, 6 jours, 4655 livres 19 ſols, 2 deniers, $\frac{6290}{9125}$, auſquels ajoutant le principal 12566 livres, la ſomme totale que le débiteur doit païer eſt 17221 livres, 19 ſols, 2 deniers, $\frac{6290}{9125}$.

365.
25

1825
730

9125

502 $\frac{16}{21}$.

3381
502 $\frac{16}{21}$

6762
169050
2163 $\frac{21}{25}$

1699425 $\frac{21}{25}$
25

8497125
3398850
21

42485646

9125 | 4655 livres
4248 5646

5985.6

5106.4

5439.6

8771

8771
20

175420

9125 | 19 ſols
175420

8417.0

2045

2045
12

4090
2045

24540

9125 | 2 deniers
24540

6290

Intérêts de 9 ans, 3 mois, 6 jours, auſquels ajoutant le capital

4655 liv. 19 ſols 2 den. $\frac{6290}{9125}$.
12566 livres

17221 liv. 19 ſols 2 den. $\frac{6290}{9125}$.

Si l'on avoit propoſé la même queſtion, en comptant les intérêts à 4 pour 100, qui eſt la même choſe que le denier 25, j'aurois dit : Si 100 produiſent 4, combien 12566 produiront-ils ?

Multipliant donc 12566 par 4, & diviſant le produit par 100, j'aurois trouvé pour l'intérêt d'une année 502 livres $\frac{16}{25}$, de même que ci-deſſus. Après quoi j'aurois cherché les intérêts de 9 ans, 3 mois, 6 jours comme on vient de voir, & ajoutant ces intérêts au capital, j'aurois trouvé de même que le débiteur doit païer 17221 livres, 19 ſols, 2 deniers, $\frac{62.90}{9121}$.

100. 4 12566 R. 502 $\frac{64}{100}$ ou $\frac{16}{25}$.
4
50264

100 | 502
50 264 |
02.6
26.4
64

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Un homme a prêté 900 livres, & au bout de 6 ans on lui rend pour le capital & les intérêts 1116 livres : on demande à combien pour 100 les intérêts ſont comptés, ou à quel denier ?

Je retranche le capital 900 de la ſomme totale 1116, & le reſte 216 eſt la ſomme des intérêts de 6 ans, je diviſe cette ſomme par 6, & le quotient 36 eſt l'intérêt d'une année ; cela fait, je dis : Si 900 livres rendent 36 dans un an, 100 combien rendront-ils ? Faiſant la régle, je trouve que les intérêts ont été comptés à 4 pour 100.

1116
900
216 intérêts de 6 années.

6 |
2 16 | 36 intérêts d'une année.
3.6

Que ſi on vouloit ſavoir à quel denier on compte les intérêts, j'aurois cherché, comme ci-deſſus, l'intérêt 36 d'une année ; après quoi diviſant le capital par 36, j'aurois trouvé le denier 25, qui eſt la même choſe que 4 pour 100.

900. 36 100. Réponſe 4
100
3600

900 |
3600 | 4
00

3 6 |
9 00 | 25
18.0
0

SIXIE'ME EXEMPLE.

Une perſonne à qui on a prêté 1200 *à* 2 $\frac{1}{2}$ *pour* 100, *rend au bout de quelques années* 1440 *livres : on veut ſavoir combien d'années ſe ſont écoulées depuis le jour du prêt juſqu'au païement ?*

Je cherche d'abord l'intérêt d'une année, en diſant : Si 100 rendent 2 $\frac{1}{2}$, combien rendront 1200 ? & je trouve 30 livres.

100. 2 $\frac{1}{2}$. 1200. Réponſe 30 livres.

2 $\frac{1}{2}$

2400
600

3000

100	
3000	30 livres
00.0	
0	

30	
240	8 années.
0	

1440	
1200	
240 intérêt des années.	

Cela fait, je retranche le capital 1200 de la ſomme totale 1440, & le reſte 240 marque les intérêts des années depuis le jour de l'emprunt juſqu'au païement ; ainſi 240 eſt le produit de l'intérêt 30 d'une année, par le nombre des années ; diviſant 240 par 30, le quotient 8 marque le nombre d'années que le débiteur a gardé l'argent.

Si on avoit propoſé l'intérêt au denier 40, qui eſt la même choſe que 2 $\frac{1}{2}$ pour 100, j'aurois diviſé le capital 1200 par 40, & le quotient 30 auroit marqué l'intérêt d'une année ; après quoi j'aurois achevé le reſte de même que ci-deſſus.

40	
1200	30
00.0	
0	

SEPTIE'ME EXEMPLE.

Un débiteur a païé à ſon créancier la ſomme de 1800 *liv. tant pour le capital, que pour les intérêts à* 5 *pour* 100, *d'une ſomme qu'il a gardée pendant* 4 *ans : on demande quel eſt le capital ?*

Pour trouver ce capital, je ſuppoſe qu'il eſt 100 liv. leſquelles au bout de 4 ans rendroient 20 liv. ainſi la ſomme totale ſeroit

120,

126, laquelle eſt bien différente de 1800; je me trompe donc dans ma ſuppoſition, mais en me trompant, je trouve le moïen de venir à bout de ce que je cherche; car ſi 120 livres païées au bout de 4 ans viennent de 100, 1800 livres d'où viendront-elles? Faiſant la régle à la maniere ordinaire, je trouve que le capital eſt 1500 livres.

120. 100. 1800 Rép. 1500 l.

100

120 | 1500 liv. 180000
18 0000

60.0

00.0

0.0

0

Que ſi on avoit dit que les intérêts étoient au denier 20, j'aurois ſuppoſé que le capital étoit 20, lequel au bout de 4 ans auroit rendu 4 liv. & ces 4 liv. jointes à 20 auroient fait 24; ainſi j'aurois dit: Si 24 au bout de 4 ans viennent de 20, 1800 d'où viendront-elles? Et faiſant la régle, j'aurois trouvé 1500 livres de même que ci-deſſus.

24. 20. 1800 Rép. 1500 l.

20.

24 | 1500 liv. 36000
3 6000

12.0

00.0

0.0

HUITIE'ME EXEMPLE.

Une perſonne a emprunté 500 liv. dont elle s'eſt engagée de païer l'intérêt à 5 pour 100 à la fin de l'année; mais le terme échu, elle n'a pu païer ni le capital, ni les intérêts, & le créancier lui a accordé une prolongation d'une année, à condition qu'elle païeroit les intérêts du capital, & des arrerages ſur le même pied; or à la fin de la ſeconde année ſe trouvant dans l'impuiſſance de païer, elle a obtenu une ſeconde prolongation aux mêmes conditions, & l'on demande combien elle doit païer à la fin de la troiſiéme année pour le capital, les intérêts, & les intérêts des intérêts?

Je prens d'abord l'intérêt d'une année, en diſant: Si 100 rén-

dent 5, combien 500 liv. rendront-elles ? Et je trouve que cet intérêt eſt 25 livres.

J'ajoute ces 25 liv. au capital, ce qui fait 525, & je dis : Si 100 rendent 5, combien 525 livres rendront-elles ? Faiſant la régle, je trouve 26 $\frac{1}{4}$, leſquelles ajoutées à 525, font 551 $\frac{1}{4}$; & je dis : Si 100 rendent 5, combien rendront 551 $\frac{1}{4}$? Faiſant la régle, & évaluant les fractions, je trouve pour l'intérêt de la troiſiéme année 27 livres, 11 ſols, 3 deniers, & ajoutant à ces intérêts le capital de l'année précédente 551 $\frac{1}{4}$, qui renferme le premier capital, l'intérêt de la premiere année, celui de la ſeconde, & l'intérêt de l'intérêt de la premiere, je trouve que le créancier doit retirer en tout 578 livres, 16 ſols, 3 deniers.

100. 5. 500 — Réponſe 25 livres.

5

2500

100 | 25 00 | 25 intérêt d'une année.

50.0

00

100. 5. 525 — Réponſe 26 $\frac{5}{20}$

5

2625

100

26 25 | 26 $\frac{25}{100}$ ou $\frac{5}{20}$

62.5

25.

100. 5.

4

400 quarts.

400 | 110 25 | 27 liv.

302.5

225

551 $\frac{1}{4}$

5

2755

1 $\frac{1}{4}$

2756 $\frac{1}{4}$

4

11024

1

11025 quarts.

225

20

4500 ſols.

Si on avoit propoſé la queſtion en comptant l'intérêt au denier 20, qui eſt la même choſe que 5 pour 100, j'aurois diviſé le capital 500 par 20, & le quotient 25 m'auroit donné l'intérêt de la premiere année. J'aurois enſuite ajouté 25 au capital, ce qui auroit fait 525, & diviſant par 20, j'aurois

eu 26 $\frac{1}{4}$ pour l'intérêt de la ſeconde année, lequel ajouté à 525 auroit fait 551 $\frac{1}{4}$, & diviſant encore par 20, c'eſt-à-dire réduiſant le dividende & le diviſeur en quarts, faiſant la diviſion, & évaluant les fractions, j'aurois trouvé pour l'intérêt de la derniere année 27 livres, 11 ſols, 3 deniers, de même que ci-deſſus : ajoutant donc cet intérêt au capital précédent 551 $\frac{1}{4}$ ou 551 livres, 5 ſols, le total auroit été encore 578 livres, 16 ſols, 3 den.

On peut trouver ces intérêts d'intérêts, & la ſomme totale du capital, des intérêts, & des intérêts d'intérêts par une méthode plus courte, & très-ingénieu-

```
400 | 11 ſols        100
4500 |               12
-----               ---
 50.0               200
 ---                100
 100                ---
                    1200 deniers

 400 |
1200 | 3 deniers
-----
  00
```

Intérêts de la derniere année, 27 liv. 11 ſ. 3 den.
auſquels ajoutant le capital précédent, 551 liv. 5 ſ.
on a la ſomme totale 578 liv. 16 ſ. 3 den.

```
 20 |                20.0
500 | 25             525 | 26 1/20 ou 1/4
----                  ----
 10.0                 12.5
 ---                  ---
  0                    5

  20                  551 1/4
   4                    4
  ---                 ----
  80 quarts           2204
                         1
                      ----
                      2205 quarts

  80                   45
2205 | 27 livres        20
-----                 ---
 60.5                 900 ſols
 ---
  45

  80                   20
 900 | 11 ſols          12
-----                 ---
 10.0                  40
 ---                   20
  20                   --
                       240 deniers
```

ſe, que j'expliquerai dans l'exemple ſuivant.

80 | 3 deniers
240 |
0

NEUVIE'ME EXEMPLE.

Un pupille a hérité de ſon pere de la ſomme de 12000 *liv. dont ſon tuteur a eu l'adminiſtration pendant ſix ans, & l'on veut ſavoir à quoi ſe montera le compte que ce tuteur doit rendre à raiſon de* 5 *pour* 100 *par an, en mettant toujours intérêt ſur intérêt.*

En ſuivant la méthode précédente, je prens l'intérêt de 12000 liv. pour un an, en diſant : Si 100 rendent 5, combien rendront 12000 ? Et je trouve 600 liv. pour l'intérêt d'une année.

J'ajoute ces 600 liv. au capital 12000, ce qui fait 12600, & je dis : Si 100 rendent 5, combien rendront 12600 ? Et la régle me donne 630 liv. pour l'intérêt de la ſeconde année. J'ajoute cet intérêt au capital précédent 12600, & la ſomme eſt 13230 liv. Ainſi je dis : Si 100 rendent 5, combien rendront 13230 liv. & la régle me donne 661 $\frac{1}{2}$ pour l'intérêt de la troiſiéme année. Ajoutant cet intérêt au capital ptécédent 13230 liv. j'ai 13891 $\frac{1}{2}$, & je dis : Si 100 rendent 5, combien ren-

100. 5. 12000 Réponſe 600 livres.
5
60000
100 | 600
60 000 |
000.0
0.0
0

600
12000
12600 capital de la ſeconde année.

100. 5. 12600 Réponſe 630 livres.
5
63000
100 | 630 livres
63000 |
30.0
00.0
0

12600
630
13230 capital de la troiſiéme année.

dront 13891 $\frac{1}{2}$? Et je trouve 694 livres $\frac{23}{40}$ pour l'intérêt de la quatriéme année. J'ajoute cet intérêt au capital précédent 13891 $\frac{1}{2}$, & la somme eſt 14586 $\frac{3}{40}$.

Ainſi je dis : Si 100 rendent 5, combien rendront 14586 $\frac{3}{40}$?

100.	5.	13230	Réponſe 661 $\frac{1}{2}$.
		5	
		66150	
100			
66 190	661 l. $\frac{38}{100}$ ou $\frac{1}{2}$		
615		13230	
		661 $\frac{1}{2}$	
150		13891 $\frac{1}{2}$	capital de la quatriéme année.
50			

Faiſant la régle, je trouve 729 liv. $\frac{141}{800}$ pour l'intérêt de la cinquiéme année. Ajoutant cet intérêt au capital précédent 14586 $\frac{3}{40}$, la ſomme eſt 15315 liv. $\frac{303}{800}$; & je dis : Si 100 rendent 5, combien rendront 15315 liv. $\frac{303}{800}$?

100.	5.	13891 $\frac{1}{2}$	R. 694 l. $\frac{115}{100}$ ou $\frac{23}{40}$.	
2		5		
200		69455		
		2 $\frac{1}{2}$		
200				
138915	694	69457 $\frac{1}{2}$		
		2.		13891 $\frac{1}{2}$ ou $\frac{23}{40}$
1891				694
		138914		
915		1		14586 $\frac{3}{40}$
				capital de la cinquiéme année.
115		13891 5		

Faiſant la régle, je trouve 765 liv. 15 ſ. 4 den. $\frac{41600}{80000}$ ou $\frac{109}{200}$ pour l'intérêt de la ſixiéme année ; & ajoutant cet intérêt au capital précédent, qui renferme le premier capital, les intérêts des années précédentes, & les intérêts des intérêts, la ſomme totale après avoir évalué la fraction $\frac{303}{800}$ du capital précédent, eſt 16081 liv. 2 ſ. 11 d. $\frac{89}{100}$, dont le tuteur doit rendre compte à ſon pupille pour l'adminiſtration de ſon bien pendant ſix ans.

100. 5. 14586 $\frac{3}{40}$ Réponse 729 liv. $\frac{1215}{4000}$ ou $\frac{303}{1000}$.

40 5

4000 72930 $\frac{15}{40}$

40

2917200

15

2917215

4000 | 729
2917 215

11721

37215

1215

14586 $\frac{3}{40}$ ou $\frac{60}{100}$ $\frac{143}{100}$

729

15315 $\frac{303}{1000}$ capital de la sixiéme année.

100 5. 15315 $\frac{303}{800}$ R. 765 l. 9 s. 4 d. $\frac{100}{200}$.

800 5

80000 76575

1 $\frac{715}{800}$

76576 $\frac{715}{800}$

800

61260800

715

61261515

80000 | 765 livres
61261 515

526151.

46151.5

61515

61515

20

1230300 sols

30300

12

60600

30300

363600. deniers

80000 | 15 sols
12303 00

43030.0

30300

80000 |	
363600 |	4 deniers
43600	

15315 livres 7 sols 6 deniers $\frac{180}{200}$.
765 livres 15 sols 4 deniers $\frac{102}{200}$

16081 livres 2 sols 11 deniers $\frac{89}{200}$.

Je ne m'arrête point à expliquer comment il faudroit faire si on vouloit calculer les intérêts au denier 20, qui est la même chose que 5 pour 100, ce qui est très-facile après ce qu'on a vû dans les exemples précédens. Ainsi je passe à l'explication de la méthode que j'ai promis ci-dessus, au sujet de ces sortes de calculs.

Je reprens la même question que je viens de résoudre; ainsi le fonds du pupille est 12000, le tems de l'administration du tuteur est 6 ans, & les intérêts sont à 5 pour 100, ou au denier 20.

Je range les années les unes après les autres, comme on voit ici, & faisant abstraction des intérêts d'intérêts, je considére que chacune de ces années doit produire une somme égale à la vingtiéme partie du capital; j'écris donc sous chaque année $\frac{1}{20}$: ensuite passant aux intérêts que ces $\frac{1}{20}$ doivent produire, je vois que le premier $\frac{1}{20}$ doit produire la seconde année un intérêt égal à sa vingtiéme partie; ainsi j'écris sous le $\frac{1}{20}$ de la seconde année $\frac{1}{20}$; je devrois mettre un $\frac{1}{400}$, parce que le $\frac{1}{20}$ d'un $\frac{1}{20}$ est $\frac{1}{400}$ à l'égard du capital; mais comme il n'est pas nécessaire de rapporter ce $\frac{1}{20}$ au capital, j'écris simplement $\frac{1}{20}$. Or si le premier $\frac{1}{20}$ de la premiere année produit sa vingtiéme partie à la fin de la seconde année, ce $\frac{1}{20}$ joint à celui de la seconde année produira à la fin de la troisiéme $\frac{2}{20}$; & de même les deux premiers joints à celui de la troisiéme année produiront à la fin de la quatriéme $\frac{3}{20}$, & les trois premiers joints à celui de la quatriéme année produiront à la fin de la cinquiéme $\frac{4}{20}$, & les quatre premiers joints à celui de la cinquiéme année produiront à la fin de la sixiéme $\frac{5}{20}$. Voilà donc les intérêts des premiers intérêts.

1e	2e	3e	4e	5e	6e années
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$
		$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{10}{20}$
			$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{10}{20}$
				$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$
					$\frac{1}{20}$

A présent ces nouveaux intérêts en produiront d'autres, &

j'examine que le premier de ces nouveaux intérêts, c'eſt-à-dire celui qui eſt écrit ſous la ſeconde année doit produire ſa vingtiéme partie à la fin de la troiſiéme année; ainſi j'écris $\frac{1}{20}$ ſous la troiſiéme année; & ſi ce premier produit $\frac{1}{20}$, ce premier joint au ſuivant $\frac{1}{20}$ doit produire $\frac{3}{20}$, & ces deux premiers joints au ſuivant $\frac{3}{20}$ doivent produire $\frac{6}{20}$, & ces trois premiers joints au quatriéme $\frac{4}{20}$ doivent produire $\frac{10}{20}$. Ainſi voilà les intérêts des ſeconds intérêts.

Ces nouveaux intérêts en produiront encore d'autres, & je vois que le premier, c'eſt-à-dire celui qui eſt ſous la troiſiéme année, doit produire à la fin de la quatriéme ſa vingtiéme partie; ainſi j'écris ſous la quatriéme $\frac{1}{20}$, & ſi ce premier produit $\frac{1}{20}$, ce premier joint au ſecond, qui eſt $\frac{3}{20}$, produira à la fin de la cinquiéme année $\frac{4}{20}$, & ces deux premiers joints au troiſiéme, qui eſt $\frac{6}{20}$, produiront à la fin de la ſixiéme année $\frac{10}{20}$. Voilà donc les intérêts des troiſiémes intérêts.

Ceux-ci en produiront encore d'autres; car le premier étant ſous la quatriéme année, produira à la fin de la cinquiéme ſa vingtiéme partie; ainſi j'écris ſous la cinquiéme année $\frac{1}{20}$, & ſi ce premier produit un $\frac{1}{20}$, ce premier joint au ſecond, qui eſt $\frac{4}{20}$, produira à la fin de la ſixiéme année $\frac{1}{20}$. Ainſi voilà les intérêts des quatriémes intérêts.

De ces nouveaux intérêts il n'y aura que le premier qui produira, parce que ce premier étant ſous la cinquiéme année, produira à la fin de la ſixiéme ſa vingtiéme partie; ainſi j'écris ſous la ſixiéme année $\frac{1}{20}$, & ce $\frac{1}{20}$ eſt le dernier intérêt d'intérêts qu'on puiſſe compter.

Cela fait, le premier rang de gauche à droite, c'eſt-à-dire celui qui eſt écrit immédiatement ſous les années, me fait voir qu'il faut que je prenne 6 fois la vingtiéme partie du capital, puiſque ce rang contient 6 vingtiémes. De là paſſant au ſecond rang, j'ajoute tous les numérateurs enſemble, ce qui fait 15; & ce 15 me fait voir qu'il faut que je prenne 15 fois la vingtiéme partie du premier intérêt. Ajoutant de même les numérateurs du troiſiéme rang, leur ſomme 20 me fait voir que je dois prendre 20 fois la vingtiéme partie du ſecond intérêt. Ajoutant auſſi les numérateurs du quatriéme rang, je vois par leur ſomme 15 qu'il faut que je prenne 15 fois la vingtiéme partie du troiſiéme intérêt; & la ſomme 6 des numérateurs du cinquiéme rang me montre qu'il faut prendre 6 fois la vingtiéme partie du quatriéme intérêt; &

enfin

enfin le numérateur 1 du dernier rang me montre que je dois prendre le $\frac{1}{20}$ du cinquiéme intérêt.

Je diviſe donc le capital 12000 par 20, & j'ai 600, qui eſt le premier intérêt.

Je diviſe 600 par 20, & j'ai 30, qui eſt le ſecond intérêt.

Je diviſe 30 par 20, & j'ai 1 livre, 10 ſols, qui eſt le troiſiéme intérêt.

Je réduis 1 liv. 10 ſols en ſols, ce qui fait 30 ſols, & diviſant par 20, j'ai 1 ſol, 6 deniers, qui eſt le quatriéme intérêt.

Je réduis celui-ci en deniers, ce qui fait 18 deniers, & diviſant par 20, j'ai $\frac{18}{20}$, qui eſt le cinquiéme intérêt.

Enfin le $\frac{1}{20}$ de $\frac{18}{20}$ eſt $\frac{18}{400}$, & c'eſt le dernier intérêt.

Voilà donc les valeurs de ces différentes eſpéces d'intérêts; ainſi je prens le capital 12000. J'y ajoute le premier intérêt 600 multiplié par 6, ce qui fait 3600. J'y ajoute le ſecond intérêt 30 multiplié par 15, ce qui fait 450; puis le troiſiéme intérêt 1 liv. 10 ſols multiplié par 20, ce qui fait 30 livres; puis le quatriéme intérêt 1 ſol, 6 deniers multiplié par 15, ce qui fait 1 livre, 2 ſols, 6 deniers; puis le cinquiéme intérêt $\frac{18}{20}$ multiplié par 6, ce qui fait 5 deniers $\frac{8}{20}$; & enfin le ſixiéme intérêt $\frac{18}{400}$; & faiſant une ſomme totale de toutes ces ſommes, je trouve 16081 liv. 2 ſols, 11 deniers $\frac{89}{200}$, qui eſt la ſomme dont le tuteur doit rendre compte à ſon pupille, ainſi que nous avons trouvé par la méthode précédente.

20 | 12 000 | 600 premier intérêt

0.0

0.0

0

20 | 600 | 30 ſecond intérêt

0.0

0

20 | 30 | 1 l. 10 ſ. troiſiéme intérêt

10

20 | 30 | 1 ſ. 6 d. quatriéme intér.

10

20 | 120 | 6 den.

0

10 × 12 = 120

$\frac{18}{20}$ cinquiéme intérêt

$\frac{18}{400}$ ſixiéme intérêt.

600		1 liv. 10	1 ſ. 6 den.	
6	30	20	15	
	15			
3600		20	15	18
	150	10	7 ſ. 6 den.	6
	30			
		30	22 ſ. 6 den.	108
	450			
			1 l. 2 ſ. 6 d.	

12000
3600
450
30

20 | 108 | 5

1 livre 2 ſols 6 deniers — 8

5 deniers $\frac{8}{20}$ ou $\frac{160}{400}$ ou $\frac{18}{400}$

1608 l. 2 ſ. 11 deniers. $\frac{178}{400}$, ou $\frac{89}{200}$

Si on examine bien les rangs que nous avons fait ci-deſſus pour ces différens intérêts, on en tirera aiſément une régle générale pour toute ſorte de queſtions ſemblables à celle-ci. Car 1°. dans le premier rang qui contient les premiers intérêts, le dénominateur de la fraction eſt le même que le denier auquel on doit ſupputer les intérêts, c'eſt-à-dire 20; & le numérateur eſt toujours un. 2°. Dans le ſecond rang qui contient les ſeconds intérêts, les dénominateurs ſont les mêmes, mais les numérateurs varient, deſorte que le premier eſt égal au premier numérateur du premier rang, le ſecond eſt égal à la ſomme des deux premiers numérateurs du premier rang, le troiſiéme eſt égal à la ſomme des trois premiers, le quatriéme à la ſomme des quatre premiers, & ainſi de ſuite. De même dans le troiſiéme rang qui contient les troiſiémes intérêts, le premier numérateur eſt égal au premier numérateur du ſecond rang, le ſecond eſt égal à la ſomme des deux premiers de ce même rang, le troiſiéme eſt égal à la ſomme des trois premiers, & ainſi de ſuite: ce qui arrive également dans les autres rangs inférieurs, de façon que dans quelque rang que ce ſoit, le numérateur d'un terme eſt toujours égal à la ſomme des numérateurs qui le précédent dans le rang qui lui eſt immédiatement ſupérieur.

Cela ſuppoſé, ſi on demande le compte d'un pupille dont les

biens ont été administrés par exemple pendant dix ans, & qu'on veüille supputer les intérêts au denier 25,

1e	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e années.
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{9}{25}$
		$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{28}{25}$	$\frac{36}{25}$
			$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{20}{25}$	$\frac{35}{25}$	$\frac{56}{25}$	$\frac{84}{25}$
				$\frac{1}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{35}{25}$	$\frac{70}{25}$	$\frac{126}{25}$
					$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{56}{25}$	$\frac{126}{25}$
						$\frac{1}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{28}{25}$	$\frac{84}{25}$
							$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{36}{25}$
								$\frac{1}{25}$	$\frac{9}{25}$
									$\frac{1}{25}$

On rangera les dix années comme on voit ici, après quoi on mettra sous chacune d'elles $\frac{1}{25}$, parce qu'on compte au denier 25. Pour le second rang on mettra $\frac{1}{25}$ sous la seconde année, puis 2, 3, 4, &c. en faisant les sommes successives des numérateurs du premier rang. Pour le troisiéme on mettra $\frac{1}{25}$ sous la troisiéme année, puis 3, 6, 10, &c. en faisant les sommes des numérateurs du second rang. On fera la même chose pour les autres rangs jusqu'au dernier.

Cela fait, le premier rang fera voir qu'il faut prendre dix fois le $\frac{1}{25}$ du capital pour avoir les premiers intérêts. Pour les seconds intérêts il n'y aura qu'à prendre le dernier numérateur à droite du troisiéme rang, parce que ce numérateur est la somme de tous ceux qui le précédent dans le second rang, & ajouter à ce numérateur 36 le dernier numérateur 9 du second rang, & la somme 45 fera voir qu'il faut prendre 45 fois le $\frac{1}{25}$ du premier intérêt pour avoir les seconds. Ensuite pour les troisiémes on prendra le dernier numérateur à droite du quatriéme rang, parce que ce numérateur 84 est la somme de tous les numérateurs qui le précédent dans le troisiéme, & ajoutant à 84 le dernier numérateur 36 du troisiéme rang, la somme 120 fera voir qu'il faut prendre 120 fois le $\frac{1}{25}$ des seconds intérêts pour avoir les troisiémes. On fera la même chose pour les autres rangs; après quoi prenant ces $\frac{1}{25}$ autant de fois que les sommes les marquent, & ajoutant

toutes ces ſommes au capital, on aura la ſomme totale cherchée.

DIXIE'ME EXEMPLE.

Une perſonne a prêté 125 *liv. & au bout de deux ans on lui rend* 151 *liv.* 5 *ſols, tant pour le capital, que pour les intérêts & intérêts d'intérêts ; on demande à combien pour* 100, *ou à quel denier on compte les intérêts ?*

Quand on met ainſi intérêts ſur intérêts, il arrive que le capital de la premiere année, celui de la ſeconde, celui de la troiſiéme, & ainſi de ſuite, ſont entr'eux une progreſſion géométrique, c'eſt-à-dire que ſi l'intérêt eſt par exemple au denier 20, le capital de la premiere année eſt à celui de la ſeconde comme 20 eſt à 21, celui de la ſeconde eſt à celui de la troiſiéme comme 20 eſt à 21, & ainſi de ſuite toujours dans la même raiſon. Or parmi les propriétés des progreſſions géométriques que nous expliquerons en leur lieu, celle d'où dépend la réſolution de la queſtion préſente conſiſte en ce que ſi l'on multiplie le premier terme par le troiſiéme, & qu'on tire la racine quarrée de ce produit ſelon la méthode que nous enſeignerons plus bas, cette racine eſt égale au ſecond terme ; & ſi on multiplie le premier terme par lui-même, & puis par le quatriéme, la racine cubique de ce produit ſera égale au ſecond terme ; & ſi après avoir multiplié le premier terme deux fois par lui-même, on le multiplie par le cinquiéme, la racine quatriéme de ce produit ſera égale au ſecond terme ; & ſi on multiplioit le premier terme trois fois ſucceſſivement par lui-même, & enſuite par le ſixiéme terme, la racine de ce produit ſeroit encore égale au ſecond terme, & ainſi de ſuite à l'infini, en augmentant toujours les multiplications du premier terme, puis multipliant par les termes plus éloignés, & tirant des racines plus hautes.

Cela ſuppoſé, je multiplie le capital de la premiere année par celui de la troiſiéme. Mais comme je m'apperçois qu'il y aura des ſols au produit, je les réduis auparavant l'un & l'autre en ſols, afin que venant à ſe multiplier, le produit devienne 400 fois plus grand qu'il ne faut ; ce que je fais ainſi, parce que 400 étant un nombre quarré dont la racine eſt 20, ce qui viendra à la racine contiendra des $\frac{1}{20}$ de livres, c'eſt-à-dire des ſols. Faiſant donc la multiplication, le produit eſt 7562500, dont je tire la racine quarrée, & cette racine eſt 2750 ſols, que je réduis en li-

vres, en prenant la moitié de toutes les figures qui ſont avant la derniere à droite, & mettant le reſte à la place des ſols, ainſi que je l'ai enſeigné dans mes Remarques ſur la diviſion ſimple. J'ai donc 137 liv. 10 ſols, qui eſt le capital de la ſeconde année. Retranchant donc le capital de la premiere année de celui-ci, le reſte 12 livres, 10 ſols me marque les intérêts de la premiere; & je dis: Si 125 rendent 12 liv. 10 ſols, combien rendent 100 livres? Et je trouve 10 livres; ce qui me fait voir que cet homme avoit prêté ſon argent à 10 pour 100.

Et ſi cette ſomme avoit été gardée quatre années, & qu'à la fin on eût rendu 166 liv. 7 ſols, 6 deniers tant pour le capital, que pour les intérêts, & les intérêts des intérêts; voici comme j'aurois trouvé le capital de la ſeconde année, & le denier ſur le pied duquel on comptoit les intérêts.

Comme il y a des deniers au capital 166 liv. 7 ſols, 6 deniers, je le réduis d'abord en deniers, ce qui fait 39930

125 × 20 = 2500

151 liv. 5 ſols × 20 = 3020 + 5 = 3025 × 2500 = 7562500

7|56|25|00 | 275.0

4 — 137 liv. 10 ſols.

356
47

27.25
54.5

00.000
55.00

00 00

137 livres 10 ſols.
125

12 livres 10 ſols.

125 — 12 liv. 10 ſols — 100

100

1200
50

1250

125
1250 | 10 livres.

00.0

0

deniers. Je réduis de même le premier capital 125 en deniers, en le multipliant par 240, parce que la livre aïant 20 ſ. & le ſ. 12 deniers, 20 fois 12 font 240. Ce capital ainſi réduit eſt 30000 deniers, je le multiplie par lui-même, & j'ai 900000000. Je multiplie le ſecond capital 39930 par 900000000, & le produit eſt 35937000000000, dont j'extrais la racine cubique qui doit me donner des deniers, parce que le premier capital aïant été réduit en deniers, & s'étant enſuite multiplié lui-même, a produit des deniers par des deniers, leſquels ont été encore multipliés par les deniers du ſecond capital. Tirant donc cette racine, j'ai 33000 deniers, dont je prens le $\frac{1}{12}$ pour en faire des ſols; puis tirant le $\frac{1}{20}$ des ſols, j'ai 137 liv. 10 ſols, qui eſt le capital de la ſeconde année de même que ci-deſſus. J'en retranche le capital de la premiere année, le reſte 12 liv. 10 ſols marque l'intérêt que le premier capital a produit. C'eſt pourquoi je dis: Si 125 ont produit 12 liv. 10 ſols, combien produiront 100 livres? Et je trouve 10 liv. ce qui me fait voir que cette ſomme avoit été prêtée à 10 pour 100, ou au denier 10.

125
240
5000
250
30000 deniers
30000
900000000

166 livres 7 ſols 6 deniers
20
3320
7
3327 ſols
12
6654
3327
6
39930 deniers
900000000
35937000000000

35|937|000|000|000 | 33000 deniers
27 | 2750 ſols
8937 | 137 l. 10 ſ.
8937
0000

27
3
81
81
27
8937

137 livres 10 ſols
125 livres

12 livres 10 ſols intérêts de la premiere année.

125 livres. 12 livres 10 ſols. Réponſe 10 livres.

100

1200 | 125
50 | 12 50 | 10 livres

1250 | 0.0

Si l'argent avoit été gardé cinq années, & qu'on m'eût fait connoître le capital de la cinquiéme année, j'aurois multiplié le capital deux fois conſécutives par lui-même, puis par le capital de la derniere année, & j'aurois extrait la racine quatriéme, ou deux fois conſécutivement la racine quarrée du produit, & la racine auroit été le capital de la ſeconde année; & ſi l'on m'avoit fait connoître le capital de la ſixiéme année, en ſuppoſant que le débiteur n'eût païé qu'en ce tems-là, j'aurois multiplié le premier capital trois fois conſécutives par lui-même, puis par le capital de la ſixiéme année, & tirant la racine cinquiéme du produit, j'aurois eu tout de même le capital de la ſeconde année.

Ces calculs ſont extrêmement embarraſſans non-ſeulement par leur longueur, ſurtout lorſqu'il y a des deniers, qu'il faut toujours obſerver de multiplier autant de fois que l'exige la racine qu'on tire, mais encore à cauſe des racines mêmes, qui ſont extrêmement difficiles à tirer lorſqu'elles vont au-delà de la racine cubique. Nous enſeignerons plus bas de quelle maniere on peut extraire ces racines; car quoiqu'on puiſſe ſe paſſer de cette connoiſſance eu égard à la queſtion préſente, qui me paroît plus curieuſe qu'utile, attendu qu'il n'y a perſonne qui ne ſache à quel denier on prête ſon argent quand on le prête; il y a bien des queſtions géométriques qu'il ne ſeroit pas poſſible de réſoudre ſi l'on ne pouvoit emploïer ce moïen.

Les queſtions qui regardent les intérêts & intérêts d'intérêts peuvent ſe réſoudre d'une maniere très-courte & très-commode par la voïe des logarithmes, ainſi qu'on verra ſur la fin de la derniere partie de cet Ouvrage, où nous donnerons des exemples qui apprendront à en faire le calcul.

De la Regle d'Eſcompte.

VIII. Eſcompter dans le langage des Commerçans, c'eſt rabattre les intérêts d'une ſomme qu'on païe avant le terme, à proportion de l'anticipation du païement. Cet eſcompte ſe fait ordinairement à tant pour 100, comme à quatre, à cinq, à ſix, à dix, &c. mais avec cette différence, qu'au lieu qu'on donne 4, ou 5, ou 6 pour chaque 100, lorſqu'on païe les intérêts d'une ſomme empruntée, ici on ne rabat 4, ou 5, ou 6 que ſur 104, ou ſur 105, ou ſur 106.

Pour en comprendre la raiſon, ſuppoſons qu'un homme doive païer 100 liv. au bout de l'année, & qu'on conſente de lui rabattre 10 pour 100 s'il païe au commencement de cette même année; ce qu'on doit lui rabattre doit être égal à ce qu'il gagneroit s'il ne païoit qu'au terme échu : or en païant au bout de l'année, il donneroit 100 liv. & ces 100 liv. ſeroient compoſées d'un capital & d'un intérêt à 10 pour 100, qu'il auroit reçu d'autre part. Ainſi pour ſavoir quel eſt le capital contenu dans cette ſomme, il n'y a qu'à dire : Si 110 au bout de l'année viennent d'avoir prêté 100, la ſomme 100 d'où viendra-t-elle ? Et faiſant la régle, on trouvera 90 liv. 18 ſols, 2 deniers $\frac{2}{11}$, & retranchant cette ſomme de 100, on trouvera 9 liv. 1 ſol, 9 deniers $\frac{9}{11}$, qui eſt le gain que cet homme auroit fait en recevant 100 livres de quelqu'un de ſes débiteurs au bout de l'année. Donc s'il païe préſentement, on ne doit lui rabattre que 9 liv. 1 ſol, 9 deniers $\frac{9}{11}$; & par conſéquent il doit donner 90 liv. 18 ſols, 2 deniers $\frac{2}{11}$. Et pour s'aſſurer mieux que cela doit être ainſi, il faut dire : Si 100 livres que cet homme donneroit préſentement, rendroient 10 liv. au bout de l'année, 90 liv. 18 ſols, 2 deniers $\frac{2}{11}$ qu'il donne, combien lui rendroient-ils ? Et faiſant la régle, on trouveroit 9 liv. 1 ſol, 9 deniers $\frac{9}{11}$, qui eſt préciſément ce qu'on lui rabat ſur les 100 liv.

PREMIER EXEMPLE.

Un Marchand a acheté pour 1000 *liv. de marchandiſes à un an de terme : on demande ce qu'il faudroit rabattre ſur ces* 1000 *livres à raiſon de* 10 *pour* 100, *s'il païoit préſentement ?*

Je dis : Si 110 païables au bout de l'an ſe réduiſent à 100, en païant

païant au commencement de l'année, 1000 liv. à quoi se réduiront-elles?

Et faisant la règle, je trouve après avoir évalué les fractions, que 1000 liv. païables dans un an se réduiroient à 909 liv. 1 sol, 9 deniers $\frac{2}{11}$, si ce Marchand les païoit présentement. Et cela doit être ainsi; car si ce Marchand au lieu de donner ces 909 liv. 1 sol, 9 deniers $\frac{2}{11}$ au vendeur, les mettoit à intérêt à 10 pour 100, il se trouveroit à la fin de l'année que l'intérêt joint au capital feroit justement la somme de mille livres qu'il devroit donner au vendeur; desorte qu'il ne perd rien en donnant cette somme présentement, & le vendeur n'y perd rien non plus, puisqu'en mettant cette somme à intérêt, il retirera également ses mille livres au bout de l'année, de même que s'il n'avoit été païé qu'en ce tems-là. Faisons ce calcul, afin de nous en mieux assurer, en disant: Si 100 liv. de prêtées à 10 pour 100, étant jointes à leurs intérêts, au bout de l'année montent à 110, à combien monteront 909 liv. 1 sol, 9 deniers $\frac{2}{11}$?

110. 100. 1000
100

100000

110 | 100 000 | 909 livres

10.0

100.0

10

20

10

200 sols

110 | 200 | 1 sol

90

12

180

90

1080 deniers

110 | 1080 | 9 deniers

90

Réponse 909 l. 1 s. 9 d. $\frac{90}{110}$ ou $\frac{2}{11}$.

Multipliant 909 livres 1 sol, 9 deniers $\frac{2}{11}$ par 110, on trouve 100000, lesquels divisés par 100 donnent 1000 liv.

On voit par-là combien il importe de ne pas prendre le change sur ces sortes de questions; car si on comptoit ici le 10 pour 100 de la même façon qu'on le compte pour l'argent prêté, ou mis en rente; c'est-à-dire, si on rabattoit 10 pour chaque 100 livres, il faudroit rabattre 100, parce que 1000 livres au bout de l'année rendent 100 liv. & alors l'acheteur gagneroit 9 liv. 1. sol, 9 deniers $\frac{2}{11}$, qu'il païeroit de moins, & le vendeur perdroit 10 liv. parce que les 900 liv. qu'il recevroit ne pourroient lui produire au bout de l'année que 90 liv. lesquelles jointes à 900 ne feroient

que 990 liv. au lieu de mille qu'il auroit dû recevoir si l'acheteur n'avoit pas anticipé son païement.

100. 110. 909 livres 1 sol 9 deniers $\frac{9}{11}$

110

9090
909

5 livres 10 sols
2 livres 15 sols
1 livre 7 sols 6 deniers
7 sols 6 deniers

100000 0 0

100 | 1000 livres
10 0000
0 0
0 0
0 0
0

Réponse 1000 livres.

SECOND EXEMPLE.

Une personne doit païer 1800 *liv. au bout de six mois, & son créancier lui promet de lui rabattre à* 6 *pour* 100 *pour six mois, du jour qu'il pourra anticiper son païement. Or le débiteur deux mois après se trouve en état de païer, & l'on demande ce qu'il faut lui rabattre sur les* 1800 *liv.*

Je dis d'abord: Si le débiteur avoit païé au commencement des six mois, il faudroit rabattre à raison de 6 pour 100: mais comme deux mois se sont écoulés, & qu'il n'anticipe plus le païement que de quatre mois, on ne doit rabattre qu'à proportion des quatre mois. Ainsi l'escompte doit se faire à 4 pour 100.

6 mois. 6. 4 mois 4.
6
24
6 | 4
24

Je dis donc: Si 104 païables au bout de quatre mois se réduisent à 100, en païant au

commencement, à quoi se réduiront 1800 livres ? Et faisant la régle, je trouve 1730 livres, 15 sols, 4 deniers $\frac{8}{15}$; & par conséquent retranchant cette somme de 1800, le reste 69 livres, 4 sols, 7 deniers $\frac{7}{15}$ est la somme qui doit être rabattuë sur les 1809 livres.

104. 100. 1800
100
180000
104 | 1730 livres
18 0000
760
320
080
80
80
20
1600 sols
104 | 15 sols
1600
49
12
560
80
40
40
480 deniers
104 | 4 deniers
480
64

Réponse, 1730 livres 15 sols 4 deniers $\frac{64}{104}$ ou $\frac{8}{15}$.

1800
1730 livres 15 sols 4 deniers $\frac{8}{15}$.

69 livres 4 sols 7 deniers $\frac{7}{15}$. somme à rabattre.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un créancier aïant besoin de 1500 *livres que son débiteur lui doit païer dans une année, s'engage de lui rabattre à raison de* 10 *pour* 100 *par an, quand il voudra anticiper le païement. Or il arrive que le débiteur est en état de le païer au bout de huit mois & demi, & l'on demande comment il faut escompter avec lui, & quelle est la somme qu'il doit païer ?*

L'anticipation n'étant que de trois mois & demi, je dis : Si douze mois rabattent 10 pour 100, combien rabattront trois mois & demi ? Et je trouve 2 $\frac{11}{12}$.

Ainſi je dis : Si 102 $\frac{11}{12}$ ſe réduiſent à 100 liv. en païant préſentement, à combien ſe réduiront 1500 livres ?

Faiſant la régle, & évaluant les fractions, je trouve que le débiteur doit païer 1457 livres, 9 ſols, 9 deniers $\frac{141}{247}$; & par conſéquent retranchant cette ſomme du capital 1500, on aura 42 livres, 10 ſols, 2 deniers $\frac{106}{247}$ que le créancier doit rabattre ſur le capital, pour être païé trois mois & demi avant le terme.

12. 10. 3 $\frac{1}{2}$ Réponſe 2 $\frac{11}{12}$.

3 $\frac{1}{2}$

30
5

35

12 | 35 | 2 $\frac{11}{12}$

11

102 $\frac{11}{12}$. 100. 1500.
12 100

204 150000
102 12
11

1235 300000
150000

1800000

1235
1800000 | 1457 livres.

5650

7100

9250

605

605
20

12100 ſols

12350 | 9 ſols.
12100

985

1235 | 9 deniers
11820

705

985
12

1970
985

11820 deniers

Réponſe 1457 liv. 9 ſ. 9 den. $\frac{141}{247}$.

1500
1457 livres 9 ſols 9 deniers $\frac{141}{247}$.

42 livres 10 ſols 2 deniers $\frac{106}{247}$.

Régle de Change.

IX. L'embarras que cauſe l'argent lorſqu'il faut le tranſporter d'un Païs à un autre, & les dangers que l'on court dans les voïages ont donné occaſion à l'établiſſement des Banquiers dans pluſieurs Villes, telles que Paris, Lyon, & quelques autres, qu'on appelle pour cela Places de Change. Quand on veut faire tenir de l'argent en quelque Ville, on va trouver un Banquier, à qui on compte la ſomme, en païant le change à tant pour 100, & ce Banquier vous fournit une Lettre de change, au moïen de laquelle ſon Correſpondant païe la même ſomme dans cette Ville, en rabattant le change, ſi on ne l'a pas païé à meſure qu'on a donné la ſomme. Et au contraire ſi l'on a beſoin d'argent pour faire un voïage, on va le prendre chez le Banquier, en lui donnant une Lettre de change dans laquelle ſont compris les intérêts qu'il doit percevoir. Or ſelon les cas différens ou les différentes manieres de prendre ou de donner cet argent, il arrive que les intérêts doivent être comptés ou à tant pour 100, comme dans les emprunts; ou ſimplement en rabattant, comme dans les régles d'eſcompte: ce que les exemples ſuivans vont faire voir.

PREMIER EXEMPLE.

Un homme voulant envoïer de l'argent à ſon fils qui eſt à Lyon, va trouver un Banquier, pour lui faire tenir 4000 *livres: on demande combien il doit compter au Banquier, en y comprenant le change des* 4000 *liv. à* 3 *pour* 100?

Puiſque pour chaque 100 livres que le Banquier s'oblige de faire tenir à Lyon, il doit lui revenir 3 livres, je dis: Si 100 livres donnent 3, combien 4000 livres? Et la régle donne 120 liv. de change, leſquelles ajoutées aux 4000 liv. font 4120 livres que cet homme doit donner au Banquier, afin que ſon fils touche ces 4000 livres net à Lyon, & ſans y rien rabattre.

100. 3. 4000. Rép. 120 liv.

4000
3

12000

100 | 120 livres
12 000

4000
120

200
00

4120 livres

Mais ſi cet homme vouloit faire porter le change à ſon fils, & ne donner au Banquier que 4000. liv. alors il faudroit bien ſe garder de dire que le Banquier dût avoir 120 liv. pour ſon change;

car ſi ſur 4120 livres qu'il a reçuës, il n'a que 120 liv. pour ſon change, il doit donc en avoir moins ſur 4000 livres; & de même ſi celui qui donne argent comptant 4120 ne perd que 120 livres, il doit certainement perdre moins en donnant 4000 livres comptant. Ainſi la queſtion ſe réduit à une régle d'eſcompte, & l'on doit dire: Si ſur 4120 liv. que le Banquier s'engage de faire tenir à Lyon, il y en a 120 pour ſon compte, combien y en aura-t-il lorſqu'il s'engagera de faire tenir 4000 livres? Et cela ſe réduit encore à dire: Si ſur 103 le Banquier a 3, ſur 4000 combien aura-t-il? Ou ſi ſur 103 le Banquier doit rendre 100, ſur 4000 livres, combien devra-t-il rendre?

103. 3. 4000

3

12000

103 | 12000 | 116 livres

170

67.0

52

52

20

1040 ſols

103 | 1040 | 10 ſols

1.0

10

10

12

20

10

120

103 | 120 | 1 denier

17

Réponſe 116 livres 10 ſols 1 denier $\frac{17}{103}$.

4000

116 livres 10 ſols 1 denier $\frac{17}{103}$.

3883 livres 9 ſols 10 deniers $\frac{86}{103}$.

103. 100. 4000 Rép. 3883 l. 9 ſ. 10 d. $\frac{86}{103}$.

100

400000

103 | 400000 | 3883 livres

910

860

360

51

52

20

1040 ſols

Faisant la régle selon la premiere supposition, on trouvera 116 liv. 10 sols, 1 denier $\frac{17}{103}$ que le Banquier doit retenir sur les 4000 liv. qu'il doit faire tenir à Lyon; & par conséquent retranchant cette somme de 4000 liv. on trouvera que le fils de cet homme ne doit recevoir que 3883 liv. 9 sols, 10 deniers $\frac{86}{103}$.

103 | 9 sols
1020

93

103 | 10 sols
11 16

8.6

86

93
12

186
93

1116

Et faisant la régle selon la seconde supposition, c'est-à-dire, si sur 103 le Banquier rend 100, combien rendra-t-il sur 4000 livres? On trouvera qu'il doit rendre 3883 liv. 9 sols, 10 deniers $\frac{86}{103}$, de même que ci-dessus. Voilà donc deux cas différens pour la même somme, dans l'un desquels le Banquier doit avoir pour son change 120 liv. & dans l'autre il ne doit avoir que 116 liv. 10 sols, 1 denier $\frac{17}{103}$; ce qui fait une différence de 3 liv. 9 sols, 10 deniers $\frac{86}{103}$; différence qui deviendroit encore plus grande si la somme principale augmentoit, & qui par conséquent n'est pas à négliger. Au reste la régle du change, lorsqu'il s'agit d'escompter, se fait toujours comme je l'ai faite ici selon la seconde supposition, & je ne l'ai faite selon la premiere que pour faire voir la certitude des régles, & leur parfait accord.

SECOND EXEMPLE.

Un homme aïant besoin de 600 *livres pour faire un voïage, va trouver un Banquier, qui lui fournit cette somme; & l'on veut savoir de combien doit être la Lettre de change qu'il doit lui remettre, en y comprenant le change à* 3 *pour* 100.

Comme le Banquier doit tirer trois livres pour chaque 100 qu'il fournit, je dis: Si 100 rendent 3, combien 600 rendront-ils? Et faisant la régle, je trouve que le change doit être 18 liv. & par conséquent ces 18 ajoutées au principal 600, font 618; ainsi la Lettre de change doit être de 618 liv.

Mais si cet homme en empruntant les 600 liv. du Banquier, lui fournissoit une Lettre de change de 600 liv. à tirer sur un autre, il faudroit bien prendre garde de dire que le Banquier doit

rabattre 18 sur les 600 liv. qu'il lui avance ; car si sur une Lettre de change de 618, il donne 600, se contentant de 18 de gain, sur une Lettre de change de 600 livres, il doit avoir moins de gain ; & de même si celui qui emprunte ne perd 18 livres que lorsque sa Lettre de change est de 618, il doit certainement moins perdre lorsque sa Lettre de change n'est que de 600. C'est donc encore ici une régle d'escompte, qui se réduit à dire : Si sur 103 que porte une Lettre de change, le Banquier doit donner 100, sur 600 que donnera-t-il ?

100. 3. 600 Réponse 18 liv.

3

1800

100 | 18
1800

80.0

00

600
18

618 livres

Et faisant la régle, on trouvera que le Banquier doit donner 582 livres, 10 sols, 5 deniers $\frac{85}{103}$; & par conséquent il y a une différence de 10 sols, 5 deniers $\frac{85}{103}$ à l'égard des 18 livres qu'il faudroit que le Banquier retirât, si l'on s'avisoit de compter autrement,

103. 100. 600 Rép. 582 l. 10 s. 5 d. $\frac{85}{103}$.

100

60000

103 | 582 livres
60000

85.0

26.0

54

54
20

1080 sols

103 | 10 sols
1080

5.0

50

50
12

100
50

600 deniers

103 | 5 deniers
600

85

Régle

Régle des Trocs.

X. Les trocs ſont fort fréquens parmi les Marchands, à cauſe des beſoins mutuels où ils ſe trouvent de leurs marchandiſes: mais comme ces ſortes d'échanges ne donnent point d'argent comptant, on s'aviſe de part & d'autre de ſe vendre plus cher, & la queſtion eſt de ſavoir ce que le ſecond doit eſtimer ſa marchandiſe en égard au prix que le premier demande de la ſienne, afin de n'être pas trompé.

PREMIER EXEMPLE.

Un Marchand a des épiceries qu'il vend 15 ſols argent comptant, & en troc il veut les faire valoir 17 ſols; un autre voulant faire un troc, lui offre de la cire qu'il vend 30 ſols argent comptant; & l'on demande combien il doit la ſurvendre, pour ne pas perdre dans cet échange?

Je dis: Si 15 ſols argent comptant ſont eſtimés 17 en troc, combien 30 ſols doivent-ils être eſtimés? Et la régle me donne 34 ſols. La raiſon de cette opération eſt évidente; car le prix de la cire étant double de celui des épiceries, il eſt viſible que quand le premier Marchand livrera deux livres d'épiceries au ſecond, celui-ci ne lui livrera qu'une livre de cire; & comme le premier gagne deux ſols ſur chaque livre, l'autre par conſéquent doit gagner 4 ſols ſur la livre de cire, afin de ne rien perdre.

15. 17 30 Réponſe 34 ſols

30

510

15 | 510 | 34 ſols

60

0

SECOND EXEMPLE.

Deux Marchands faiſant un troc enſemble, le premier a de la toile qu'il vend 54 ſols l'aune argent comptant, & qu'il veut faire valoir 57 en troc, prétendant outre cela avoir le tiers argent comptant; le ſecond a de la ſerge qu'il vend 32 ſols argent comptant, & l'on de-

mandera combien il doit la faire monter pour ne rien perdre dans ce troc.

Je prens le $\frac{1}{3}$ de 57, qui eſt 19, & le retranchant de 54 & de 57, il reſte 38 & 35. Or il eſt ſûr que ſi le ſecond Marchand avoit païé argent comptant le tiers de la toile que le premier lui livre, ce qui lui reſteroit à païer argent comptant, s'il vouloit l'acheter ainſi, ne ſeroit plus que ſur le pied de 35 ſols. Mais comme il veut païer ce reſte en troc, ce reſte doit être ſur le pied de 38 ſols. Je dis donc : Si 35 ſols argent comptant montent à 38 en troc, 32 à quoi ſe monteront-ils ? Et la régle donne 34 ſols, 8 deniers $\frac{32}{35}$.

35. 38. 32 Réponſe 34 ſols 8 deniers $\frac{32}{35}$.
38

256
96

1216

35 | 34 ſols
1216
166
26

26.
12.
52
26
312 deniers

35 | 8 deniers
312
32

TROISIE'ME EXEMPLE.

Deux Marchands faiſant un échange de leurs marchandiſes, le premier a du ſatin qu'il vend 10 liv. argent comptant, & qu'il fait valoir 12 en troc ; le ſecond a du damas qu'il vend 36 livres argent comptant, & qu'il eſtime 39 en échange : on demande lequel des deux gagne ou perd au troc ?

Je dis : Si 10 liv. argent comptant valent 12 en troc, combien 36 liv. vaudront-elles ? Et la régle me donne 43 liv. 4 ſols ; ainſi le Marchand de damas ne le faiſant monter qu'à 39 livres, perd 4 liv. 4 ſols au troc.

Mais ſi le ſecond Marchand demandoit le $\frac{1}{3}$ argent comptant, & qu'on voulût ſavoir lequel des deux gagneroit, ou perdroit, je prendrois le $\frac{1}{3}$ de 39, qui eſt 13, & retranchant 13 de 39 & de 36,

les restes ſoient 26 & 23 ; deſorte que ſi le premier Marchand, après avoir païé le ⅓ argent comptant, vouloit achever le païement de la même façon ; ce qui lui reſteroit à païer ſeroit ſur le pied de 23 livres ; mais comme il veut troquer, ce reſte doit être ſur le pied de 26. Je dis donc : Si 10 liv. argent comptant valent 12 en troc, combien 23 livres vaudront-elles ? Et faiſant la régle, je trouve 27 liv. 12 ſols ; deſorte que le Marchand du damas ne le faiſant monter qu'à 26, perd encore 1 livre 12 ſols au troc.

10. 12. 36 Réponſe 43 liv. 4 ſols.

12

72
36

432

10 | 43 livres
432

3.2

2

2
20

40

10 | 4 ſols
40

0

10. 12. 23 Réponſe 27 liv. 12 ſols.

12

46
23

276

10 | 27 livres
276

7.6

6

6
20

120 ſols

10 | 12 ſols
120

20

0

Régle pour tirer la tare des marchandiſes qui ſe vendent au poids ou à la meſure.

XI. Les marchandiſes que les Marchands ſe livrent en gros

ſont ordinairement enfermées dans un embalage fait ou de toile, ou de cordage, ou de paille; & quelquefois elles ſont outre cela dans des caiſſes, ou des tonneaux, &c. Or comme il ne ſeroit pas juſte de païer le poids du total ſur le même pied; on rabat le ſurplus du poids que cauſe cet embalage, & ce ſurplus, qu'on appelle la tare, eſt eſtimé à une certaine diminution au gré des Marchands: deſorte que les uns rabattent tant pour cent, ou dans le cent, & les autres tant ſur le cent, ainſi que nous allons montrer dans les deux exemples ſuivans.

PREMIER EXEMPLE.

Un Marchand a acheté ſix tonneaux d'huile peſans 7200 ℔; on demande combien il doit païer de net, en rabattant 12 pour 100, ou dans le 100 pour la tare?

Je retranche 12 de 100, & le reſte eſt 88. Je dis donc: Si 100 ſe réduiſent à 88, à quoi ſe réduiront 7200 ℔? Et faiſant la régle, je trouve 6336 ℔ que le Marchand doit païer net.

100. 88.

100
63 3600 | 6336 ℔
33.6
36.0
60.0
0

7200 Rép. 6336 ℔.
88
57600
57600
633600

SECOND EXEMPLE.

Un Marchand a acheté neuf tonneaux de ſucre peſans 5400 ℔; combien y aura-t-il à païer de net, en rabattant la tare à 12 ſur cent?

Je dis: Si de 112 ℔ on n'en païe que 100, de 5400 ℔ combien doit-on païer? Et faiſant la régle, je trouve 4821 ℔ $\frac{3}{7}$ que le Marchand doit païer de net.

112. 100. 5400
100
112
54 0000 | 4821 ℔
92.0
24.0
16.0
48

5400
100
540000

Rép. 4821 ℔. $\frac{48}{112}$ ou $\frac{3}{7}$.

Régle de Compagnie ſimple.

XII. Lorſque deux ou pluſieurs perſonnes ont mis un fonds d'argent en ſociété, & qu'après un certain tems ce fonds étant venu à produire, on demande ce qui revient à chacun à proportion de ſa miſe, c'eſt-à-dire à proportion de ce qu'il a mis dans la ſociété; la régle dont on ſe ſert pour répondre à cette queſtion, s'appelle *régle de Compagnie*, & conſiſte à partager le gain en parties proportionnelles aux parties que chacun a mis pour compoſer le fonds, ce qui ſe fait par autant de régles de trois qu'il y a de miſes différentes; & ces régles ſont ſimples lorſque la queſtion ne renferme que le fonds de la ſociété, les miſes particulieres, & le produit, ou le gain que l'on a fait, ſans ajouter des conditions qui puiſſent mettre d'autre différence entre les aſſociés que celle qui vient de la différence de leurs miſes.

PREMIER EXEMPLE.

Trois Marchands aïant fait une ſociété, ont envoïé 10000 *livres aux Indes : le premier a mis* 5000 *liv. le ſecond* 3000 *liv. & le troiſiéme* 2000 *liv. Or le vaiſſeau étant de retour; ils ont trouvé que leur fonds avoit produit* 15000 *liv. & l'on veut ſavoir ce qu'il revient à chacun d'eux.*

Je fais trois régles de trois, en diſant pour la premiere : Si 10000 liv. qui ſont la ſomme des miſes particulieres, ont produit 15000 liv. combien 5000 liv. qui ſont la miſe du premier, produiront-elles ? Pour la ſeconde : Si 10000 liv. ont produit 15000 liv. combien 3000 liv. qui ſont la miſe du ſecond, produiront-elles ? Et enfin pour la troiſiéme : Si 10000 liv. ont produit 15000 liv. combien 2000 liv. qui ſont la miſe du troiſiéme, produiront-elles ?

Et faiſant ces trois régles à la maniere ordinaire, je trouve que la part du premier eſt 7500 liv. celle du ſecond 4500 liv. celle du troiſiéme 3000 liv. & ces trois parts ajoutées enſemble font en effet 15000 liv. qui eſt le gain total.

Que ſi en propoſant la queſtion, on avoit englobé le gain & le fonds enſemble, en diſant que le vaiſſeau leur avoit rapporté 25000 liv. y compris le fonds & le gain, j'aurois diſpoſé les trois régles de trois comme on les voit ici, c'eſt-à-dire en mettant

25000 liv. au ſecond terme, & les quatriémes termes m'auroient donné les gains de chacun en particulier, y compris leurs miſes.

10000 liv. 15000 liv. 5000 liv. Réponſe 7500 liv.

5000

75000000

10000 | 7500 livres
7500 0000

5000.0

0.0

0.0

0

10000 liv. 15000 liv. 3000 liv. Réponſe 4500 liv.

3000

45000000

10000 | 4500 livres
4500 0000

5000.0

0.0

0.0

0

10000 liv. 15000 liv. 2000 liv. Réponſe 3000 liv.

2000

30000000

10000 | 3000 livres
3000 0000

0000.0

0.0

0.0

0

part du premier 7500 liv.
part du ſecond 4500 liv.
part du troiſiéme 3000 liv.

15000 liv.

10000 liv.	25000 liv.	5000 liv.	Réponſe 12500 liv.
10000 liv.	25000 liv.	3000 liv.	7500 liv.
10000 liv.	25000 liv.	2000 liv.	5000 liv.

12500 part & miſe du premier.
7500 part & miſe du ſecond.
5000 part & miſe du troiſiéme.

25000 gain & miſe totale.

On énonce ainſi ces régles : Si 10000, qui ſont la ſomme des miſes, ſont devenuës 25000 liv. la miſe du premier 5000 liv. que deviendra-t-elle ? Et de même des deux autres. Je n'en ai point fait le calcul au long, parce que ceux qui liront ceci pourront le faire facilement, après tout ce que j'ai dit ci-deſſus au ſujet de la régle de trois ; & je me diſpenſerai de le faire dans les exemples ſuivans pour la même raiſon. Au reſte de ces deux façons de faire la régle de Compagnie, la premiere eſt celle qui eſt le plus en uſage.

SECOND EXEMPLE.

Quatre Marchands aïant fait une ſociété, ont mis, le premier 8060 liv. le ſecond 3704, le troiſiéme 2890, & le quatriéme 1975. Au bout d'un certain tems leur fonds a produit 25340 liv. combien revient-il à chacun en particulier ?

Je range les quatre miſes les unes ſous les autres, & les ajoutant enſemble, leur ſomme 16629 liv. eſt le fonds de la ſociété. Je fais donc quatre régles de trois, dont le premier terme eſt toujours le fonds 16629, le ſecond eſt le gain 25340, & le troiſiéme eſt ſucceſſivement la miſe de chaque particulier.

Miſe du premier	8060 livres.
Miſe du ſecond	3704 livres.
Miſe du troiſiéme	2890 livres.
Miſe du quatriéme	1975 livres.
Fonds de la Société	16629 livres.

Si 16629 ont gag.	25340	comb. gag.	8060	R. 12282 l. 3 ſ. 7 d. $\frac{70215}{16629}$
16629	25340		3704	5644 l. 6 ſ. 4 d. $\frac{4316}{16629}$
16629	25340		2890	4403 l. 18 ſ. 2 d. $\frac{1998}{16629}$
16629	25340		1975	3009 l. 11 ſ. 9 d. $\frac{16671}{16629}$

Et ajoutant les quatre parts que je trouve par le moïen de ces régles, leur ſomme eſt préciſément le gain total.

part du premier	12282	livres	3	ſols	7	deniers $\frac{162118}{16629}$
part du ſecond	5644	livres	6	ſols	4	deniers $\frac{4356}{16629}$
part du troiſiéme	4403	livres	18	ſols	2	deniers $\frac{1998}{16629}$
part du quatriéme	3009	livres	11	ſols	9	deniers $\frac{16678}{16629}$
Gain total	25340		0		0	

TROISIE'ME EXEMPLE.

Cinq perſonnes ont fait une ſociété. La premiere a mis 150 *livres, 3 ſols, 4 deniers; la ſeconde* 141 *liv. 4 ſols, 6 deniers; la troiſiéme* 134 *liv. 5 ſols, 8 deniers; la quatriéme* 129 *liv. 5 ſols, 7 deniers; & la cinquiéme* 120 *liv. 10 ſols, 9 deniers. Au bout de quelque tems elles ont gagné* 606 *liv. 12 ſols, 10 deniers; on demande ce qui revient à chacune en particulier?*

J'ajoute enſemble les cinq miſes, & leur ſomme me donne le fonds de la ſociété. Enſuite je fais cinq régles de trois, dont le premier terme eſt toujours le fonds de la ſociété, le ſecond eſt le gain 606 livres, 12 ſols, 10 deniers, & le troiſiéme eſt ſucceſſivement la miſe de chaque perſonne. Mais comme il y a ici partout des ſols & des deniers, je réduis auparavant tous les termes en deniers, non que je ne puſſe multiplier par les parties aliquotes, ſi je voulois, mais parce qu'il faudroit toujours venir à cette réduction, attendu que le premier terme, qui eſt le diviſeur, ſe trouve lui-même compoſé de ſols & de deniers; & je dis:

Miſe du premier	150	liv.	3	ſols	4	den.		
Miſe du ſecond	141	liv.	4	ſols	6	den.		
Miſe du troiſiéme	134	liv.	5	ſols	8	den.		
Miſe du quatriéme	129	liv.	5	ſols	7	den.		
Miſe du cinquiéme	120	liv.	10	ſols	9	den.		
Fonds	675	liv.	9	ſols	10	den.		

Si	162118	den. gag.	145594	comb.	36040	Rép.	32366	$\frac{96572}{162118}$
	162118		145594		33894		30439	$\frac{53234}{162118}$
	162118		145594		32228		28942	$\frac{184276}{162118}$
	162118		145594		31027		27864	$\frac{89086}{162118}$
	162118		145594		28929		25980	$\frac{63186}{162118}$
						Gain total	145594	

Et

Et faiſant ces cinq régles, les cinq derniers termes me donnent le gain de chaque perſonne en particulier, & ces gains enſemble font une ſomme égale à celle du gain total.

Et réduiſant ces deniers en livres, c'eſt-à-dire, diviſant par 12, puis par 20, on aura tous les gains particuliers exprimés en livres, comme on les voit ici, & leur ſomme ſera 606 liv. 12 ſols, 10 deniers, qui eſt préciſément le gain total.

Réduction des Gains en livres.

Gain du premier	134 l.	17 ſ.	2 den.	$\frac{965-2}{1621118}$
Gain du ſecond	126 l.	16 ſ.	7 den.	$\frac{811834}{1621118}$
Gain du troiſiéme	120 l.	11 ſ.	10 den.	$\frac{1184276}{1621118}$
Gain du quatriéme	116 l.	2 ſ.	0 den.	$\frac{890836}{1621118}$
Gain du cinquiéme	108 l.	5 ſ.	0 den.	$\frac{631186}{1621118}$
Gain total	606 l.	12 ſ.	10 den.	

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Trois perſonnes ont mis 1300 *livres en ſociété, & cet argent leur aïant produit* 780 *livres, la premiere a eu pour ſa part* 360 *livres, la ſeconde* 240 *liv. & la troiſiéme* 180 *liv. on demande ce que chacune d'elles avoit mis ?*

Je fais trois régles de trois; mais au lieu de mettre au premier terme le fonds de la ſociété, je mets le gain total 780 liv. & je dis: Si 780 liv. viennent du fonds 1300 liv. qui eſt la ſomme totale des miſes, 360 liv. qui ſont le gain de la premiere, de quelle miſe viendront-elles? Et ainſi des deux autres régles.

780 liv.	1300 liv.	360 liv.	Réponſe 600 liv.
780 liv.	1300 liv.	240 liv.	Réponſe 400 liv.
780 liv.	1300 liv.	180 liv.	Réponſe 300 liv.
			1300 liv.

Et faiſant ces trois régles, les trois derniers termes me donnent les miſes particulieres, & leur ſomme eſt juſtement égale à la miſe totale 1300 liv.

Remarques ſur la Régle de Compagnie ſimple.

XIII. Il y a une autre maniere de faire la régle de Compagnie qui ſe pratique parmi les Financiers, & dont on ſe ſert auſſi

lorſqu'il s'agit de la levée ou de la remiſe des deniers roïaux, de celle des décimes, & d'une diſcuſſion de banqueroute.

Suppoſons, par exemple, que cinq Financiers traitent avec le Roi pour une Ferme de 2400000 liv. & que le premier ait mis 400000 liv. le ſecond 800000 liv. le troiſiéme 600000 liv. le quatriéme 480000 liv. & le cinquiéme 120000 liv. il faut d'abord ſavoir pour quelle partie de la livre chacun ſera intéreſſé dans cette Ferme ; & pour cela je fais cinq régles de trois : Si ſur 2400000, le premier a 400000 liv. ſur une livre ou ſur 20 ſols, qu'aura-t-il ? Et ainſi des quatre autres.

Miſe du premier	400000 livres.
Miſe du ſecond	800000 livres.
Miſe du troiſiéme	600000 livres.
Miſe du quatriéme	480000 livres.
Miſe du cinquiéme	120000 livres.
Total	2400000 livres

2400000 l.	400000	20 ſ.	Rép.	3	ſ.	4	d.	ou $\frac{1}{6}$	de liv.
2400000 l.	800000	20 ſ.	Rép.	6	ſ.	8	d.	ou $\frac{1}{3}$	de liv.
2400000 l.	600000	20 ſ.	Rép.	5	ſ.			ou $\frac{1}{4}$	de liv.
2400000 l.	480000	20 ſ.	Rép.	4	ſ.			ou $\frac{1}{5}$	de liv.
2400000 l.	120000	20 ſ.	Rép.	1	ſ.			ou $\frac{1}{20}$	de liv.

Les derniers termes de ces cinq régles me font voir que le premier eſt pour 3 ſols, 4 deniers dans le parti, c'eſt-à-dire pour $\frac{1}{6}$ de livre ; le ſecond pour 6 ſols, 8 deniers, ou $\frac{1}{3}$ de livre ; le troiſiéme pour 5 ou $\frac{1}{4}$ de livre ; le quatriéme pour 4 ſols ou $\frac{1}{5}$ de livre ; & le dernier pour 1 ſol ou $\frac{1}{20}$ de liv. Cela poſé, s'il y a par exemple 900000 liv. de gain ou de perte, & qu'on veüille ſavoir la perte ou le profit que chacun d'eux doit faire ; je prens.

Pour le premier	$\frac{1}{6}$	de 900000	viendra	150000 livres.
Pour le ſecond	$\frac{1}{3}$		viendra	300000 livres
Pour le troiſiéme	$\frac{1}{4}$		viendra	225000 livres.
Pour le quatriéme	$\frac{1}{5}$		viendra	180000 livres
Pour le cinquiéme	$\frac{1}{20}$		viendra	45000 livres
Gain ou perte totale				900000 livres

J'avertirai ici en paſſant que ſi l'on veut abréger lorſqu'il s'agit de faire des régles où il ſe trouve beaucoup de zeros, comme dans

les cinq régles de trois ci-deſſus, on peut retrancher de part & d'autre un égal nombre de zeros. Ainſi au lieu de dire pour la premiere : Si ſur 2400000 liv. on a 400000 liv. combien aura-t-on pour 20 ſols ? On peut retrancher cinq zeros, & dire : Si pour 24 on a 4, combien aura-t-on pour 20 ? Et la régle donnera également 3 ſols, 4 deniers. La raiſon en eſt que 24 eſt auſſi grand par rapport à 4, que 2400000 liv. par rapport à 400000 livres ; car 2400000 liv. ne ſont autres que 24 multipliés cinq fois ſucceſſivement par 10, de même que 400000 livres ne ſont autre choſe que 4 multipliés cinq fois ſucceſſivement par 10, puiſque chaque multiplication par 10 ne fait augmenter le nombre que d'un zero. Or nous avons vû dans mes remarques ſur la multiplication que deux nombres multipliés par un même nombre reſtent dans le même rapport qu'ils avoient avant d'être multipliés. Ainſi ces multiplications par zero peuvent être négligées, pourvû qu'on obſerve, comme je viens de dire, d'en retrancher un nombre égal de part & d'autre. On peut pratiquer dans l'Arithmétique beaucoup d'abbréviations de cette eſpéce, & d'autres différentes, auſquelles je ne m'arrête point, parce que l'uſage ne manque pas de les apprendre bientôt.

Si les miſes particulieres n'étoient pas à l'égard du fonds comme des parties aliquotes, on prendroit pour les ſols & deniers, qui exprimeroient ces cinq miſes ; ainſi que nous avons enſeigné en parlant de la multiplication compoſée. Ainſi ſuppoſé que ces miſes euſſent été telles qu'on les voit ici, enſorte que leur ſomme eût fait également le fonds de la Ferme ; je chercherois d'abord par 5 régles de trois pour quelle partie de la livre chacun d'eux doit être au Parti, & je ferois ces régles par abbréviation, c'eſt-à-dire, en retranchant quatre zeros de part & d'autre. Ainſi je trouverois

Miſe du premier	350000	livres						
Miſe du ſecond	840000	livres						
Miſe du troiſiéme	630000	livres						
Miſe du quatriéme	410000	livres						
Miſe du cinquiéme	170000	livres						
Total	2400000	livres						

240	35	20	Rép.	2	ſols	11	den.
240	84	20	Rép.	7	ſols		
240	63	20	Rép.	5	ſols	3	den.
240	41	20	Rép.	3	ſols	5	den.
240	17	20	Rép.	1	ſol	5	den.
				20	ſols	0	den.

que le premier eſt intéreſſé pour 2 ſols, 11 deniers; le ſecond pour 7 ſols; le troiſiéme pour 5 ſols, 3 deniers; le quatriéme pour 3 ſols, 5 deniers; & le cinquiéme pour 1 ſol 5 deniers; leſquels ſols & deniers ajoutés enſemble font 20, de même que les miſes particulieres ajoutées enſemble font la miſe totale. Or comme ces parties ne ſont pas des parties aliquotes de la livre, ſi l'on me demandoit ce que chacun d'eux doit avoir de profit ou de perte ſur 900000 liv. je prendrois pour 2 ſols, 11 deniers ſur 900000 l. & j'aurois la part du premier. Ainſi j'écrirois ſous 900000 liv. 2 ſols, 11 deniers, en mettant zero à la place des livres, & avançant 2 ſols, 11 deniers vers la droite. Enſuite je dirois: 2 ſols eſt le $\frac{1}{10}$ d'une livre. Ainſi je prendrois le $\frac{1}{10}$; ce qui ſe fait en retranchant le dernier caractere de 900000 liv. & écrivant le reſte au produit, ainſi qu'on a vû dans mes remarques ſur la diviſion. Enſuite je partagerois 11 deniers en deux parties 8 & 3, dont l'une eſt le tiers de 2 ſols, & l'autre le $\frac{1}{8}$. Ainſi retranchant le dernier zero de 900000 liv. j'en prendrois le $\frac{1}{3}$, puis le $\frac{1}{8}$, & ajoutant ces produits enſemble, leur ſomme 131250 liv. ſeroit le gain ou la perte du premier.

900000	livres	
0	livre	2 ſols 11 deniers
90000	livres	
30000	livres	
11250	livres	
131250	livres	

Je prendrois de même pour 7 ſols, pour 5 ſols, 3 deniers, pour 3 ſols, 5 deniers, pour 1 ſol, 5 den. comme on le voit ici, & j'aurois le gain ou la perte des quatre autres. On doit ſavoir faire ces opérations après ce que j'en ai dit dans la multiplication compoſée.

900000	livres		
0	livre	7	ſols
pour 5 ſols 225000	livres		
pour 2 ſols 90000	livres		
315000	livres	gain ou perte du ſecond.	

900000	livres			
0	livre	5	ſols	3 deniers
pour 5 ſols 225000	livres			
pour 3 den. 11250	livres			
236250	livres	gain ou perte du troiſiéme.		

900000 livres
0 livre 3 ſols 5 deniers

pour 2 ſols	90000	livres
pour 1 ſol	45000	livres
pour 4 den.	15000	livres
pour 1 den.	3750	livres
	153750	livres gain ou perte du quatriéme.

900000 livres
0 livre 1 ſol 5 deniers

pour 1 ſol	45000	livres
pour 4 den.	15000	livres
pour 1 den.	3750	livres
	63750	livres gain ou perte du cinquiéme.

Et faiſant une ſomme de tous ces gains ou pertes, je trouverois le gain ou la perte totale.

Que ſi ſans nous dire les miſes particulieres qui compoſent les 2400000 liv. on nous diſoit ſeulement que le premier eſt dans le Parti pour 2 ſols, 9 deniers; le ſecond pour 6 ſols, 7 deniers; le troiſiéme pour 5 ſols, 1 denier; le quatriéme pour 3 ſols, 10 deniers; & le cinquiéme pour 1 ſol, 9 deniers, ce qui fait en tout 20 ſols; & qu'on voulût ſavoir quelles ſont les miſes particulieres, je réduirois 20 ſols en deniers.

131250	
315000	
236250	
153750	
63750	
900000	livres

Et aïant réduit de même les parties de la livre pour laquelle chacun en particulier eſt intéreſſé, je ferois cinq régles de trois, en diſant pour la premiere : Si ſur 240 deniers le premier en a 33, ſur 2400000 livres quelle portion aura-t-il mis?

Et ces cinq régles ſont très-aiſées à faire; car

20 ſols
12
40
20
240 deniers.

2 ſ. 9 den.	6 ſ. 7 den.	5 ſ. 1 den.
12	12	12
24	72	60
9	7	1
33 premier.	79 ſecond.	61 troiſiéme.

2400000 liv. étant la même chose que 240 multiplié quatre fois successivement par 10, il n'y a qu'à multiplier les seconds termes quatre fois successivement par 10, ou tout d'un coup par 10000, en leur ajoutant quatre zeros, & l'on aura les quatriémes, puisque ces quatriémes doivent être aux seconds, comme 2400000 livres à 240 livres, c'est-à-dire 10000 fois plus grands. Ces cinq régles faites, on aura les mises de chacun en particulier, & leur somme donnera le fonds 2400000 liv.

3 sols 10 deniers

12

36
10

46 quatriéme.

1 sol 9 deniers

12

12
9

21 den. cinquiéme.

33 premier
79 second
61 troisiéme
46 quatriéme
21 cinquiéme

240 deniers

240	33	2400000 liv.	Réponse 330000 liv.
240	79	2400000 liv.	790000 liv.
240	61	2400000 liv.	610000 liv.
240	46	2400000 liv.	460000 liv.
240	21	2400000 liv.	210000 liv.
			2400000 liv.

Si je n'avois pas voulu faire ces cinq régles, j'aurois pris sur 2400000 pour 2 sols, 6 deniers, & le produit 330000 liv. auroit été la mise du premier. Prenant de même pour les parties de la livre qui marquent la part des quatre autres, j'aurois trouvé précisément les mêmes que ci-dessus, ainsi qu'on peut voir en confrontant les unes aux autres.

Je ne mets ceci que pour faire voir le parfait accord des différentes régles que l'on donne dans l'Arithmétique, & pour exciter ceux qui étudient cette science, à en découvrir les raisons; car autrement on agit souvent par coutume, & l'on est fort su-

2400000 liv.
0 liv. 2 sols 9 deniers

pour 2 sols	240000 liv.
pour 6 deniers	60000 liv.
pour 3 deniers	30000 liv.
	330000 liv. mise du premier.

jet à ſe tromper.

Enfin ſi l'on nous cachoit les miſes particulieres, & pour quelle partie de la livre chacun eſt dans le Parti de 2400000 livres, & qu'en nous diſant ſeulemeut que le premier ſur 900000 de gain, a eu pour ſa part 123750 livres, le ſecond 296250, le troiſiéme 228750, le quatriéme 172500 livres & le cinquiéme 78750, on voulût ſavoir pour quelle partie de la livre chacun eſt intéreſſé, & quelles ſont les miſes particulieres;

Je ferois d'abord cinq régles de trois, en diſant pour la premiere: Le gain total eſt au gain 123750 du premier comme 20 ſols eſt à la partie de 20, pour laquelle le premier eſt intéreſſé. Et faiſant de même à l'égard des autres, je trouverois que le premier eſt intéreſſé pour 2 ſols, 9 deniers, le ſecond pour 6 ſols, 7 deniers, le troiſiéme pour 5 ſols, 1 denier, le quatriéme pour 3 ſols, 10 deniers, & le cinquiéme pour 1 ſol, 9 deniers, leſquels ſols & deniers ſont en tout la ſomme de 20 ſols.

Et pour avoir les miſes particulieres, je ferois cinq autres ré-

2400000 liv.
0 liv. 6 ſols 7 deniers

pour 5 ſols	600000 liv.
pour 1 ſol	12
pour 6 deniers	6
pour 1 denier	1

790000 liv. miſe du ſecond.

2400000 liv.
0 liv. 5 ſols 1 denier

pour 5 ſols	600000
pour 1 denier	1

610000 liv. miſe du troiſiéme.

2400000 liv.
0 liv. 3 ſols 10 den.

pour 2 ſols	240000 liv.
pour 1 ſol	120000 liv.
pour 6 deniers	6
pour 4 deniers	4

460000 liv. miſe du quatriéme.

2400000 liv.
0 liv. 1 ſol 9 deniers

pour 1 ſol	120000 liv.
pour 6 deniers	6
pour 3 deniers	3

210000 liv. miſe du cinquiéme.

gles de trois, en disant pour la premiere: Si sur 900000 livres de gain le premier a 123760, sur le fonds 2400000 liv. qu'aura-t-il mis? Et ainsi pour les quatre autres; ce qui me donnera les mises, qui sont les mêmes que celles ci-dessus.

J'aurois pû faire ces cinq régles-ci d'une maniere plus aisée, après avoir trouvé les parties de la livre pour laquelle chacun est intéressé, en réduisant les 20 sols en deniers, ce qui fait 240, & les parties de la livre que chacun a en particulier; après quoi j'aurois dit comme ci-dessus: Si sur 240 deniers le premier a 33, combien aura-t-il sur 2400000 liv. Et ainsi des quatre autres.

Gain du premier	123750	livres.
Gain du second	296250	livres.
Gain du troisiéme	228750	livres.
Gain du quatriéme	172500	livres.
Gain du cinquiéme	78750	livres.
Gain total	900000	livres.

900000	123750	20	Rép.	2	sols	9 den.
900000	296250	20	Rép.	6	sols	7 den.
900000	228750	20	Rép.	5	sols	1 den.
900000	172500	20	Rép.	3	sols	10 den.
900000	78750	20	Rép.	1	sol	9 den.
				20	sols	0 den.

J'aurois pû de même prendre sur 2400000 liv. pour les parties de la livre de chaque particulier, ainsi que nous avons déja fait auparavant.

900000	123750	2400000 liv.	Réponse	330000 liv.
900000	296250	2400000 liv.	Réponse	790000 liv.
900000	228750	2400000 liv.	Réponse	610000 liv.
900000	172500	2400000 liv.	Réponse	460000 liv.
900000	78750	2400000 liv.	Réponse	210000 liv.
				2400000 liv.

Venons présentement à ce qui concerne les levées ou les remises des deniers roïaux, & supposons qu'aïant été ordonné que les sujets contribuables aux Tailles païeront cette année 800000 liv. plus que l'année précédente, ou qu'on leur rabattra cette somme sur ce qu'ils païoient; on demande à combien pour livre monte cette levée ou cette remise? Il faut pour cela savoir quelle est la somme totale que les Généralités de France prises ensemble païoient l'année passée, & supposant que cette somme soit

6400000

6400000 liv. on dira : Si ſur 6400000 liv. on fait une levée, ou on remet 800000 liv. combien faudra-t-il lever ou remettre ſur une livre, c'eſt-à-dire ſur 20 ſols ? Et la régle donnera 2 ſols, 6 deniers par livre, qui eſt le $\frac{1}{8}$ de la livre.

6400000 liv. 800000 liv. 20 Rép. 2 ſols 6 den.

Avant de repartir cette ſomme ſur les particuliers, on la repartit aux Généralités, enſuite aux Elections compriſes dans chaque Généralité, puis aux Paroiſſes compriſes dans les Elections ; & enfin aux habitans des Paroiſſes.

Si la Généralité de Paris par exemple, païoit l'année paſſée 320000 liv. pour ſa part de 6400000 liv. on trouvera la part qu'elle doit païer, ou qu'on doit lui remettre, en diſant : Si 6400000 liv. que toutes les Généralités païoient l'année paſſée, païent de ſurplus ou reçoivent 800000 liv. combien 320000 liv. que la Généralité de Paris païoit doivent-t-elles païer, ou recevoir cette année ? Et la régle donnera 40000 liv. qu'on trouveroit de même, en prenant le $\frac{1}{8}$ de 320000 liv. On fera la même choſe à l'égard des autres Généralités, & toutes les diſtributions étant faites, il faut que leur ſomme ſe trouve égale à la levée ou à la remiſe 800000 livres.

6400000 liv. 800000 liv. 320000 Rép. 40000 liv.

On paſſera de-là aux Elections, & ſuppoſant qu'une des Elections de la Généralité de Paris païât l'année paſſée 64000 liv. on dira : Si 320000 liv. que les Elections de la Généralité de Paris priſes enſemble païoient l'année paſſée, doivent païer, ou recevoir cette année 40000 liv. combien doit païer ou recevoir l'Election qui païoit pour ſa part 64000 livres ? Et faiſant la même choſe à l'égard des autres Elections, on trouvera ce que chacune doit païer ou recevoir, & la ſomme de leur part doit être égale à 40000 liv. On trouveroit également ces parts en prenant le $\frac{1}{8}$ de ce que chaque Election païoit ; car on voit dans celle-ci que le $\frac{1}{8}$ de 64000 liv. eſt 8000 liv. ainſi qu'on a trouvé par la régle de trois.

320000 liv. 40000 liv. 64000 liv. Rép. 8000 liv.

Quand on a diſtribué aux Elections la part que chacune doit païer, ou qu'on doit lui remettre, ceux qui ſont chargés de la levée, ou de la remiſe des Paroiſſes doivent faire un tarif, c'eſt-à-dire une table, où l'on marque ce que chaque Particulier doit

païer, ou recevoir à proportion de ce qu'il païoit l'année passée. Et comme dans le détail il se trouve des sols & des deniers, il faut que cette table ou tarif commence à un denier, & finisse à la somme totale que l'Election doit païer ou recevoir.

Ainsi comme on sait que la levée ou la remise est sur le pied de 2 sols, 6 deniers par livre, il faut commencer par dire : Si 20 sols ou 240 deniers païent ou reçoivent 2 sols, 6 deniers, ou 30 deniers, combien 1 denier ? Et la régle donnera $\frac{30}{240}$, qui réduit aux moindres termes, fait $\frac{1}{8}$ de denier. On commencera donc le tarif, en marquant que pour 1 denier qu'on païoit l'année passée, on doit païer ou recevoir $\frac{1}{8}$ de denier. Pour 2 on mettra $\frac{2}{8}$, pour trois $\frac{3}{8}$; & ainsi de suite jusqu'à un sol, qui rendra 1 denier $\frac{1}{2}$. Ensuite pour 2 sols on mettra le double 3 deniers, pour trois sols le triple 4 deniers $\frac{1}{2}$; & ainsi de suite jusqu'à 10 sols, qui rendront un sol trois deniers. On n'ira pas plus avant à l'égard des sols, parce qu'il est facile de prendre par exemple pour 15 la valeur de 10 & de 5, ce qui fait 1 sol,

TARIF pour une Election qui doit païer, ou à qui on doit remettre 8000 *livres sur le pied de* 2 *sols*, 6 *den. par livre.*

pour	1	denier		$\frac{1}{8}$ den.
	2			$\frac{2}{8}$
	3			$\frac{3}{8}$
	4			$\frac{4}{8}$
	5			$\frac{5}{8}$
	6			$\frac{6}{8}$
	7			$\frac{7}{8}$
	8		1 den.	
	9		1 den.	$\frac{1}{8}$
	10		1 den.	$\frac{2}{8}$
	11		1 den.	$\frac{3}{8}$
pour	1	sol	1 den.	$\frac{4}{8}$
	2		3 den.	
	3		4 den.	$\frac{1}{2}$
	4		6 den.	
	5		7 den.	$\frac{1}{2}$
	6		9 den.	
	7		10 den.	$\frac{1}{2}$
	8	1 f.	den.	
	9	1 f.	1 den.	$\frac{1}{2}$
	10	3 f.	3 den.	

7 deniers ½ ; & de même pour 18 la valeur de 10 & de 8, ce qui fera 2 sols, 4 deniers ½ ; & ainsi des autres.

On continuëra le calcul depuis une liv. jusqu'à 10 liv. qui donneront 1 liv. 5 sols ; & ensuite on prendra pour 20,30,40, &c. jusqu'à 100, qui donneront 12 liv. 10 sols ; ensuite pour 200, 300, &c. jusqu'à 1000, qui donneront 125 ; puis pour 2000, 3000 liv. &c. jusqu'à 10000, qui donneront 1250 ; ensuite pour 20000 livres, 30000 liv. &c. jusqu'à 60000 liv. qui donneront 7500 ; & ajoutant à 60000 livres 4000 pour

Suite du Tarif.

pour	1 liv.		2 s. 6 den.
	2 liv.		5 s.
	3 liv.		7 s. 6 den.
	4 liv.		10 s.
	5 liv.		12 s. 6 den.
	6 liv.		15 s.
	7 liv.		17 s. 6 den.
	8 liv.	1 liv.	
	9 liv.	1 liv.	2 s. 6 den.
	10 liv.	1 liv.	5 s.
	20 liv.	2 liv.	10 s.
	30 liv.	3 liv.	15 s.
	40 liv.	5 liv.	
	50 liv.	6 liv.	5 s.
	60 liv.	7 liv.	10 s.
	70 liv.	8 liv.	15 s.
	80 liv.	10 liv.	
	90 liv.	11 liv.	5 s.
	100 liv.	12 liv.	10 s.
	200 liv.	25 liv.	
	300 liv.	37 liv.	10 s.
	400 liv.	50 liv.	
	500 liv.	62 liv.	10 s.
	600 liv.	75 liv.	
	700 liv.	87 liv.	10 s.
	800 liv.	100 liv.	
	900 liv.	112 liv.	10 s.
	1000 liv.	125 liv.	
	2000 liv.	250 liv.	
	3000 liv.	375 liv.	
	4000 liv.	500 liv.	
	5000 liv.	625 liv.	
	6000 liv.	750 liv.	
	7000 liv.	875 liv.	

faire la ſomme totale que l'Election païoit l'année paſſée, & la valeur de 4000, qui eſt 500, à la valeur 7500, on aura juſtement 8000, qui eſt la ſomme que l'Election doit païer, ou qu'on doit lui remettre.

Suite du Tarif.

pour	8000 liv.	1000 liv.
	9000 liv.	1125 liv.
	10000 liv.	1250 liv.
	20000 liv.	2500 liv.
	30000 liv.	3750 liv.
	40000 liv.	5000 liv.
	50000 liv.	6250 liv.
	60000 liv.	7500 liv.
	4000 liv.	500 liv.
	64000 liv.	8000 liv.

Ces tarifs ne ſont pas fort difficiles à faire, puiſqu'il ne s'agit que de trouver la valeur d'un denier ſur le pied de l'impoſition ou de la remiſe, & d'ajouter cette valeur à elle-même, à meſure qu'on veut celle de 2 deniers, de 3, de 4, &c. & cependant ils ſont d'une grande utilité, & ils épargnent bien des calculs que l'on ſeroit obligé de faire à meſure qu'on feroit la levée ou la remiſe ſur les particuliers.

Si par exemple, un particulier païoit l'année paſſée 323 livres, 7 ſols, 5 deniers, & qu'on veüille ſavoir ce qu'il doit païer de plus cette année, ou ce qu'on doit lui rabattre ſur cette ſomme; on prendra dans le tarif le nombre 300, & ſa valeur à droite 37 livres 10 ſols; enſuite le nombre 20 liv. & ſa valeur 2 ſols, 10 deniers; puis le nombre 3 liv. & ſa valeur 7 ſols, 6 deniers; enſuite le nombre ſept ſols, & ſa valeur 10 $\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{8}$; & enfin le nombre 5 deniers, & ſa valeur $\frac{1}{8}$; & ajoutant toutes ces valeurs enſemble, on trouvera que ce particulier doit païer, ou qu'on doit lui rabattre 40 liv. 8 ſols, 5 deniers $\frac{1}{8}$. De même ſi un autre particulier païoit l'année paſſée 1571 liv. 11 ſols, 9 deniers, & qu'on veüille

300 livres	vaut	37 liv.	10 ſ.		
20 livres		2 liv.	10 ſ.		
3 livres			7 ſ.	6 den.	
7 ſols				10 den.	$\frac{4}{8}$
5 deniers					$\frac{5}{8}$
		40 liv.	8 ſ.	5 den.	$\frac{1}{8}$

ſavoir ce qu'il doit païer, ou ce qu'on doit lui remettre, le tarif donnera pour 100 liv. 125 liv. pour 500 liv. 62 liv. 10 ſols; pour 70 liv. 8 liv. 15 ſols; pour 1 liv. 2 ſols, 6 deniers; pour 10 ſols, 1 ſol 3 deniers; pour un ſol, 1 den. $\frac{4}{8}$; & pour 9 deniers, 1 denier $\frac{1}{8}$; & ajoutant ces valeurs enſemble, on trouvera que ce particulier doit païer, ou qu'on doit lui remettre 196 liv. 8 ſols, 11 deniers $\frac{5}{8}$.

1000	livres	125	liv.			
500	livres	62	liv.	10	ſ.	
70	livres	8	liv.	15	ſ.	
1	livre			2	ſ.	6 den.
10	ſols			1	ſ.	3 den.
1	ſol					1 den. $\frac{4}{8}$
9	deniers					1 den. $\frac{1}{8}$
		196	liv.	8	ſ.	11 den. $\frac{5}{8}$

Si la nouvelle impoſition ou remiſe étoit de telle nature qu'en cherchant le pied ſur lequel elle doit être comptée, on trouvât que ce pied n'eſt pas une partie aliquote de la livre, on feroit les repartitions en multipliant par les ſols & deniers, qui exprimeroient ce que la livre porte, de même que nous avons fait ci-deſſus en parlant de la régle des Financiers. Suppoſons par exemple, qu'on impoſe cette année 560000 liv. & qu'on eût païé l'année paſſée 6400000 liv. je cherche d'abord ce que la livre doit porter, en diſant: Si ſur 6400000 liv. on doit païer 560000 liv. ſur 20 ſols que païera-t-on? Et la régle me donne 1 ſol, 9 deniers, qui eſt le denier de l'impoſition.

6400000 liv. 560000 liv. 20 ſ. Rép. 1 ſ. 9 den.

Pour repartir 560000 liv. ſur les Généralités, je prens pour 1 ſol, 9 deniers ſur la part que chaque Généralité païoit l'année paſſée. Ainſi ſuppoſant que celle de Paris païât l'année paſſée 320000 liv. je prens pour 1 ſol, 9 deniers ſur cette ſomme, & je trouve 28000 liv. que cette Généralité doit païer de plus cette année. J'aurois trouvé la même choſe en diſant: Si ſur 6400000 liv. la Généralité de Paris païe 320000 liv. combien païera-t-elle

	320000	liv.
	0 liv. 1 ſ. 9 den.	
pour 1 ſol	16000	liv.
pour 6 deniers	8	
pour 3 deniers	4	
	28000	liv.

ſur 560000 livres? Mais il eſt plus commode d'opérer comme j'ai fait.

De même ſuppoſant qu'une des Elections de la Généralité de Paris païât l'année paſſée 64000 liv. je prens pour 1 ſol, 9 deniers ſur cette ſomme, & le produit 5600 me fait voir que cette Election doit païer de ſurplus 5600 liv. Ce que je trouverois de même en diſant: Si la Généralité païant 320000 liv. une telle Election païe 64000 liv. combien cette Election païera-t-elle ſur 28000 liv. d'augmentation pour la Généralité?

64000 liv. 0 liv. 1 ſol 9 den.

3200
16
8

5600 liv.

Faiſant la même choſe pour toutes les Généralités & les Elections, la répartition ſe trouveroit faite de même que ſi ces ſols & deniers avoient été une partie aliquote de la livre.

Quant au tarif, il faut dire: Si 20 liv. ou 240 deniers portent 1 ſol, 9 deniers, ou 21 deniers, combien 1 denier portera-t-il? Et on trouvera $\frac{21}{240}$ pour la valeur d'un denier. Après quoi on continuëra aiſément le tarif de même que ci-deſſus.

240. 21. 1. Réponſe $\frac{21}{240}$

Les levées ou les remiſes des décimes ne different de celles des deniers roïaux qu'en ce que pour les décimes la diſtribution ſe fait d'abord ſur les Provinces Eccléſiaſtiques, leſquelles les repartiſſent ſur les Evêchés, & les Evêchés ſur les Bénéficiers.

Il ne me reſte plus qu'à dire un mot touchant les diſcuſſions de banqueroute. Suppoſons donc qu'un homme qui a fait faillite laiſſe 175500 liv. d'effets, & qu'il doive à pluſieurs créanciers 540000 liv. il faut dire: Si ſur 540000 liv. de dettes on ne peut païer que 175500 livres, ſur 20 ſols que païera-t-on? Et la régle donnera 6 ſols, 6 deniers, qui font voir qu'un homme à qui il ſera dû une livre n'en retirera que 6 ſols, 6 deniers; ainſi ſuppoſé que les créanciers de cet homme fuſſent au nombre de ſix, & qu'il fût dû au premier 75000 liv. au ſecond 84500 liv. au troiſiéme 96350 liv. au quatriéme 58340 liv. au cinquiéme 91810 liv. & au ſixiéme 134000 liv. je prendrois ſur chacune de ces ſommes pour 6 ſols, 6 deniers, & les produits ſeroient les ſommes qui reviendroient aux créanciers, & ces ſommes ajoutées enſemble ſeroient égales à 175500 livres, qui ſont les effets qui reſtent au débiteur.

540000 liv. 175500 liv. 20 Rép. 6 ſ. 6 den.

créance du premier	75000 l.	84500 l.	créance du fecond
	o l. 6 ſ. 6 d.		o l. 6 ſ. 6 den.
pour 5 ſols	18750 l.	21125 l.	
pour 1 ſol	3750 l.	4225 l.	
pour 6 deniers	1875 l.	2112 l. 10 ſols	
part du premier	24375 l.	27462 l. 10 ſols	

96350 l.	créance du troiſiéme	58340 l.	créance du quatriéme
	o l. 6 ſols 6 den.		o l. 6 ſols 6 den.
24087 l. 10 ſols		14585 l.	
4817 l. 10 ſols		2917 l.	
2408 l. 15 ſols		1458 l. 10 ſols	
31313 l. 15 ſols		18960 l. 10 ſols	

91810 l.	créance du cinquiéme	134000 l.	créance du ſixiéme.
	o l. 6 ſols 6 den.		o l. 6 ſols 6 den.
22952 l. 10 ſols		33500 l.	
4590 l. 10 ſols		6700 l.	
2295 l. 5 ſols		3350 l.	
29838 l. 5 ſols		43550 l.	

Et faiſant d'un côté la ſomme des créances, & de l'autre les parts qui reviennent aux créanciers, la premiere ſomme eſt égale à la dette totale 540000 liv. & la ſeconde à la valeur 175500 liv. des effets du banqueroutier.

créances	parts qui reviennent aux créanciers
75000 livres	24375 liv.
84500 livres	27462 liv. 10 ſols
96350 livres	31313 liv. 15 ſols
58340 livres	18960 liv. 10 ſols
91810 livres	29838 liv. 5 ſols
134000 livres	43550 liv.
ſomme 540000 livres	ſomme 175500 liv.

Mais ſi les créanciers étoient en grand nombre, & qu'il y eût des petites créances & des grandes, le plus court ſeroit de faire un tarif, & de païer enſuite les créanciers ſur le pied du tarif,

ainſi que nous avons fait ci-deſſus par rapport aux levées ou aux remiſes des deniers roïaux. On diroit donc : Si 20 ſols ou 240 deniers ſe réduiſent à 6 ſols, 6 deniers, c'eſt-à-dire à 78 deniers, à quoi ſe réduira un denier ? Et la régle donneroit $\frac{78}{240}$, qui réduit en moindre dénomination donne $\frac{13}{40}$. On commenceroit donc le tarif en mettant pour un denier $\frac{13}{40}$, pour 2 le double de $\frac{13}{40}$, c'eſt-à-dire $\frac{26}{40}$; pour 3 le triple ou $\frac{39}{40}$, pour quatre le quadruple ou $\frac{12}{40}$, qui réduit en entier font 1 denier $\frac{12}{40}$; pour 5 on ajouteroit $\frac{13}{40}$ à 1 denier $\frac{12}{40}$, ce qui feroit un denier $\frac{25}{40}$; pour 6 on ajouteroit $\frac{13}{40}$ à 1 denier $\frac{25}{40}$, & l'on auroit 1 denier $\frac{38}{40}$; pour 7 on ajouteroit $\frac{13}{40}$ à 1 denier $\frac{38}{40}$, ce qui feroit 1 denier $\frac{51}{40}$, & réduiſant la fraction en entier, on auroit 2 deniers $\frac{11}{40}$; & ainſi de ſuite juſqu'à 11 den. ajoutant toujours $\frac{13}{40}$ au précédent, & réduiſant la fraction quand elle ſurpaſſeroit l'entier.

240. 78. 1. Réponſe $\frac{78}{240}$ ou $\frac{13}{40}$.

1	denier			$\frac{13}{40}$
2				$\frac{26}{40}$
3				$\frac{39}{40}$
4			1 denier	$\frac{12}{40}$
5			1 denier	$\frac{25}{40}$
6			1 denier	$\frac{38}{40}$
7			2 deniers	$\frac{11}{40}$
8			2 deniers	$\frac{24}{40}$
9			2 deniers	$\frac{37}{40}$
10			3 deniers	$\frac{10}{40}$
11			3 deniers	$\frac{23}{40}$
1	ſol		3 deniers	$\frac{36}{40}$
2	ſols		7 deniers	$\frac{32}{40}$
3	ſols		11 deniers	$\frac{28}{40}$
4	ſols	1 ſol	3 deniers	$\frac{24}{40}$
5	ſols	1 ſol	7 deniers	$\frac{20}{40}$
6	ſols	1 ſol	11 deniers	$\frac{16}{40}$

Et ainſi de ſuite.

Enſuite aïant trouvé la valeur de 12 deniers ou d'un ſol, qui eſt 3 deniers $\frac{36}{40}$, pour 2 ſols on ajouteroit 3 deniers $\frac{36}{40}$ à lui-même, & l'on auroit 6 deniers $\frac{72}{40}$; & réduiſant la fraction, on auroit 7 deniers $\frac{32}{40}$; pour trois on ajouteroit à 7 deniers $\frac{32}{40}$ 3 deniers $\frac{36}{40}$, ce qui feroit 10 deniers $\frac{68}{40}$; & réduiſant la fraction, on auroit 11 deniers $\frac{28}{40}$; & ainſi de ſuite, juſqu'à 10 ſols ; après quoi il ſeroit inutile de mettre la valeur de 11, 12, 13, &c. juſqu'à 20, parce que ce ne ſont plus que des répétitions. Enſuite on mettroit pour 1 liv. 6 ſols, 6 deniers ; pour 2 on doubleroit 6 ſols, 6 deniers, c'eſt-à-dire on mettroit 13 ſols ; & ainſi de

de ſuite juſqu'à la ſomme 540000 liv. qui devroit donner 175500 liv. pour que le tarif fût bon.

Régle de Compagnie compoſée.

XIV. La régle de Compagnie compoſée différe de la précédente en ce que dans la ſimple on ne conſidére point le tems, attendu que les aſſociés aïant mis tous enſemble leurs miſes le même jour, les laiſſent ſubſiſter juſqu'à la fin de la ſociété, ſans y faire aucun changement; au lieu que dans celle-ci les uns retirent leurs miſes avant le terme, ou les diminuënt, & les augmentent d'une façon, tandis que les autres les retirent plus tard, ou les diminuënt, & les augmentent d'une autre maniere.

PREMIER EXEMPLE.

Trois Marchands ont fait ſociété : l'un a mis 480 *liv. pour un an ; l'autre* 1034 *pour huit mois, & le troiſiéme* 600 *pour quatre mois ; & ils ont gagné* 264 *liv. au bout de l'année ; que leur revient-il à chacun pour leur part ?*

Pour réſoudre cette queſtion, je fais enſorte que le tems des miſes devienne égal pour tous; & voici comment. Je multiplie la miſe du premier par un an, c'eſt-à-dire douze mois; ce qui fait 5760, que je regarde comme étant ſa miſe, parce qu'en effet 480 ne produiſent pas plus en douze mois que douze fois 480 livres en un mois. Je multiplie de même la miſe du ſecond 1034 par huit mois, ce qui fait 8272, que je regarde comme étant ſa miſe, puiſque huit fois 1034 produiſent autant dans un mois que 1034 dans huit; & enfin je multiplie 600 par quatre, ce qui fait 2400, que je prens pour la miſe du troiſiéme pour la même raiſon. Cela fait, la queſtion eſt la même que ſi l'on diſoit que le premier a mis 5760 pour un mois, le ſecond 8272 de même pour un mois, & le troiſiéme 2400 pour le même tems; ce qui eſt une régle de Compagnie ſimple, que je réſoudrai par trois régles de trois ſim-

480	1034	600
12	8	4
960	8272	2400
480		
5760		

Miſe du premier	5760
Miſe du ſecond	8272
Miſe du troiſiéme	2400
Fonds	16432

ples, dont le premier terme ſera la ſomme 16432 des trois miſes; le ſecond 264 liv. qui eſt le gain qu'ils ont fait, & le troiſiéme ſera ſucceſſivement la miſe d'un chacun. Et faiſant ces trois régles, je trouve pour la part du premier 92 liv. 10 ſols, 9 deniers $\frac{15312}{16432}$; pour celle du ſecond 132 liv. 17 ſols, 11 deniers $\frac{15280}{16432}$; & pour celle du troiſiéme 38 liv. 11 ſols, 2 deniers $\frac{2272}{16432}$; & ces trois parts ajoutées enſemble font juſtement le gain total 264 liv.

16432	264	5760	Réponſe	92	l.	10	ſ.	9	d. $\frac{15312}{16432}$
16432	264	8272	Réponſe	132	l.	17	ſ.	11	d. $\frac{15280}{16432}$
16432	264	2400	Réponſe	38	l.	11	ſ.	2	d. $\frac{2272}{16432}$
				264	l.	0	ſ.	0	d.

SECOND EXEMPLE.

Trois Marchands ont fait une ſociété pour deux ans: le premier a mis 600 livres, dont il a retiré 250 au bout de huit mois; le ſecond a mis 900 liv. dont il a retiré 420 au bout de treize mois; & le troiſiéme a mis 400 liv. auſquelles il en a ajouté 330 au bout de dix mois; & à la fin des deux années le gain a été 3000 liv. que reviendra-t-il à chacun pour ſa part?

Cette queſtion paroît d'abord extrêmement embarraſſante; mais avec un peu d'attention on en viendra facilement à bout. 1°. Le premier Marchand n'ayant laiſſé ſa miſe 600 liv. dans ſon entier que l'eſpace de huit mois, cette miſe ne doit gagner que pour huit mois; & comme c'eſt la même choſe de dire 600 liv. pour huit mois, ou huit fois 600 liv. pour un mois, multipliant 600 livres par 8, on aura 4800 livres qui ſera la premiere miſe du premier. Mais comme au bout de huit mois il n'a retranché que 250, il lui reſte par conſéquent 350 liv. dans la ſociété pour ſeize mois. Et comme 350 liv. pour ſeize mois ſont la même choſe que ſeize fois 350 liv. pour un mois, mulcipliant 350 liv. par 16, on aura 5600,

600
8
4800 1e miſe du premier.

350
16
2100
350
5600 2e miſe du premier.
4800
10400 miſe totale du premier.

qui ſeront la ſeconde miſe du premier ; & ajoutant ces deux miſes enſemble, on aura 10400, qui ſera la miſe totale du premier.

2°. Le ſecond n'aïant laiſſé ſa miſe 900 dans ſon entier que pendant treize mois, cette miſe ne doit gagner que pour treize mois. Multipliant donc 900 par 13, on aura 11700, qui ſera la premiere miſe du ſecond, puiſque 900 pour treize mois ſont la même choſe que treize fois 900 pour un mois. Mais comme au bout de ces treize mois, il n'a retiré que 420 ſur les 900 qu'il avoit mis ; il lui reſte encore 480 dans la ſociété pour onze mois. Multipliant donc 480 par 11, on aura 5260 livres, qui ſeront ſa ſeconde miſe pour les raiſons ci-deſſus, que je ne répéterai plus. Ajoutant donc ces deux miſes enſemble, on aura 16980, qui ſera ſa miſe totale.

900
13
2700
900
11700 1e miſe du ſecond.

480
11
480 2e miſe du ſecond.
480
5280
11700
16980 miſe totale du ſecond.

3°. Le troiſiéme aïant augmenté ſa miſe 400 liv. au bout de dix mois, il faut regarder d'abord cette ſomme 400 liv. pour dix mois comme ſa premiere miſe. Ainſi multipliant 400 liv. par 10, on aura 4000 liv. qui ſeront ſa premiere miſe. Enſuite comme il a ajouté 330 à 400 au bout de dix mois, ce qui fait 730 liv. ces 730 liv. doivent gagner pour quatorze mois. Ainſi multipliant 730 par 14, on aura 10220, qui ſeront ſa ſeconde miſe ; & ajoutant ſes deux miſes enſemble, on aura 14220 pour ſa miſe totale.

400
10
4000 1e miſe du troiſiéme.

730
14
2920
730
10220 2e miſe du troiſiéme
4000
14220 miſe totale du troiſiéme.

Cela fait, on ajoutera ces trois miſes totales enſemble, leur ſomme ſera 41600 liv. & la queſtion ſera la même que ſi on diſoit : 41600 liv. dans un mois ont gagné 3000 liv. combien gagnera

chacune des miſes qui compoſent ce fonds 41600 ? On fera donc trois régles de trois ſimples, dont le premier terme ſera le fonds 41600, le ſecond ſera le gain 3000 liv. & le troiſiéme ſera ſucceſſivement l'une des trois miſes ; & ces régles faites, on trouvera que le gain du premier eſt 750 liv. celui du ſecond 1224 liv. 10 ſols, 4 deniers $\frac{25600}{41600}$, & celui du troiſiéme 1025 liv. 9 ſols, 7 deniers $\frac{16000}{41600}$; & ces trois gains ajoutés enſemble font en effet le gain total 3000 liv.

Miſe du premier	10400 livres
Miſe du ſecond	16980 livres
Miſe du troiſiéme	14220 livres
ſomme	41600 livres

41600 l. 3000 l. 10400 l. R. 750 l.
41600 l. 3000 l. 16980 l. R. 1224 l. 10 ſ. 4 d. $\frac{25600}{41600}$.
41600 l. 3000 l. 14220 l. R. 1025 l. 9 ſ. 7 d. $\frac{16000}{41600}$.

3000 l. 0 ſ. 0 d.

TROISIE'ME EXE'MPLE.

Quatre perſonnes ont fait un ouvrage. La premiere y a emploïé 18 jours, & elle gagne ordinairement ſix livres par jour. La ſeconde y a travaillé ſix jours, & ordinairement elle gagne 3 livres par jour. La troiſiéme y a travaillé quatre jours, & ordinairement elle gagne 2 liv. par jour ; & la quatriéme y a travaillé douze jours, & ordinairement elle gagne huit livres par jour. L'ouvrage fait, on l'a eſtimé 700 liv. & l'on demande combien il revient à chacune de ces perſonnes à proportion du tems qu'elles ont emploïé, & du gain qu'elles font ordinairement ?

Pour réſoudre cette queſtion, je multiplie les jours que chaque ouvrier a emploïés par ſon gain ordinaire, & je trouve que le premier auroit gagné 108 liv. le ſecond 18, le troiſiéme 8, & le quatriéme 96 ; ce qui fait en tout 230 liv. qu'ils auroient gagné ſi l'ouvrage n'avoit été eſtimé qu'à proportion de ce qu'ils gagnent ordinairement. Mais comme il a été eſtimé 700 livres à cauſe de ſa perfec-

18	6	4	12
6	3	2	8
108	18	8	96

108
18
8
96

230 livres

tion, je fais quatre régles de trois, en diſant pour la premiere : Si 230 livres qu'ils auroient gagné en travaillant pour le prix ordinaire, montent à 700 livres par rapport à cet ouvrage, 108 que le premier auroit gagné en travaillant pour le prix ordinaire, à quoi ſe monteront-elles ? Et ainſi de ſuite pour les trois autres.

230	700 l.	108	Réponſe	328 l.	13 ſ.	10 d.	$\frac{220}{230}$
230	700 l.	18	Réponſe	54 l.	15 ſ.	7 d.	$\frac{190}{230}$
230	700 l.	8	Réponſe	24 l.	6 ſ.	11 d.	$\frac{210}{230}$
230	700 l.	96	Réponſe	292 l.	3 ſ.	5 d.	$\frac{270}{230}$
				700 l.	0 ſ.	0 d.	

Ces régles faites, je trouve qu'il revient au premier 328 liv. 13 ſols, 10 deniers $\frac{220}{230}$; au ſecond 54 liv. 15 ſols, 7 deniers $\frac{190}{230}$; au troiſiéme 24 liv. 6 ſols, 11 deniers $\frac{210}{230}$; & au quatriéme 292 liv. 3 ſols, 5 deniers $\frac{270}{230}$; & faiſant la ſomme de ces quatre parts, je trouve qu'elle eſt égale au gain total 700 liv.

REMARQUE.

Dans ces ſortes de queſtions compoſées, où l'on a beſoin de réduire les termes en moindre nombre, il faut bien prendre garde avant de les multiplier les uns par les autres, ſi l'on a raiſon de le faire, ou s'il ne ſe trouve pas au contraire quelqu'inconvénient. Quand je multiplie, par exemple, 500 livres qu'un Marchand a mis dans une ſociété par le nombre trois des mois qu'il a laiſſé ſubſiſter ſa miſe, on voit bien que j'ai raiſon de le faire, puiſque 500 livres ne produiſent pas plus dans trois mois, que trois fois 500 dans un mois. De même quand je multiplie 18 jours qu'un ouvrier emploïé à travailler par 6 livres qu'il gagne par jour, dans une queſtion où il s'agit de comparer les gains de différens ouvriers, comme dans l'exemple précédent, il eſt aiſé de voir que 6 fois 18 font le gain de cet ouvrier ; & que j'ai par conſéquent raiſon d'en agir ainſi. Mais ſi les termes compris dans une queſtion étoient de telle nature qu'il y eût de l'inconvénient d'en uſer de la ſorte, il faudroit néceſſairement ſe retourner d'une autre façon, ainſi qu'on va voir dans l'exemple ſuivant.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Un ouvrier ne fait que 6 toiſes d'un certain ouvrage dans 3 jours; un autre en fait 12 dans 4 jours, & un autre 20 dans 5 jours. Or en les emploïant tous trois à la fois, ils ont fait 153 toiſes en quinze jours, & l'on demande quelle eſt la part que chacun doit avoir à cet ouvrage à raiſon de 12 liv. la toiſe?

Pour réſoudre cette queſtion, je dois bien me garder de multiplier l'ouvrage que chacun fait en particulier par le nombre de jours qu'il y emploïe; car 6 toiſes que le premier fait en trois jours, ne ſont pas la même choſe que 3 fois 6 ou 18 toiſes en un jour, & ainſi des autres. Je dois donc chercher une autre voie pour réduire ces termes qui m'embarraſſent, & voici comme je m'y prens: J'examine ce que chacun de ces ouvriers fait dans un jour, en diviſant l'ouvrage que chacun fait par le nombre de jours qu'il y emploïe. Ainſi diviſant 6 par 3, le quotient 2 me fait voir que le premier fait 2 toiſes par jour; de même diviſant 12 que le ſecond fait par le nombre 4 des jours qu'il y emploïe, le quotient 3 me marque 3 toiſes dans un jour; & par le même moïen je vois que le troiſiéme en un jour en fait 4.

3 | 2	4 | 3	5 | 4
6	12	20
0	0	0

2
3
4
9

Ajoutant ces trois quotiens enſemble, je trouve que ces trois ouvriers, emploïés en même-tems, font 9 toiſes en un jour; & en effet, 9 toiſes multipliées par 15 jours font 135 toiſes, ainſi que le porte la queſtion propoſée. Or pour ſavoir ce que chacun a fait ſur ces 135 toiſes, je fais trois régles de trois, en diſant pour le premier: Si ſur 9 toiſes le premier en fait 2, ſur 135 combien en fera-t-il? Et ainſi des deux autres.

9.	2	135	Réponſe 30	il revient au premier	360 liv.
9.	3	135	Réponſe 45	il revient au ſecond	540 liv.
9.	4	135	Réponſe 60	il revient au troiſiéme	720 liv.
			135		1620 liv.

Les régles faites, je trouve que le premier a fait 30 toiſes; le

ſecond 45, & le troiſiéme 60; ce que j'aurois trouvé également en multipliant 15 jours par 2 pour le premier, par 3 pour le ſecond, & par 4 pour le troiſiéme: quant au païement, multipliez 30, 45 & 60 par 12 liv. qui eſt le prix de la toiſe, & vous aurez pour le premier 360 liv. pour le ſecond 540 liv. & pour le troiſiéme 720 liv. & ces trois ſommes enſemble feront 1620 liv. qui eſt juſtement la valeur de 135 toiſes, à 12 liv. la toiſe.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Un ouvrier feroit un ouvrage en 6 jours, à 12 heures par jour; un autre le feroit en 4 jours, à 9 heures par jour; & un troiſiéme en trois jours, à 8 heures par jour; & les emploïant tous enſemble, on a trouvé qu'ils ont fini l'ouvrage en 12 heures: on demande quelle part de l'ouvrage chacun a fait, & ce qu'il doit retirer ſur 288 livres qu'on a données pour le païement.

Je multiplie les 6 jours que le premier homme emploïe par les 12 heures qu'il travaille par jour, & j'ai 72 heures; car c'eſt la même choſe de dire que cet homme fait l'ouvrage en 6 jours à 12 heures par jour, ou de dire qu'il le fait en 72 heures; je multiplie de même 4 jours que le ſecond emploïe par les 9 heures par jour qu'il y emploïe, & j'ai 36 heures; & enfin je multiplie les trois jours du troiſiéme par les huit heures par jour, & j'ai 24; ainſi je ſais que le premier fait l'ouvrage en 72 heures, le ſecond en 36, & le troiſiéme en 24. Maintenant pour les réduire tous trois à un même tems de travail, je conſidére que le premier aïant beſoin de 72 heures pour finir le travail, n'en fera par conſéquent que $\frac{1}{72}$ dans une heure; le ſecond pour la même raiſon n'en fera que $\frac{1}{36}$, & le troiſiéme $\frac{1}{24}$. Je réduis ces fractions en même dénomination, en multipliant le numérateur & le dénominateur de la ſeconde par 2, & ceux de la troiſiéme par 3, ce qui me donne $\frac{1}{72}$, $\frac{2}{72}$, $\frac{3}{72}$, dont la ſomme $\frac{6}{72}$ me fait voir que ces trois ouvriers travaillant enſemble ne peuvent faire dans une heure que $\frac{6}{72}$ de l'ouvrage. Ainſi pour ſavoir ce que chacun a fait de tout l'ouvrage en 12 heures, je fais trois régles de trois, en diſant pour le premier: Si ſur $\frac{6}{72}$ de l'ouvrage le premier en fait $\frac{1}{72}$, combien en fera-t-il ſur tout l'ouvrage, qui eſt 1 ou un entier? Et ainſi des deux autres.

6	4	3
12	9	8
12	36	24

Et ces règles faites, je trouve que le premier a fait $\frac{1}{6}$, le ſecond $\frac{1}{3}$, & le troiſiéme $\frac{1}{2}$, ce qui fait juſtement l'ouvrage entier. J'aurois trouvé la même choſe en multipliant $\frac{1}{72}$, $\frac{2}{72}$, $\frac{3}{72}$ par 12, ce qui auroit fait $\frac{12}{72}$, $\frac{24}{72}$, $\frac{36}{72}$, leſquels ajoutés enſemble font l'entier.

$\frac{6}{72}$.	$\frac{2}{72}$.	1.	Réponſe $\frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{6}$ ou $\frac{3}{6}$
$\frac{6}{72}$.	$\frac{2}{72}$.	1.	Réponſe $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{6}$
$\frac{6}{72}$.	$\frac{1}{72}$.	1.	Réponſe $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{6}$
			$\frac{6}{6}$ ou 1

Quant au païement, je prens le $\frac{1}{6}$ de la ſomme totale, qui eſt 48, & c'eſt la part du premier; le $\frac{1}{3}$, qui eſt 96, & c'eſt la part du ſecond, & la moitié, qui eſt 144, & c'eſt la part du troiſiéme. Ces trois parts ajoutées enſemble font 288, qui eſt préciſément ce que l'on a donné pour le prix de l'ouvrage.

part du premier	48
part du ſecond	96
part du troiſiéme	144
	288

SIXIE'ME EXEMPLE.

On a emploïé 14 hommes à un ouvrage. Les deux premiers ont travaillé chacun 8 jours à 12 heures par jour, & ordinairement ils gagnent 6 livres par jour; trois autres ont travaillé chacun 6 jours à 10 heures par jour, & ordinairement ils gagnent chacun 3 liv. quatre autres ont travaillé chacun 4 jours à 8 heures par jour, & ordinairement ils gagnent chacun 2 livres; enfin les cinq derniers ont travaillé chacun 12 jours à 6 heures par jour, & ordinairement ils gagnent 8 livres chacun. L'ouvrage fini on l'a eſtimé 1400 livres, & l'on veut ſavoir ce que chacun doit avoir pour ſa part, à proportion de ſon travail, & du gain qu'il fait ordinairement.

Je multiplie d'abord les deux premiers par le nombre 8 des jours qu'ils ont emploïés, ce qui fait 16; car deux hommes en huit jours font la même choſe qu'un homme en ſeize jours : je multiplie 16 par le nombre 12 des heures qu'ils emploïoient par jour, & j'ai 192, ce qui ne gâte encore rien; car un homme en 16 jours, à 12 heures, emploïe 192 heures; enfin je multiplie 192 par 6 liv. ce qui fait 1152. Ce dernier article paroît d'abord gâter la proportion, puiſque je multiplie 192 heures par 6 liv. de ſorte qu'il

qu'il ſemble que je faſſe valoir chaque heure 6 liv. au lieu qu'il en faut 12, c'eſt-à-dire un jour pour la valeur de ces 6 liv. mais ſi l'on y fait attention, on verra qu'après avoir fait le produit de 2 par 8, qui eſt 16, & que je regarde comme 16 jours de travail d'un ſeul homme, ſi j'avois multiplié par 6 liv. qui eſt la valeur d'un jour, j'aurois eu 96, que j'aurois regardé comme 96 jours à une livre par jour, puiſqu'un homme travaillant 16 jours à 6 liv. gagne autant qu'un autre qui travailleroit 96 jours, à une livre par jour. De ſorte donc que multipliant ces 96 jours par le nombre 12 des heures, j'aurois eu également 1152, que je regarde comme 1152 heures qu'un homme emploïe à ce travail, en gagnant une livre par jour.

2	3	4	5
8	6	4	12
16	18	16	60
12	10	8	6
32	180	128	360
16	3	2	8
192	540	256	2880
6			
1152			

16
6
96
12
192
96
1152

Je fais la même choſe à l'égard des autres, les multipliant ſucceſſivement par leur jour, leurs heures, & leur gain ordinaire, & j'ai pour ceux qui ſont trois enſemble 540, que je regarde comme 540 heures qu'un homme emploïe à cet ouvrage à une livre par jour; pour ceux qui ſont quatre enſemble, j'ai 256, que je regarde comme 256 heures emploïées par un autre homme, qui gagne auſſi une livre par jour; enfin pour ceux qui ſont cinq enſemble, j'ai 2880, que je regarde comme 2880 heures de travail au même

prix d'une livre par jour. Cela fait, la queſtion propoſée ſe réduit à dire : Quatre hommes gagnant également une liv. par jour, ont travaillé le premier 1152 heures, le ſecond 540, le troiſiéme 256, & le quatriéme 2880, & ils ont gagné 1400 liv. combien leur revient-il à chacun ? Et pour la réſoudre, il faut faire la ſomme totale de ces heures, & enſuite dire par régle de trois : Si 4828 heures que ces quatre ouvriers ont emploïées enſemble, ont gagné 1400 liv. combien gagneront 1152 heures que le premier a emploïées ? Et ainſi des trois autres. Et les régles faites, on trouvera les quatre parts telles qu'on les voit marquées ici, & dont la ſomme eſt égale au gain 1400 liv.

heures du premier	1152
heures du ſecond	540
heures du troiſiéme	256
heures du quatriéme	2880
ſomme	4828

4828	1400	1152	Réponſe	334	liv.	1	ſ.	0	den. $\frac{1584}{4828}$.
4828	1400	540	Réponſe	156	liv.	11	ſ.	8	den. $\frac{3760}{4828}$.
4828	1400	256	Réponſe	74	liv.	4	ſ.	8	den. $\frac{352}{4828}$.
4828	1400	2880	Réponſe	835	liv.	2	ſ.	6	den. $\frac{3960}{4828}$.
				1400	liv.	0	ſ.	0	den.

Ainſi les deux premiers des quatorze hommes que la queſtion contient, partageroient également la premiere part 334 liv. 1 ſol, 0 den. $\frac{1584}{4828}$; & par conſéquent chacun d'eux auroit 167 liv. 0 ſol, 6 den. $\frac{792}{4828}$, qui eſt la moitié de cette premiere part ; ceux qui ſont trois enſemble partageroient également la ſeconde part 156 liv. 11 ſols, 8 den. $\frac{3760}{4828}$, & chacun d'eux auroit 52 liv. 3 ſols, 10 den. $\frac{13616}{14784}$, qui eſt le tiers de cette ſomme ; ceux qui ſont quatre enſemble auroient chacun 18 liv. 11 ſols, 2 den. $\frac{88}{4828}$, qui eſt le quart de la troiſiéme part 74 liv. 4 ſols, 8 den $\frac{352}{4828}$; enfin ceux qui ſont cinq enſemble auroient chacun 167 liv. 0 ſol, 6 deniers $\frac{792}{4828}$, qui eſt le cinquiéme de la quatriéme part 835 liv. 2 ſols, 6 den. $\frac{3960}{4828}$.

De la Régle vulgairement appellée teſtamentaire.

XV. On a donné le nom de *teſtamentaire* à cette régle, parce qu'on a coutume de ſuppoſer qu'un homme à l'article de la mort laiſſe ſon bien à ſes enfans, à condition que quand le premier

prendra par exemple la moitié, le ſecond ne prendra que le tiers, le troiſiéme le quart, &c. Ceci paroît d'abord un paradoxe, parce qu'il eſt ſûr que la moitié, le tiers & le quart excédent, & ſont plus grands que le tout; mais on veut entendre par-là que ces enfans doivent partager le bien de leur pere proportionnellement aux parties d'un nombre ſuſceptible de moitié, de tiers & de quart; ce qui s'appelle dans le langage des Géometres *partager un nombre proportionnellement à certaines parties aliquotes d'un autre*, & non pas *faire une régle teſtamentaire*; car je ne crois pas que beaucoup de gens s'aviſent de faire leur teſtament de la ſorte, & d'énoncer leurs dernieres intentions avec tant d'obſcurité.

PREMIER EXEMPLE.

Un homme en mourant laiſſe 236000 *livres de bien, & ordonne que ſes enfans, qui ſont au nombre de quatre, partageront ce bien de façon que quand le premier aura* $\frac{1}{3}$, *le ſecond n'aura que* $\frac{1}{4}$, *le troiſiéme* $\frac{1}{5}$ *& le quatriéme* $\frac{1}{6}$; *quelle part chacun aura-t-il?*

Je cherche un nombre dont on puiſſe prendre le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{5}$, & le $\frac{1}{6}$, & pour le trouver plus aiſément, je multiplie les quatre dénominateurs 3, 4, 5 & 6, les uns par les autres, & leur produit eſt 360 dont je tire le $\frac{1}{3}$, qui eſt 120; le $\frac{1}{4}$, qui eſt 90; le $\frac{1}{5}$, qui eſt 72, & le $\frac{1}{6}$, qui eſt 60; & faiſant la ſomme de ces quatre parts, j'ai 342. Je dis donc: La ſomme 342 des parties aliquotes de 360 eſt à l'aliquote 120, qui eſt le $\frac{1}{3}$, comme l'héritage 236000 livres eſt au $\frac{1}{3}$ que le premier des enfans doit avoir; & ainſi pour les trois autres, en faiſant quatre régles de trois.

3									
4									
12						120	tiers de	360	
5						90	quart		
60						72	cinquiéme		
6						60	ſixiéme		
360						342			

342	120	236000	Rép.	82807	liv.	0	ſ. 4	d. $\frac{72}{342}$
342	90	236000	Rép.	62105	liv.	5	ſ. 3	d. $\frac{14}{342}$
342	72	236000	Rép.	49684	liv.	4	ſ. 2	d. $\frac{180}{342}$
342	60	236000	Rép.	41403	liv.	10	ſ. 2	d. $\frac{36}{342}$
				236000	liv.	0.	ſ. 0	d.

Et ces régles me donnent pour le premier 82807 liv. 0 ſ. 6 den. $\frac{72}{342}$; pour le ſecond 62105 liv. 5 ſols, 3 den. $\frac{144}{342}$; pour le troiſiéme 49684 liv. 4 ſols, 2 deniers $\frac{180}{342}$, & pour le quatriéme 41403 livres, 10 ſols, 2 deniers $\frac{324}{342}$; & ces quatre parts ajoutées enſemble font 236000 livres, qui eſt juſtement le fonds que le pere a laiſſé.

SECOND EXEMPLE.

Trois héritiers aïant ouvert le teſtament de leur pere, ont trouvé qu'il laiſſoit 9620 liv. qu'ils doivent partager entr'eux, enſorte que quand le premier aura les $\frac{4}{5}$, l'autre aura $\frac{3}{4}$, & le troiſiéme $\frac{2}{3}$; & l'on demande ce qui reviendra à chacun d'eux?

Je cherche un nombre dont je puiſſe tirer les $\frac{4}{5}$, les $\frac{3}{4}$ & les $\frac{2}{3}$, & je le trouve, en multipliant les trois dénominateurs 5, 4, 3, les uns par les autres, ce qui me donne le nombre 60. Je prens le $\frac{1}{5}$ de 60, qui eſt 12, & le multipliant par 4, parce que le premier doit prendre $\frac{4}{5}$, j'ai 48. Je prens de même le $\frac{1}{4}$ de 60, qui eſt 15, & le multipliant par 3, parce que le ſecond doit avoir $\frac{3}{4}$, j'ai 45. Enfin je prens le $\frac{1}{3}$ de 60, qui eſt 20, & le multipliant par 2, parce que le troiſiéme doit prendre $\frac{2}{3}$, j'ai 40; & la ſomme de ces parties eſt 133. Ainſi je fais trois régles de trois, en diſant pour la premiere: La ſomme 133 des parties aliquotes de 60 eſt à la partie aliquote 48, qui en eſt les $\frac{4}{5}$, comme l'héritage 9620 eſt aux $\frac{4}{5}$ que le premier doit prendre; & de même pour les deux autres.

48	$\frac{4}{5}$
45	$\frac{3}{4}$
40	$\frac{2}{3}$
133	

133	48	9620	Réponſe	3471 liv.	17 ſols	7 den.	$\frac{17}{133}$.
133	45	9620	Réponſe	3254 liv.	17 ſols	8 den.	$\frac{124}{133}$
133	40	9620	Réponſe	2893 liv.	4 ſols	7 den.	$\frac{125}{133}$
				9620 liv.	0 ſol	0 den.	

Et faiſant ces régles, je trouve pour le premier 3471 liv. 17 ſols, 6 den. $\frac{17}{133}$; pour le ſecond 3254 liv. 17 ſols, 8 den. $\frac{124}{133}$; & pour le troiſiéme 2893 liv. 4 ſols, 7 den. $\frac{125}{133}$; & ces trois parts ajoutées enſemble font 9620 liv. qui eſt préciſément le bien que le pere a laiſſé.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un homme à l'article de la mort laiſſant ſa femme enceinte, ordonne que ſi elle accouche d'un fils, ce fils aura les $\frac{2}{3}$ de ſon bien, & la mere l'autre $\frac{1}{3}$; & ſi au contraire elle accouche d'une fille, les $\frac{2}{3}$ ſeront pour la mere, & la fille aura l'autre $\frac{1}{3}$. Or il arrive qu'elle met au monde un fils & une fille, & l'on demande ce que la mere, le fils & la fille doivent avoir ſur l'héritage, qui ſe trouve de 46300 liv.

Voilà une fille qui s'aviſe fort mal-à-propos de naître en compagnie d'un frere, pour embarraſſer les Arithméticiens: mais n'importe; voïons comment nous nous tirerons d'embarras. Conſidérons d'abord que ſelon l'intention du pere le fils doit avoir le double de la mere, & la mere doit avoir le double de la fille; ainſi ſi nous prenons 4 pour le fils, la mere aura 2, & la fille aura 1; & ces trois nombres ajoutés enſemble font 7. Donc il n'y a plus qu'à faire trois régles de trois, en diſant: Si ſur 7 le fils prend 4, combien prendra-t-il ſur 46300? Et ainſi de même pour la mere & pour la fille.

				4					
				2					
				1					
				7					
7	4	46300	Rép.	26457	liv.	2	ſ.	10	den. $\frac{2}{7}$
7	2	46300	Rép.	13228	liv.	11	ſ.	5	den. $\frac{1}{7}$
7	1	46300	Rép.	6614	liv.	5	ſ.	8	den. $\frac{4}{7}$
				46300	liv.	0	ſ.	0	den.

Et faiſant ces trois régles, je trouve que le fils doit avoir 26457 liv. 2 ſols, 10 den. $\frac{2}{7}$; la mere 13228 liv. 11 ſols, 5 den. $\frac{1}{7}$, & la fille 6614 liv. 5 ſols, 8 den. $\frac{4}{7}$. Et ces trois ſommes font enſemble 46300 liv. qui eſt juſtement le fonds de l'héritage.

Et ſi au lieu d'un garçon & d'une fille la mere avoit accouché de deux filles, la part de la mere devant être double de celle de chaque fille, ſi nous avions ſuppoſé 2 pour la mere, chaque fille auroit eu 1, & ces trois enſemble font quatre; ce qui nous fait voir que la mere auroit eu 23150 liv. qui eſt la moitié de l'héritage, & chaque fille auroit eu pour ſa part 11575 liv. qui eſt la moitié de l'autre moitié.

Enfin ſi elle avoit accouché de deux garçons, comme chaque garçon auroit dû avoir le double de la mere, ſi nous ſuppoſions 2

pour chacun d'eux, la mere auroit eu 1, & ces trois nombres enſemble faiſant 5, nous font voir que la mere auroit eu le $\frac{1}{5}$ de l'héritage, qui eſt 9260 liv. & chaque garçon 18520 liv. qui ſont le double de la part de la mere.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Il eſt ordonné par le teſtament d'un homme, que ſi ſa femme qu'il a laiſſée enceinte, met au monde un garçon, ce garçon aura les $\frac{3}{4}$ du bien qu'il laiſſe, & la mere l'autre quart; & ſi elle accouche d'une fille, la mere aura les $\frac{3}{4}$, & le $\frac{1}{4}$ reſtant ſera pour la fille. Or elle accouche de deux garçons & d'une fille, & l'on veut ſavoir ce que chacun d'eux aura pour ſa part de l'héritage, qui ſe monte à 62500 liv.

Selon l'intention du teſtateur, la part de la mere ne doit être que le $\frac{1}{3}$ de la part de chaque garçon, & celle de la fille le $\frac{1}{3}$ de la mere. Ainſi ſuppoſant que chaque garçon prenne 9, la mere doit prendre 3, & la fille 1; & ces quatre nombres font enſemble 22. Ainſi je fais trois régles de trois; car il eſt inutile d'en faire une pour le ſecond garçon, puiſque ſa part ſera la même que celle du premier. Je dis donc: Si ſur 22 l'un des garçons prend 9, ſur 62500 que prendra-t-il? Et de même pour la mere & pour la fille.

9	
9	
3	
1	
22	

22	9	62500	Rép.	25568	liv.	3	ſols	7	den. $\frac{14}{22}$
22	3	62500	Rép.	8522	liv.	14	ſols	6	den. $\frac{12}{22}$
22	1	62500	Rép.	2840	liv.	18	ſols	2	den. $\frac{4}{22}$
				36931	liv.	16	ſols	4	den. $\frac{8}{22}$
				25568	liv.	3	ſols	7	den. $\frac{14}{22}$
				62500	liv.	0	ſols	0	den.

Et les régles faites, je trouve pour le premier garçon 25568 liv. 3 ſols, 7 den. $\frac{14}{22}$; pour la mere 8522 liv. 14 ſols, 6 den. $\frac{12}{22}$; pour la fille 2840 liv. 18 ſols, 2 den. $\frac{4}{22}$; leſquelles ſommes font enſemble 36931 liv. 16 ſols, 4 den. $\frac{8}{22}$; & ajoutant à celle-ci la part du ſecond garçon 25568 liv. 3 ſols, 7 den. $\frac{14}{22}$, la ſomme totale eſt 62500 liv. qui eſt préciſément le fonds de l'héritage.

Si la mere avoit accouché de trois garçons, quand chacun d'eux

auroit eu trois, la mere auroit eu un ; & les quatre nombres 3, 3, 3, 1 faiſant enſemble 10, la mere n'auroit eu par conſéquent que le $\frac{1}{10}$ de l'héritage, & les garçons auroient partagé le reſte par égale part. Et au contraire ſi elle avoit accouché de trois filles, chaque fille auroit eu 1, quand elle auroit eu trois, & ces quatre nombres 3, 1, 1, 1 faiſant enſemble 6, la mere auroit eu les $\frac{1}{6}$, c'eſt-à-dire la moitié de l'héritage, & les filles auroient partagé l'autre moitié par égale part.

Enfin ſi elle avoit accouché d'un garçon & de deux filles, quand le garçon auroit pris 9, la mere auroit pris 3, & chaque fille 1 ; & ces quatre nombres 9, 3, 1, 1 faiſant enſemble 14, on auroit fait trois régles de trois, comme ci-deſſus, en diſant pour le garçon : Si ſur 14 le garçon prend 9, ſur l'héritage que prendra-t-il ? Et ainſi de même pour la mere, & pour une des filles. Après quoi donnant à la ſeconde fille une part égale à celle de la premiere, la ſomme totale des parts auroit dû être égale au bien que le pere auroit laiſſé.

De la Régle de fauſſe poſition.

XVI. Dans la régle de fauſſe poſition on cherche à trouver un nombre inconnu par le moïen d'un autre nombre ſuppoſé qui a les mêmes propriétés ou conditions que celles qu'on nous fait connoître dans le nombre inconnu. Ainſi toute l'adreſſe conſiſte à trouver le nombre qu'on doit ſuppoſer ; après quoi il ne s'agit que d'une régle de trois pour réſoudre la queſtion.

PREMIER EXEMPLE.

Trois Marchands aïant fait une ſociété, le premier a mis le $\frac{1}{3}$ d'un certain nombre ; l'autre le $\frac{1}{4}$, & l'autre le $\frac{1}{5}$; & le fonds que leurs miſes ont compoſé monte à 4000 liv. on demande quelle eſt la miſe de chacun d'eux ?

Je cherche un nombre dont je puiſſe prendre le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$ & le $\frac{1}{5}$ ſans fraction, & pour le trouver plus aiſément, je multiplie les trois dénominateurs l'un par l'autre, ce qui fait 60 ; & je ſuppoſe que ce nombre 60 eſt celui dont ces trois Marchands ont pris l'un le $\frac{1}{3}$, l'autre le $\frac{1}{4}$, & l'autre le $\frac{1}{5}$. Je prens donc le $\frac{1}{3}$ de 60, qui eſt 20 ; le $\frac{1}{4}$, qui eſt 15 ; & le $\frac{1}{5}$, qui eſt 12 ; & ajoutant ces trois parties enſemble, leur ſomme

3	
4	20
	15
12	12
5	
60	47

eſt 47, & non pas 4000 : par conſéquent ma ſuppoſition eſt fauſſe. Mais comme 60 a ſes parties aliquotes proportionnelles à celles du nombre ſur lequel ces trois Marchands ont réglé leur miſe, je dis par régle de trois : Si 47, qui eſt la ſomme des parties aliquotes de 60, vient de 60, d'où viendra 4000, qui eſt la ſomme des parties aliquotes ſemblables du nombre que je cherche ?

Et faiſant la régle, je trouve que ce nombre eſt 5106 $\frac{18}{47}$; & pour m'en convaincre, je prens le $\frac{1}{3}$ de ce nombre, & ce $\frac{1}{3}$ eſt 1702 $\frac{6}{47}$; j'en prens le $\frac{1}{4}$, qui eſt 1276 $\frac{28}{47}$; & le $\frac{1}{5}$, qui eſt 1021 $\frac{13}{47}$; & ajoutant ces trois parties enſemble, leur ſomme fait 4000, qui eſt juſtement le fonds de la ſociété. Evaluant donc les fractions, je trouve que la miſe du premier eſt 1702 liv. 2 ſols, 6 den. $\frac{30}{47}$; celle du ſecond 1276 liv. 11 ſols, 10 den. $\frac{46}{47}$; & celle du troiſiéme 1021 liv. 5 ſols, 6 deniers $\frac{18}{47}$; leſquelles miſes jointes enſemble font juſtement 4000 livres.

47. 60. 4000 Réponſe 5106 $\frac{18}{47}$.

60

240000

47 | 5106 $\frac{18}{47}$

240000

50

30

30.0

18

le $\frac{1}{3}$ eſt 1702 $\frac{6}{47}$.
le $\frac{1}{4}$ eſt 1276 $\frac{28}{47}$.
le $\frac{1}{5}$ eſt 1021 $\frac{13}{47}$.

4000

Miſe du premier	1702	livres	2	ſols	6 deniers $\frac{30}{47}$.
Miſe du ſecond	1276	livres	11	ſols	10 deniers $\frac{46}{47}$.
Miſe du troiſiéme	1021	livres	5	ſols	6 deniers $\frac{18}{47}$.
	4000	livres	0	ſol	0 deniers.

SECOND EXEMPLE.

Trois perſonnes aïant mis en ſociété 39000 liv. l'une a mis le $\frac{1}{2}$ d'un certain nombre, l'autre le $\frac{1}{3}$, & la troiſiéme le $\frac{1}{4}$; & au bout d'un certain tems elles ont gagné 26000 : on demande quelle eſt la miſe de chacune de ces perſonnes, & ce qui revient à chacune en particulier ?

Je

Je cherche un nombre qui aïe moitié, tiers & quart ſans fraction, & je vois tout d'un coup que 12 a cette propriété ; car autrement j'aurois multiplié les trois dénominateurs enſemble pour trouver un nombre ſemblable. Je prens donc la $\frac{1}{2}$ de 12, qui eſt 6, le $\frac{1}{3}$, qui eſt 4, & le $\frac{1}{4}$, qui eſt 3, & ces trois parties enſemble ne font que 13, au lieu de 39000 ; la ſuppoſition eſt donc fauſſe. Mais comme je ſais que 13 eſt compoſé de parties aliquotes pareilles à celles qui ont compoſé la miſe totale 39000 liv. & que le gain total 26000 liv. doit être partagé en parties aliquotes de même nature pour faire les parts juſtes, je fais deux régles de trois, l'une pour trouver les miſes, & l'autre pour trouver les parts du gain. Je dis donc pour la premiere : Si 13 vient des parties aliquotes de 12, 39000 liv. d'où viendront-elles ?

Et faiſant la régle, je trouve 36000, dont la $\frac{1}{2}$ eſt 18000 liv. le $\frac{1}{3}$ eſt 12000, & le $\frac{1}{4}$ eſt 9000 liv. & ces trois parties font en effet 39000 liv. Ainſi voilà les trois miſes.

13. 12. 39000 Réponſe 36000 livres.

le $\frac{1}{2}$ eſt	18000	livres
le $\frac{1}{3}$ eſt	12000	livres
le $\frac{1}{4}$ eſt	9000	livres
	39000	livres

Pour le gain je dis : Si 13 vient de 12, d'où viendront 26000 livres. Et faiſant la régle, je trouve 24000 livres, dont la moitié 12000, le $\frac{1}{3}$ 8000, & le $\frac{1}{4}$ 6000 font en effet 26000 livres, & par conſéquent ces trois nombres ſont les trois gains particuliers.

13. 12. 26000 liv. Réponſe 24000 liv.

le $\frac{1}{2}$ eſt	12000	livres
le $\frac{1}{3}$ eſt	8000	livres
le $\frac{1}{4}$ eſt	6000	livres
	26000	livres

TROISIE'ME EXEMPLE.

Quatre perſonnes ont gagné une ſomme ſur laquelle la premiere doit prendre le $\frac{1}{3}$ la ſeconde le $\frac{1}{4}$, la troiſiéme le $\frac{1}{6}$; & ce qui doit reſter pour la quatriéme doit être 36 : on demande quelle eſt cette ſomme ?

Je vois d'un coup d'œil que 12 a un $\frac{1}{3}$, un $\frac{1}{4}$, un $\frac{1}{6}$ ſans fraction ;

ainſi ſans m'embarraſſer de chercher un autre nombre, je prens le $\frac{1}{3}$ de 12, qui eſt 4, le $\frac{1}{4}$, qui eſt 3, le $\frac{1}{6}$, qui eſt 2; & ajoutant ces trois parties enſemble, leur ſomme eſt 9; de ſorte que tirant cette ſomme de 12, le reſte eſt 3, & non pas 36: la ſuppoſition eſt donc fauſſe. Mais je dis: Si 3 eſt l'excédant de 12 ſur ſes parties aliquotes, 36 de quel nombre ſera-t-il l'excédant?

3. 12. 36 Réponſe 144.

12

72
36

432

3 | 432 | 144

1.3

1.2

0

le $\frac{1}{3}$ eſt 48
le $\frac{1}{4}$ eſt 36
le $\frac{1}{6}$ eſt 24
excédant 36

144

Et la régle me donne 144, dont la $\frac{1}{3}$ eſt 48, le $\frac{1}{4}$ 36, le $\frac{1}{6}$ 24; & ajoutant l'excédant 36 à ces trois parties, la ſomme eſt 144.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

On demande quel eſt le nombre qui multiplié par ſa moitié, & diviſé par ſon tiers fait 54?

Je prens le nombre 6, dont la $\frac{1}{2}$ eſt 3, & le $\frac{1}{3}$ eſt 2; je multiplie 6 par 3, ce qui fait 18, & diviſant par 2, j'ai 9 au lieu de 54: ainſi la ſuppoſition eſt fauſſe. Mais je dis: Si 9 vient de 6, d'où viendra 54? Et la régle me donne 36; lequel nombre multiplié par ſa moitié 18, fait 648; & diviſant par le $\frac{1}{3}$, qui eſt 12, le quotient eſt juſtement 54.

9. 6. 54 Réponſe 36.

6

324

9 | 324 | 36

54

36
18

288
36

648

12 | 648 | 54

48

Je pourrois réſoudre ici grand nombre d'autres queſtions ſem-

blables par le moïen de cette régle; mais comme on en vient à bout plus aiſément, & avec plus de ſûreté en y emploïant l'algébre, je me réſerve à en parler dans l'endroit de cet Ouvrage où je traiterai de cette ſcience.

De la Régle de deux fauſſes poſitions.

XVII. Pour opérer ſelon cette régle, on ſuppoſe d'abord un nombre que l'on prend pour le nombre inconnu que l'on cherche, & l'on tâche de ſatisfaire à la queſtion propoſée, en rempliſſant toutes les conditions qu'elle renferme. Si par haſard on a trouvé le vrai nombre par ce moïen, ce qui peut arriver quelquefois, on ne va pas plus loin, puiſque la queſtion eſt réſoluë. Mais ſi on trouve qu'on a ſuppoſé faux, on écrit le nombre ſuppoſé avec le plus ou le moins qu'on a trouvé dans l'opération: enſuite on prend un autre nombre, & faiſant la même choſe avec celui-ci qu'avec le premier, ſi on trouve encore qu'on a ſuppoſé faux, on écrit ce ſecond nombre avec le plus ou le moins qu'il a donné. Cela fait, on multiplie le premier nombre par le plus ou le moins du ſecond, c'eſt-à-dire par ſa différence; & le ſecond par la différence du premier: puis l'on conſidére ſi les différences ſont toutes les deux en plus, c'eſt-à-dire ſi on a trouvé également du trop dans les deux ſuppoſitions, ou ſi aïant trouvé du trop dans l'une, on a trouvé du trop peu ou du moins dans l'autre. Quand les deux différences ſont toutes les deux défaillantes, ou toutes les deux excédantes, on retranche le petit produit du grand produit, & la petite différence de la grande; après quoi on diviſe le reſte des produits par le reſte des différences, & le quotient eſt le nombre cherché. Mais quand les deux différences ſont l'une excédante, & l'autre défaillante, on fait une ſomme des deux produits, & une autre des deux différences; puis diviſant la ſomme des produits par celle des différences, le quotient eſt le nombre inconnu. J'expliquerai la raiſon de cette opération à la fin des deux exemples ſuivans, dont l'un renfermera le premier cas, & l'autre le ſecond.

PREMIER EXEMPLE.

Trois perſonnes viennent de faire un gain de 100 *liv. ſur lequel le premier doit prendre un certain nombre que l'on ne dit point, &*

ſecond trois fois autant, moins 10 *ſols, & le troiſiéme quatre fois autant, plus* 10 *ſols ; & l'on demande ce que chacune d'elles doit avoir ?*

Je ſuppoſe d'abord que le nombre que le premier doit prendre eſt 4 ; donc le ſecond doit avoir 11 liv. 10 ſols, & le troiſiéme 16 livres, 10 ſols ; & ces trois parts ajoutées enſemble ne font que 32 livres, au lieu qu'elles devroient faire 100 : la ſuppoſition eſt donc fauſſe. Et comme la différence de 32 à 100 eſt 68, j'écris à part le nombre 4 avec ſa différence 68, qui eſt défaillante.

premiere ſuppoſition
4 livres
11 livres 10 ſols
16 livres 10 ſols
32 livres

Je fais une autre ſuppoſition, en prenant 10 pour le nombre inconnu. Ainſi le ſecond aura 29 liv. 10 ſols, & l'autre 40 liv. 10 ſols ; & ces trois parts enſemble ne font que 80 liv. au lieu qu'il faudroit avoir 100 livres, je me ſuis donc encore trompé ; & comme la différence défaillante de 80 à 100 eſt 20, j'écris 10 avec ſa différence 20 ; après quoi je multiplie le premier nombre 4 par la différence 20 du ſecond, ce qui fait 80 ; & le ſecond 10 par la différence 68 du premier, ce qui fait 680 ; puis je retranche le petit produit 80 du grand 680, & reſte 600 ; je retranche de même la petite différence 20 de la grande 68, & reſte 48 ; & diviſant le reſte 600 par 48, je trouve 12 livres, 10 ſols, qui eſt le gain du premier ; le ſecond aura par con-

ſeconde ſuppoſition
10 livres
29 livres 10 ſols
40 livres 10 ſols
80 livres

4 moins 68
20
80
680
80
600
48
6 00 | 12 liv.
120
24

10 moins 20
68
80
60
680
80
600
68
20
48
24 | 48 | 10 ſols
20 | 480
480 | 0.0
0

ſéquent 37 livres, & le troiſiéme 50 liv. 10 ſols; & ces trois parts ajoutées enſemble font 100 liv.	nombre cherché	12 livres 10 ſols 37 livres 50 livres 10 ſols
		100 livres 0 ſol

Pour comprendre la raiſon de ceci, écrivons les ſuppoſitions que nous avons faites, en mettant ſelon la premiere, 4 liv. pour la premiere perſonne, 11 liv. 10 ſols pour la ſeconde, & 16 liv. 10 ſols pour la troiſiéme; ce qui fait 100 livres moins 68, ou 32 liv.

4 plus 11 l. 10 ſ. plus 16 l. 10 ſ. font 100 l. moins 68	
10 plus 29 l. 10 ſ. plus 40 l. 10 ſ. font 100 l. moins 20	

De même dans la ſeconde ſuppoſition, 10 liv. pour la premiere, 29 liv. 10 ſols pour la ſeconde, & 40 liv. 10 ſols pour la troiſiéme font 100 liv. moins 20. Ces deux ſuppoſitions ainſi écrites, il s'agit de faire évanoüir les deux différences 68 & 20, afin que nous trouvions 100 juſte; mais auparavant il faut tâcher de les rendre égales, afin qu'en retranchant l'une de l'autre, le reſte ſoit zero. Pour cela je multiplie tous les termes de la premiere ſuppoſition par la différence 20 de la ſeconde, & tous ceux de la ſeconde par la différence 68 de la premiere, & mes deux ſuppoſitions ſe réduiſent à ces deux-ci, dont les différences 1360 ſont égales. Je retranche donc tous les termes de la premiere de ceux de la ſeconde, chacun de chacun, & il reſtera:

80 plus 230 plus 330 font 2000 moins 1360	
680 plus 2006 plus 2754 font 6800 moins 1360	

Ainſi la différence 1360 eſt évanoüie. Mais au lieu de 100 liv. que je devrois avoir, j'ai 4800. Or pour réduire ces 4800 à 100, je conſidére que 4800 viennent d'avoir retranché 2000 de 6800, & que 2000 venant de 100 multiplié par 20, ſont la même choſe que 20 fois 100, de même que 6800 venant de cent multiplié par 68, ſont la même choſe que 68 fois 100. Or quand j'ai retranché 2000, ou 20 fois 100 de 6800, ou de 68 fois 100, il m'a reſté 48 fois 100, c'eſt-à-dire 100 multiplié par la différence 48 des deux différences 68 & 20; ainſi diviſant tous les termes du reſte 600, plus 1776, &c. par 48, j'aurai:

600 plus 1776 plus 2520 font 4800	
Et la queſtion	12 l. 10 ſ. plus 37 l. plus 50 l. 10 ſ. font 100

ſera reſoluë, puiſque diviſant 4800 par 48, le quotient ſera cent, & que les trois termes précédens ſeront égaux à ce quotient, attendu qu'ils auront été diviſés par le même diviſeur, & qu'avant la diviſion ils étoient égaux au dividende, puiſqu'on a toujours multiplié également de part & d'autre.

Ce que nous venons de faire ici eſt préciſément la même choſe que la régle nous preſcrit, ſi ce n'eſt que pour abréger, la régle n'opére que ſur les premiers termes 4 & 10 des deux ſuppoſitions, au lieu que nous avons opéré ſur tous les termes, pour connoître la raiſon de ce qu'on nous preſcrivoit. Mais pourquoi, dira-t-on, faut-il agir autrement quand les différences ne ſont pas toutes les deux excédantes, ou toutes les deux défaillantes? C'eſt ce que nous expliquerons ſur la fin de l'exemple ſuivant.

SECOND EXEMPLE.

Trois jeunes gens ſe promenant enſemble, promettent à un pauvre dont ils veulent ſe moquer, qu'ils lui donneront 20 ſols, à condition qu'il devinera quel eſt l'argent que chacun d'eux a dans ſa poche; & s'imaginant de l'embarraſſer davantage, ils ajoutent que le ſecond a le double du premier, moins une livre 5 ſols, le troiſiéme le triple du premier, plus une livre 5 ſols, & que la ſomme totale eſt 60. Le pauvre aïant fait attention à tout, reſout la queſtion, & ſe fait païer: on demande comment il a pû découvrir ce que le premier avoit?

Suppoſons que ce pauvre ait d'abord pris pour le premier 8 liv. le ſecond auroit donc eu 14 liv. 15 ſols; & le troiſiéme 25 liv. 5 ſols; & ces trois ſommes enſemble n'auroient fait que 48 liv. au lieu de 60: ainſi cette premiere ſuppoſition eſt fauſſe, & la différence qui eſt défaillante eſt 12.

premiere ſuppoſition	8		
	14 livres	15	ſols
	25 livres	5	ſols
	48 livres		

Suppoſons que voïant ſon erreur, il ait pris 14 pour le premier, le ſecond auroit donc eu 26 liv. 15 ſols, & le troiſiéme 43 liv. 5 ſols; & la ſomme totale auroit fait 84 liv. au lieu de 60: par conſéquent cette ſeconde

ſeconde ſuppoſition	14 livres		
	26 livres	15	ſols
	43 livres	5	ſols
	84 livres		

ſuppoſition eſt encore fauſſe, & la difference qui eſt excédante eſt 24. Qu'aura donc fait le pauvre après ceci ? 1°. Il aura multiplié le premier nombre 8 par la difference 24 du ſecond, & le ſecond 14 par la difference 12 du premier. 2°. Il aura ajouté le premier produit au ſecond, ce qui fait 360; & la difference 12 à la difference 24, ce qui fait 36. 3°. Enfin il aura diviſé la ſomme 360 des produits par la ſomme 36 des differences, & le quotient 10 liv. aura été l'argent du premier; car le ſecond aura eu par conſequent 18 liv. 15 ſols, & le troiſiéme 31 liv. 5 ſols; & ces ſommes ajoutées enſemble font en effet 60 liv.

8 moins 12	14 plus 24	
24	12	
192	28	24
168	14	12
360 ſomme	168	36 ſomme

36 | 360 | 10	argent du premier	10 livres	
0.0	argent du ſecond	18 livres	15 ſols
0	argent du troiſiéme	31 livres	5 ſols
	Total	60 livres	

Pour comprendre la difference de la façon d'agir de cet exemple d'avec celle dont on a agi dans le précédent, écrivons nos deux ſuppoſitions tout au long. Faiſons évanoüir les differences 12 & 20 : mais comme elles ſont inégales, multiplions auparavant tous les termes de la premiere ſuppoſition par la difference 24 de la ſeconde, & tous ceux de la ſeconde par la difference 12 de la premiere, & nos deux ſuppoſitions ſeront :

8 l. plus 14 l. 15 ſ.	plus 25 l. 5 ſ.	font 60 l.	moins 12
14 l. plus 26 l. 15 ſ.	plus 43 l. 5 ſ.	font 60 l.	plus 24

Les differences ſe trouvent à préſent égales, Mais pour les faire évanoüir, je ne puis pas retrancher l'une de l'autre, à cauſe que la premiere étant en moins, ſi j'en retranchois la ſe-

192,	plus 354,	plus 606,	font 1440 moins 288
168,	plus 321,	plus 519,	font 720 plus 288

conde, qui eſt en plus, elle ſe trouveroit double en moins, puiſque la ſouſtraction eſt un retranchement. Ainſi au lieu de faire évanoüir cette différence, j'en aurois le double, & ce double ſeroit moins 576 liv. Mais ſi je ne puis pas la faire évanoüir de cette façon, je puis ajouter les deux différences, & alors elles diſparoîtront ; car moins 288, plus 288 ne donne rien, l'un détruiſant ce que l'autre fait. Cela étant, j'ajoute mes deux ſuppoſitions, & j'ai :

Voilà donc les différences évanoüies. 360, plus 675, plus 1125, font 1160

Mais au lieu de 60, j'ai 1160, & la queſtion eſt de faire revenir 60 : pour cela je conſidére que 1160 viennent d'avoir ajouté enſemble 1440 & 720, & que 1440 venant de 60 multipliés par 24, 1440 ſont la même choſe que 24 fois 60, de même que 720 venant de 60 multipliés par 12, 720 ſont la même choſe que 12 fois 60 ; ainſi quand j'ai ajouté 720 à 1440, c'eſt la même choſe que ſi j'avois ajouté 12 fois 60 à 24 fois 60, ce qui auroit fait 36 fois 60, c'eſt-à-dire 60 multipliés par la ſomme 36 des différences ; donc ſi je diviſe tous les termes de la ſomme 360, plus 675, &c. j'aurai :

10 plus 14 liv. 15 ſ. plus 31 liv. 5 ſ. font 60 liv.

Et la queſtion ſera réſoluë, puiſque le quotient de 1160 par 36 ſera le nombre 60, & que les trois autres lui ſeront égaux, à cauſe que tout aura été diviſé par le même nombre, de même qu'on l'avoit multiplié auparavant par le même nombre, pour conſerver toujours l'égalité.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Deux Marchands ont fait venir l'un 80 ℔ *peſant d'une certaine marchandiſe, pour les droits de laquelle il a donné* 14 ℔ *peſant, & on lui a rendu* 4 *liv. l'autre* 190 ℔ *peſant de la même marchandiſe, ſur laquelle il a donné pour les droits* 31 ℔ *peſant, & quatre livres de ſon argent : on demande quel eſt le prix de cette marchandiſe, & ce que chacun a païé pour les droits ?*

Je ſuppoſe d'abord que le prix de la marchandiſe eſt 3 liv. par conſéquent le premier aïant donné 14 ℔ peſant, a païé 42 liv. ſur leſquelles 4 lui aïant été renduës, il reſte 38 qu'il a païées. Or je dis : Si ſur le pied de 3 liv. 80 ℔ païent 38 liv. combien devroient païer les 190 ℔ peſant que l'autre Marchand

14 ℔	
3 livres	
42	
4	
38 livres	

chand a fait venir? Et la régle me donne 90 liv. 5 ſols, que ce Marchand devroit païer, en ſuppoſant que le prix de la marchandiſe eſt à 3 liv.

80. 38 / 190 — 3420 / 38 — 7220 — 20 — 400 ſols — 80 | 400 | 5 ſols — 0

190. 80 | 722 0 | 90 livres — 2.0 — 20

Réponſe 90 livres 5 ſols

31 ℔ / 3 — 93 / 4 — 97 livres.

Cependant il a donné 31 ℔ peſant, leſquelles à 3 liv. font 93; & il a ajouté 4 liv. par-deſſus; ce qui fait 97 liv. donc la ſuppoſition eſt fauſſe, puiſqu'au lieu de 90 liv. 5 ſols, je trouve 97 liv. ce qui fait une différence excédante de 6 liv. 15 ſols.

Je ſuppoſe de nouveau que le prix de la marchandiſe eſt à 7 liv. par conſéquent le premier Marchand aïant donné 14 ℔ peſant, a païé 98 liv. ſur leſquelles rabattant les 4 qu'on lui a renduës, il reſte 94 liv. Je dis donc: Si ſur 80 ℔ peſant on païe 94 liv. pour les droits, combien païera-t-on ſur 190 ℔ peſant que le ſecond Marchand a fait venir?

14 ℔ / 7 — 98 / 4 — 94 livres

80. 94 / 190 — 8460 / 94 — 17860 — 26.0 — 20 — 400 ſols — 80 | 400 | 5 ſols — 0

190. 80 | 17 860 | 223 liv. — 18.6 — 20

Réponſe 223 livres 5 ſols

31 / 7 — 217 / 4 — 221

Et la régle me donne 223 liv. 5 ſols, que le ſecond Marchand au-

roit dû païer pour les droits, en ſuppoſant que le prix de la marchandiſe eſt à 7 liv.

Cependant il a donné 31 ℔ peſant, leſquelles à 7 liv. montent à 217 liv. & 4 qu'il a données de ſurplus ſont 221, au lieu de 223 liv. 5 ſols. La ſuppoſition eſt donc encore fauſſe, puiſqu'il ſe trouve une différence défaillante de 2 livres, 5 ſols; j'écris donc mes deux nombres ſuppoſés 3 & 7, avec leur différence, l'une excédante & l'autre défaillante; & je multiplie le premier 3 par la différence du ſecond, & le ſecond 7 par la différence du premier; & les deux produits ſont l'un 6 liv. 15 ſols, & l'autre 47 livres, 5 ſols.

Comme les différences ſont l'une en plus & l'autre en moins, j'ajoute ces deux produits enſemble, ce qui fait 54 livres; & faiſant la ſomme des différences qui eſt 9, je diviſe 54 par cette ſomme, & le quotient 6 me donne le prix de la marchandiſe.

3	plus 6 liv. 15 ſ.	7 liv.	moins 2 l. 5 ſ.
2 liv. 5 ſols		6 liv. 15 ſ.	
6 liv. 15 ſols		42 liv.	
		3 liv. 10 ſ.	
		1 liv. 15 ſ.	
		47 liv. 5 ſ.	
		6 liv. 15 ſ.	
		somme des produits 54 liv. 0 ſ.	

9 | 54 | 6 livres

0

6 livres 15 ſols
2 livres 5 ſols.

somme des différences 9 livres 0 ſols

14 ℔	31
6	6
84	186
4	4
Reſte 80	190 somme

Et pour ſavoir ce que chacun a païé pour les droits, & ſur quel pied, je multiplie les 14 liv. peſant que le premier a donné, par 6, & retranchant 4 du produit, je trouve qu'il a païé 80 liv.

Je multiplie de même les 31 pesant que le second a donné, par 6, & ajoutant 4 au produit, je trouve qu'il a donné 190 livres, & par conséquent qu'ils ont païé sur le pied de 20 sols par livre pesant, puisqu'ils ont donné chacun autant de livres qu'ils ont fait venir de livres pesant.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Un Maçon a pris un manœuvre pour 40 jours de tems, à condition qu'il lui donneroit 20 sols les jours qu'il travailleroit, & qu'au contraire les jours qu'il ne travailleroit pas le manœuvre lui rendroit 8 sols, & au bout de 40 jours, aïant compté ensemble, le manœuvre a reçû 17 liv. 12 sols: on demande combien de jours il a travaillé?

Comme il a gagné 17 liv. 12 sols, je ne puis pas supposer qu'il aïe travaillé moins de 17 jours, & je dois même supposer qu'il a travaillé davantage, attendu que les jours qu'il n'a pas travaillé lui rabattent de son gain. Par conséquent je suppose qu'il a travaillé 22 jours, ces 22 jours lui auront valu 22 liv. sur quoi il faut rabattre les 18 jours qu'il n'a pas travaillé, en comptant à 8 sols par jour de perte, ce qui fait 7 liv. 4 sols; ôtant donc 7 liv. 4 sols de 22 liv. reste 14 liv. 16 sols, au lieu de 17 liv. 12 sols qu'il a gagné; la supposition par conséquent est fausse, & la différence qui est défaillante est 2 livres, 16 sols.

	18		
	0	liv.	8 sols
pour 4 sols	3	liv.	12 sols
pour 4 sols	3	liv.	12 sols
	7	liv.	4 sols
	22		
	7	liv.	4 sols
	14	liv.	16 sols

Je suppose de nouveau qu'il a travaillé 26 jours, ces 26 jours lui auront produit 26 liv. sur quoi il faut rabattre les 14 jours qu'il n'a pas travaillé, à 8 sols par jour, ce qui fait 5 liv. 12 sols, lesquels retranchés de 26, reste 20 liv. 8 sols, au lieu que nous devrions avoir 17 liv. 12 sols; ainsi la supposition est encore fausse, & la différence qui est excédante est 2 liv. 16 sols.

	14		
	0	liv.	8 sols
pour 4 sols	2	liv.	16 sols
pour 4 sols	2	liv.	16 sols
	5	liv.	12 sols
	26		
	5	liv.	12 sols
	20	liv.	8 sols

J'écris donc mes deux nombres ſuppoſés, avec leur différence; l'une défaillante & l'autre excédante; enſuite je multiplie les deux nombres par 2 liv. 16 ſols, parce que la différence ſe trouve égale de part & d'autre, & les produits ſont 61 l. 12 ſ. & 72 l. 16 ſ. leſquels ajoutés enſemble, à cauſe qu'il y a plus & moins dans les différences, font 134 liv. 8 ſols; & diviſant 134 liv. 8 ſols par la ſomme 5 liv. 12 ſols des différences, je trouve au quotient 24 qui me marque que ce manœuvre a travaillé 24 jours; & en effet 24 jours font 24 livres de gain, deſquels rabattant les 16 jours qu'il n'a pas travaillé, à 8 ſols par jour, ce qui fait 6 liv. 8 ſols, le reſte eſt 17 liv. 12 ſols, ainſi qu'il eſt porté par la queſtion.

22 moins 2 l. 16 ſ.
2 l. 16 ſ.

44
11
5 l. 10 ſ.
1 l. 2 ſ.

61 l. 12 ſ.

26 plus 2 l. 16 ſ.
2 l. 16 ſ.

52
13
6 l. 10 ſ.
1 l. 6 ſ.

72 l. 16 ſ.
61 l. 12 ſ.

ſomme des produits 134 l. 8 ſ.
20

2680
8

2688 ſ.

112 | 24 jours
2688 |

448

0

2 l. 16 ſols
2 l. 16 ſols

ſomme des différences 5 l. 12 ſols
20

100
12

112 ſols

Quand les différences ſe trouvent égales, comme dans le cas préſent, il y a toujours entr'elles plus ou moins, n'étant pas poſſible que deux nombres différens donnent des différences égales,

toutes deux excédantes ou toutes deux défaillantes, à moins que ces deux nombres ne fuſſent préciſément les mêmes. Cela étant, on peut ſe paſſer de multiplier les nombres ſuppoſés par ces différences, puiſqu'il n'y a qu'à ajouter enſemble les deux nombres pour les faire évanoüir, & alors au lieu de diviſer la ſomme des deux nombres par la ſomme des différences, on prendra la moitié de cette ſomme, & cette moitié ſera le nombre cherché. Ainſi dans la queſtion préſente, ajoutant 22 à 26, ce qui fait 48, & prenant la moitié de 48, on auroit eu également 24. La raiſon de ceci eſt évidente après ce que j'ai dit ci-deſſus au ſujet de cette régle; mais pour le faire entendre mieux, écrivons au long les deux ſuppoſitions que nous avons faites dans cet exemple,

les différences ſont égales, ainſi il n'eſt pas beſoin pour les rendre égales de multiplier les termes de la premiere ſuppoſition par la différence de la ſeconde, ni ceux de la ſeconde par la différence de la premiere, & pour faire évanoüir ces différences, il ſuffit d'ajouter les deux ſuppoſitions enſemble, ce qui fait :

22 l. moins 7 l. 4 ſ. font 17 l. 12 ſ. moins 2 l. 16 ſ.

26 l. moins 5 l. 12 ſ. font 17 l. 12 ſ. plus 2 l. 16 ſ.

Les différences ne paroiſſent plus ici, mais au lieu de 17 liv. 12 ſols, j'ai 35 liv. 4 ſols, qui en eſt le double; ſi je prens donc la moitié de tous les termes de 48 liv. moins 12 liv. &c. j'aurai :

48 l. moins 12 l. 16 ſ. font 35 l. 4 ſ.

Et la queſtion ſera réſoluë, puiſque nous avons 17 liv. 12 ſols, comme il eſt requis, & que les deux autres termes doivent lui être égaux, attendu que nous avons toujours conſervé l'égalité.

24 l. moins 6 l. 8 ſ. font 17 l. 12 ſ.

De la Régle d'alliage.

XVIII. On emploïe la régle d'alliage non-ſeulement pour ce qui concerne les métaux que l'on peut allier entr'eux, mais encore pour tous les mélanges de grains, liqueurs, &c. Son objet n'eſt pas toujours le même. Tantôt on cherche quel alliage l'on doit faire de deux ou pluſieurs choſes de différens prix pour les vendre à un prix moïen ſans y rien perdre; tantôt on demande quel prix on doit mettre à un alliage déja fait ? Quelquefois on

veut découvrir un alliage caché, & quelquefois auſſi on tâche de connoître tous les mélanges poſſibles de pluſieurs choſes, ce qui a plus de rapport aux combinaiſons dont nous parlerons dans la ſuite, qu'à la régle dont il s'agit préſentement.

PREMIER EXEMPLE.

Un Marchand de vin a de quatre ſortes de vin : le premier vaut 8 ſols la pinte, le ſecond 10, le troiſiéme 18, & le quatriéme 20 ; quel mélange doit-il en faire pour vendre la pinte 15 ſols ?

J'écris les deux prix 8 & 10, qui ſont au-deſſous du prix moïen 15, l'un ſous l'autre ; je mets par-deſſous, mais en tirant vers la droite, le prix 15 ; & ſous celui-ci, vers la gauche, les deux prix excédans 18 & 20. Enſuite je prens la différence de 8 à 15, qui eſt 7, & je l'écris vis-à-vis de 20 ; & prenant de même la différence de 20 à 15, qui eſt 5, je l'écris vis-à-vis de 8. Je prens auſſi la différence de 10 à 15, qui eſt 5, & je l'écris vis-à-vis de 18 ; & la différence de 18 à 15, qui eſt 3, & je l'écris vis-à-vis de 10. Cela fait, j'ajoute ces différences enſemble, & la ſomme 20 me fait voir que ſur 20 pintes de mélange, je dois mettre 5 pintes à 8 ſols, 3 pintes à 10 ſols, 18 à 5 ſols, & 20 à 7 ſols. Et pour voir ſi cela eſt juſte, multipliez le mélange 20 par 15, & vous aurez 300 ſols pour le prix de ce mélange. Prenez d'un autre côté la valeur de 5 pintes à 8 ſols, qui eſt 40 ſols ; celle de 3 pintes à 10 ſols, qui eſt 30 ſols ; celle de 5 pintes à 18 ſols, qui eſt 90 ſols ; & celle de 7 pintes à 20, qui eſt 140, & faiſant une ſomme de ces quatre valeurs, vous trouverez également 300 ſols.

8			5
10			3
		15	
18			5
20			7
			20
20			
15			40
			30
100			90
20			140
300	ſols		300 ſols

La raiſon eſt qu'en échangeant les différences des prix inférieurs contre celles des ſupérieurs, il ſe fait une compenſation, de maniere que ce que l'on gagne d'un côté, on le rabat préciſement de l'autre ; & par conſequent on n'y gagne, ni ne perd rien. Quand je prens par exemple 5 pintes de vin à 8 pour le vendre à 15, je gagne 5 fois 7 ſols, puiſque ce vin vaut 7 ſols de moins ;

mais comme j'ai mis la différence vis-à-vis de 20, il faut que je mêle 7 pintes à 20 sols, & sur cela je pers sept fois 5 sols, puisque ce vin vaut 5 sols de plus. Or cinq fois 7 sols de gain, & sept fois 5 sols de perte ne font ni perte ni gain; & par conséquent le mélange est bien fait.

Tout l'art de cette régle consiste donc à échanger les différences défaillantes contre les excédantes, & à prendre garde que lorsqu'on a fait passer l'une des défaillantes du côté des excédantes, il faut que l'excédante, à la place de laquelle on l'a mise, aille prendre la place de celle-là. Ainsi aïant mis la différence 7 du vin à 8 sols vis-à-vis le vin de 20, je dois prendre l'excès 5 du vin à 20, & le mettre vis-à-vis de 8 sols, & non pas vis-à-vis celui de 10; & pourvû qu'on observe cette régle, il n'importe que l'on transporte la différence vis-à-vis de 20, ou vis-à-vis de 18; ce qui fait voir qu'on pourroit faire le mélange d'une autre façon sans y gagner ou perdre, non plus que dans le précédent, comme on peut voir ici.

J'écris la différence 7 du vin à 8 sols vis-à-vis de 18, & celle de 18, qui est 3, vis-à-vis de 8: j'écris de même la différence 5 du vin à 10 sols vis-à-vis de 20, & celle de 20, qui est 5 vis-à-vis de 10; & la somme 20 de ces différences me fait voir que sur 20 pintes de mélange j'en dois mettre 3 à 8 sols, 5 à 10 sols, 7 à 18 sols, & 5 à 20 sols.

8		3
10		5
	15	
18		7
20		5
		20

Que si le nombre des choses qu'on veut mélanger étoit plus grand, le nombre des différens mélanges seroit aussi plus grand. Supposons par exemple, qu'on eût six sortes de grains, dont le premier valût 6 sols le boisseau, le second 8, le troisiéme 10, le quatriéme 15, le cinquiéme 16, & le sixiéme 21; & qu'on voulût en faire un mélange, que l'on peut vendre 14 sols le boisseau: on voit ici qu'on pourroit faire six mélanges différens avec ces six sortes de grains; car tandis que je fais passer la différence de 6, qui est 8, vis-à-vis de 15, la différence de 8, qui est 6, peut se mettre ou vis-à-vis de 16, ou vis-à-vis de 21; ainsi voilà déja deux mélanges. De même tandis

20		
15		24
		50
100		126
20		100
300		300

que je ferai paſſer la différence huit vis-à-vis de 16, la différence ſix pourra ſe mettre vis-à-vis de 15, ou vis-à-vis de 21; voilà donc deux autres mélanges. Enfin quand je ferai paſſer la différence 8 vis-à-vis de 21, la différence ſix pourra ſe mettre vis-à-vis de 15, ou vis-à-vis de 16; & par conſéquent voilà encore deux mélanges, leſquels joints aux 4 précédens font 6.

6		1		6		1	
8		2		8		7	
10		7		10		2	
	14				14		
15		8		15		8	
16		6		16		4	
21		4		21		6	
		28				28	
6		2		6		2	
8		1		8		7	
10		7		10		1	
	14				14		
15		6		15		4	
16		8		16		8	
21		4		21		6	
		28				28	
6		7		6		7	
8		1		8		2	
10		2		10		1	
	14				14		
15		6		15		4	
16		4		16		6	
21		8		21		8	
		28				28	

Au reſte je n'ai fait cette obſervation que pour détromper les commençans, qui après avoir fait une de ces ſortes de mélanges, pourroient s'imaginer que tout autre qu'on leur propoſeroit ſeroit faux. D'ailleurs il y a des occaſions où il peut être utile de ne point ignorer ce que je viens de dire. Qu'on veüille, par exemple, ménager le grain à 6 ſols & à 8 ſols, parce qu'on en a peu, il eſt viſible que les deux premiers mélanges conviennent mieux que les quatre autres; de même qu'on ſoit bien-aiſe de vendre

davantage

davantage de ceux de 15 & de 16, que de celui à 8, le ſecond & le troiſiéme mélange ſeront les plus commodes, &c. Nous parlerons dans la ſuite des régles des combinaiſons, qui ſervent à trouver tous les mélanges poſſibles.

Si l'on n'avoit pas autant de différences excédantes que de défaillantes, alors on communiqueroit deux différences défaillantes à un même nombre. Suppoſons, par exemple, qu'on ait du vin à 12 ſols, à 14 ſols & à 20, & qu'on veüille en faire un mélange à 16 ſols la pinte; je prens la différence de 12 à 16, qui eſt 4, & je la mets vis-à-vis de 20, & prenant celle de 20 à 16, qui eſt encore 4, je la mets vis-à-vis de 12; je prens de même la différence de 14 qui eſt 2, & je l'écris vis-à-vis de 20, mais un peu au-deſſous du 4 qui y eſt déja, & prenant la différence de 20 qui eſt 4, je l'écris vis-à-vis de 14; & la ſomme 14 de ces différences me fait voir que ſur 14 pintes de mélange on doit en prendre quatre de vin à 12, quatre de celui à 14, & 6 de celui à 20.

12		4
14		4
	16	
20		4 } 2
		14
14		
16		48
		56
84		120
14		
		224 f.
224 ſols		

SECOND EXEMPLE.

Un Orfévre s'eſt chargé de faire un ouvrage qui doit peſer 75 marcs à 25 livres le marc; mais n'aïant point d'argent à ce titre, il veut faire un alliage de quatre ſortes d'argent qu'il a, & dont l'un eſt à 28 liv. le ſecond à 31 liv. le troiſiéme à 24 liv. & le quatriéme à 20 liv. combien doit-il en prendre de chacun?

J'écris ces différens prix & le prix moïen à la façon ordinaire; enſuite j'écris la différence de 20, qui eſt 5, vis-à-vis 28, & celle de 28, qui eſt 3, vis-à-vis de 20. J'écris de même la différence de 24, qui eſt 1, vis-à-vis de 31, & celle de 31, qui eſt 6, vis-à-vis de 24; & la ſomme 15 me fait voir que pour 15 marcs de cet alliage, il

20		3
24		6
	25	
28		5
31		1
		15

faudroit en prendre 3 de l'argent à 20 livres le marc, 6 de celui à 24, 5 de celui à 28, & 1 de celui à 31 ; mais comme c'eſt 75 marcs & non pas 15, je fais quatre régles de 3, en diſant, pour la premiere : Si ſur 15 marcs il en faut 3 du premier argent, combien en faudra-t-il ſur 75 ? Et ainſi des trois autres.

15	3	75	Réponſe 15 marcs à 20 livres
15	6	75	Réponſe 30 marcs à 24 livres.
15	5	75	Réponſe 25 marcs à 28 livres.
15	1	75	Réponſe 5 marcs à 31 livres

75

75	15	30	25	5
25	20	24	28	31
375	300	120	200	155
150		60	50	
1875		720	700	

300
720
700
155

1875.

Et ces régles faites, je trouve qu'il faut 15 marcs du premier, 30 du ſecond, 25 du troiſiéme, & 5 du quatriéme, & ces ſommes ajoutées enſemble font en effet 75 marcs.

Et pour m'aſſurer ſi j'ai bien opéré, je multiplie 75 par 25, qui eſt le prix de l'alliage, & le produit eſt 1875 ; enſuite multipliant les marcs qui ont formé cet alliage par leur prix, c'eſt-à-dire 15 par 20, 30 par 24, 25 par 28, & 5 par 31 ; j'ajoute enſemble les quatre produits 300, 720, 700 & 155, & leur ſomme eſt préciſément 1875, de même que celle de l'alliage.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un Marchand écrit à un Fermier de lui envoïer 200 boiſſeaux de bled à 6 livres le boiſſeau ; le Fermier n'aïant point de bled à ce prix, lui en envoïe un mélange compoſé de quatre ſortes de bled, dont le premier vaut trois livres le boiſſeau, le ſecond 5, le troiſiéme 8, & le quatriéme 10 : on demande combien il y a de boiſſeaux de chaque eſpéce dans ce mélange ?

J'écris ces quatre prix & le prix moïen de même que dans les exemples précédens, & après avoir échangé leurs différences, la somme 10 me fait voir que sur 10 boisseaux il en faut 2 de la premiere espéce, 4 de la seconde, 3 de la troisiéme, & 1 de la quatriéme; c'est pourquoi je fais quatre régles de trois, en disant pour la premiere: Si sur un mélange de 10 boisseaux, il en faut 2 de la premiere espéce, combien en faudra-t-il sur un mélange de 200 boisseaux? Et ainsi de même pour les trois autres.

3		2						
5		4						
6								
8		3						
10		1						
		10 boisseaux						

10	2	200	Réponse	40	à	3	sols	
10	4	200	Réponse	80	à	5	sols	
10	3	200	Réponse	60	à	8	sols	
10	1	200	Réponse	20	à	10	sols	
				200	boisseaux			

200 boisseaux	40	80	60	20	6 liv.
6	3	5	8	10	20 liv.
					24 liv.
1200	120	400	480	200	10 liv.
60 livres	6 l.	20 l.	24 l.	10 l.	60 liv.

Ces quatre régles me donnent 40 boisseaux de la premiere espéce, 80 de la seconde, 60 de la troisiéme & 20 de la quatriéme, & la somme de ces boisseaux fait en effet 200 boisseaux.

Pour voir si j'ai bien opéré, je multiplie 200 boisseaux par le prix moïen 6 sols, & j'ai 1200 sols, qui font 60 liv. D'un autre côté je multiplie les quatre nombres qui composent le mélange par leur prix, c'est-à-dire 40 par 3 sols, 80 par 5 sols, 60 par 8 sols, & 20 par 10; & ajoutant les quatre produits ensemble, je trouve que leur somme fait aussi 60 livres.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Un pied cubique d'une certaine matiere pese 144 lb, *un pied cubique de matiere d'une autre espéce en pese* 112, *& un pied cubique composé de ces deux matieres en pese* 132; *quel est le mélange de ce dernier, c'est-à-dire, combien y a-t-il dans ce dernier de matiere de la premiere & de la seconde espéce?*

J'écris les deux poids & le moïen à la façon ordinaire, & après

avoir échangé les différences, la ſomme 32 me fait voir que pour un alliage de deux matieres qui peſât 32 ℔, il faudroit prendre 20 ℔ de la premiere & 12 de la ſeconde; c'eſt pourquoi je fais deux régles de trois, en diſant pour la premiere: Si pour un mélange de 32 ℔ il faut 20 ℔ de la premiere, combien en faudra-t-il pour un mélange de 132 ℔? Et de même pour la ſeconde.

144 20 132 112 12 32 ℔

Et faiſant ces régles, je trouve qu'il faut 82 ℔ ½ de la premiere, & 49 livres ½ de la ſeconde.

32. 20. 132. Rép. 82. ½.
32. 12. 132. Rép. 49. ½.
132 ℔.

Pour ſavoir à préſent ſi j'ai bien opéré, je conſidére que ce mélange 132 ℔ occupant 1 pied cubique, occupe par conſéquent 1728 lignes cubiques: donc il faut que la partie 82 ½ ℔ de la premiere, & 49 ½ de la ſeconde n'occupent pas plus d'eſpace. Cependant ſi je veux prendre par la régle de trois la valeur de ces parties en lignes cubiques, en diſant pour la premiere: Si 144 ℔ occupent 1728 lignes cubiques, combien en occuperont 82 ℔ ½? La régle me donnera 990 lignes; & diſant enſuite pour la ſeconde: Si 112 ℔ occupent 1728 lignes cubiques, combien en occuperont 49 ℔ ½? La régle me donnera 763 lignes $\frac{80}{112}$, leſquelles ajoutées aux 990 que nous avons déja trouvées, font 1753 $\frac{80}{112}$ qui eſt bien plus que 1728; par conſéquent il paroît qu'il y a ici de l'erreur: mais il faut prendre garde que la premiere matiere que l'on veut mélanger étant plus peſante que la ſeconde, comprimera les 49 ℔ ½ de la ſeconde; enſorte qu'elles n'occuperont pas plus de place que les autres parties de la premiere matiere qui n'entreront pas dans le mélange. Retranchant donc du poids 144 de la premiere les 82 ½ qui ſont dans le mélange, le reſte ſera 61 ℔ ½ qui occuperoient le même eſpace dans le mélange que les 49 ½ lorſqu'elles ſe trouveront comprimées; de ſorte que mettant au lieu de ces 49 ½ les 61 ℔ ½, & faiſant une régle de trois, en diſant: Si 144 ℔ de la premiere matiere occupent 1728 lignes cubiques, quelle

112. 1728. 49 ½. Rép. 763 lignes $\frac{80}{112}$.
990
1753 $\frac{80}{112}$.

144
82 ½
61 ½

place occuperoit leur partie $61\frac{1}{2}$ à la place des $49\frac{1}{2}$ de la ſeconde matiere? Et la régle donne 738 lignes, leſquelles ajoutées aux 990 trouvées ci-deſſus, font juſtement 1728 lignes ou un pied cube.

144. 1728. $61\frac{1}{2}$ Réponſe 738 lignes.

990

1728

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Une perſonne voulant faire élever un ouvrage de 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, y a emploïé trois ouvriers, dont l'un auroit achevé l'ouvrage dans 4 jours, s'il avoit pû le continuer; le ſecond, s'il avoit été ſeul, l'auroit fini dans 14 jours; & le troiſiéme, dans 18; & l'ouvrage a été fait dans 8 jours: on demande quelle partie chacun en a fait, & quel tems il y a emploïé?

Pour réſoudre cette queſtion, il faut l'enviſager d'une autre maniere, qui revient au même, mais qui fera mieux comprendre comment on y peut appliquer la régle d'alliage. Suppoſons qu'au lieu de trois ouvriers, nous n'en aïions qu'un, & que les 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces ne ſoient pas également faciles à faire, de maniere que ſi elles étoient toutes de la premiere eſpece, l'ouvrier n'y emploïeroit que quatre jours; & ſi elles étoient toutes de la ſeconde, il y en emploïeroit 14, & de la troiſiéme, il en emploïeroit 18; & qu'étant mélangées comme elles ſont, il y en emploïe 8, il eſt ſûr que lorſqu'il fera celles de la premiere eſpéce, il gagnera du tems; & qu'au contraire lorſqu'il fera celles de la ſeconde, & de la troiſiéme, il en perdra; mais que cette perte & ce gain étant de telle nature, qu'il a beſoin de huit jours pour achever l'ouvrage, c'eſt la même choſe pour lui de faire cet ouvrage, que d'en faire un autre d'égale grandeur, dont les toiſes ſeroient toutes de même eſpéce, & ne demanderoient également que huit jours de travail. Or comme ces toiſes uniformes mettroient de l'uniformité dans le travail de cet ouvrier, c'eſt-à-dire, qu'il n'y auroit pas de perte de tems pour les unes, ni de gain pour les autres, elles ſeroient néceſſairement d'une valeur moïenne entre celles qui demandent 4 jours, & celles qui demandent 14 & 18 jours.

4		6
	8	10
14		4
18		4
		24 toiſes

Ainſi faiſons l'alliage, en écrivant à la maniere ordinaire ces dif-

férentes valeurs de toiſe, & la valeur moïenne. Echangeons les différences, & la ſomme 24 toiſes nous fera voir que pour faire un mélange de 24 toiſes, il en faudroit 16 de celles qui demandent 4 jours, 4 de celles qui en demandent 14, & 4 de celles qui en demandent 18.

Et pour faire voir que cela doit être ainſi, conſidérons que tandis que l'ouvrier fera les 16 toiſes, il gagnera 4 parties de tems ſur chaque toiſe, puiſque la différence de 4 à 8 eſt 4, & qu'ainſi il gagnera 64 parties du tems; mais qu'en revanche lorſqu'il fera 4 de celles dont la différence eſt 6, il perdra ſur chacune d'elles 6 parties de tems, ce qui fera 24; & lorſqu'il fera 4 de celles dont la différence eſt 10, il perdra ſur chacune d'elles 10 parties de tems, ce qui fait 40, leſquelles jointes aux 24 précédentes, font 64 parties de perte, de même qu'il y avoit 64 parties de gain; & qu'ainſi l'ouvrier ne ſera ni plus avancé, ni plus retardé que s'il avoit fait 24 toiſes uniformes, & d'une valeur moïenne.

Maintenant pour faire un mélange de 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, comme la queſtion le porte, il faut faire trois régles de trois, en diſant pour la premiere: Si 24 de mélange demandent 16 de la premiere eſpéce, combien en demanderont 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces? Et de même pour les deux autres de la ſeconde & de la troiſiéme eſpéce.

24	16	109	t.	3	p.	6	pou.	Rép.	73	t.	0	p.	4	pou.
24	4	109	t.	3	p.	6	pou.	Rép.	18	t.	1	p.	7	pou.
24	4	109	t.	3	p.	6	pou.	Rép.	18	t.	1	p.	7	pou.
									109	t.	3	p.	6	pou.

Les trois régles faites, on trouvera que ce mélange comprend 73 toiſes, 0 pied, 4 pouces de la premiere eſpéce, 18 toiſes, 1 pied, 7 pouces de la ſeconde, & 18 toiſes, 1 pied, 7 pouces de la troiſiéme; & ces trois parties ajoutées enſemble font effectivement 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces.

Maintenant pour voir ſi on ne s'eſt pas trompé, & pour connoître en même-tems quelle partie de tems chacune de ces parties a emporté, il faut faire trois autres régles de trois, en diſant pour la premiere: Si 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces de la premiere eſpéce n'auroient occupé cet ouvrier que quatre jours, combien de tems l'occuperont 73 toiſes, 0 pied, 4 pouces de la même eſpéce? Pour la ſeconde on dira: Si 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces de

la ſeconde eſpéce auroient occupé cet ouvrier 14 jours, combien de tems l'occuperont 18 toiſes, 1 pied, 7 pouces de la même eſpéce? Et ainſi de même pour la troiſiéme.

109	t.	3	p.	6	pou.	4	jours	73	t. 0 p. 4 pou.	R. 2 $\frac{1}{3}$	jours
109	t.	3	p.	6	pou.	14	jours	18	t. 1 p. 7 pou.	R. 2 $\frac{2}{3}$	jours
109	t.	3	p.	6	pou.	18	jours	18	t. 1 p. 7 pou.	R. 3	jours
											8 jours

Et ces trois régles faites, on trouvera que les toiſes de la premiere eſpéce qui ſont dans le mélange, ont occupé l'ouvrier 2 jours $\frac{1}{3}$, celles de la ſeconde 2 $\frac{2}{3}$, & celles de la troiſiéme 3; & ces trois parties de tems ajoutées enſemble ſont préciſément huit jours.

Or comme c'eſt la même choſe de dire qu'un ouvrier en huit jours a fait 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces de différente eſpéce, dont la premiere, ſi elle eût fait le compoſé tout entier, l'auroit occupé 4 jours, l'autre 14, & la troiſiéme 18; ou de dire que trois ouvriers ont fait 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces d'ouvrage de même nature, lequel auroit occupé le premier 4 jours, s'il eût été ſeul, le ſecond 14 jours, & le troiſiéme 18; comme, dis-je, l'un & l'autre revient au même, puiſque les toiſes faites par l'ouvrier ſeul formeroient un mélange équivalant à celles que les trois ouvriers feroient, & que de part & d'autre le même nombre de jours eſt emploïé à le finir, c'eſt-à-dire 8 jours, il s'enſuit que pour répondre directement à la queſtion, il faut dire que le premier a travaillé 2 jours $\frac{1}{3}$, & a fait 73 toiſes, 0 pied, 4 pouces; le ſecond a travaillé 2 $\frac{2}{3}$ jours, & a fait 18 toiſes, 1 pied, 7 pouces; & le troiſiéme a travaillé 3 jours, & en a fait autant que le ſecond; & que par conſéquent les trois enſemble en 8 jours ont fait 109 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, ainſi qu'il étoit porté par la queſtion.

Le premier a travaillé	2	jours $\frac{1}{3}$	& a fait	73	t.	0	pied	4	pouc.
Le ſecond a travaillé	2	jours $\frac{2}{3}$	& a fait	18	t.	1	pied	7	pouc.
Le troiſiéme a travaillé	3	jours	& a fait	18	t.	1	pied	7	pouc.
Les trois enſemble en	8	jours	ont fait	109	t.	3	pieds	6	pouc.

Il n'eſt pas néceſſaire dans ces ſortes de queſtions de ſe faire des ſuppoſitions comme j'ai fait ici, & l'on pourroit tout d'un coup faire la régle ſans ce ſecours, en opérant de même que j'ai fait;

mais comme il importe beaucoup de ne jamais rien faire par routine & à tâtons, ce qui expoſe ſouvent à ſe tromper, j'ai été bien-aiſe de montrer aux commençans de quelle maniere il faut enviſager les choſes, afin de marcher de pied ferme, & ſans crainte de tomber dans l'erreur.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Pour faire un ouvrage de 288 *toiſes, on veut emploïer trois ouvriers d'inégale force, & dont l'un ne fait que* 5 *toiſes, tandis que l'autre en fait* 7, *& le troiſiéme en fait* 12; *& ſuppoſant qu'un quatriéme n'en fît dans le même tems que* 8, *on exige que ces trois ouvriers travaillans chacun un certain nombre de jours, finiſſent l'ouvrage en* 105 *jours, qui eſt le tems que la force* 8 *y emploïeroit; on demande combien de jours chacun emploïera à ce travail, & quelle partie il fera de l'ouvrage?*

Ces trois ouvriers étant d'inégale force, il eſt conſtant que leurs jours de travail ſeront entr'eux comme leur force, & par conſéquent comme les nombres 5, 7, 12; au lieu que les jours de travail de la force 8 ſeroient tous égaux entr'eux. Ce que l'on demande donc eſt de faire un alliage de ces jours inégaux qui produiſe dans 105 jours 288 toiſes, de même que la force 8 les produiroit dans 105 jours. Ainſi faiſons cet alliage en écrivant les jours différens, & les moïens à la façon ordinaire; & après avoir échangé les différences, faiſons-en la ſomme; nous trouverons que pour 12 jours d'alliage il en faut 4 du premier, 4 du ſecond, & 4 du troiſiéme; ce qui doit être effectivement ainſi, car les quatre jours du premier ſe trouvant chacun défaillans de 3 parties d'ouvrage, puiſque leur différence eſt 3, laiſſeront en arriere 12 parties d'ouvrage; de même les 4 jours du ſecond, dont la différence eſt 1, laiſſeront en arriere quatre parties d'ouvrage, qui ajoutées à 12, feront 16: mais d'un autre côté les 4 jours du troiſiéme, dont l'excès eſt 4, avanceront l'ouvrage de 4 parties d'ouvrage par jour, ce qui fera 16; & par conſéquent il n'y aura rien de perdu, & les trois enſemble n'auront pas plus fait pendant ces 12 jours que la force 8 n'en auroit fait dans le même tems.

5		4
7	8	4
12		3 / 1
		12 jours

Maintenant comme on propoſe de trouver un alliage de 105 jours,

jours, faisons une régle de trois, en disant : Si pour 12 jours de mélange il en faut 4 du premier ouvrier, combien en faudra-t-il pour 105 ? Et cette régle servira pour les deux autres, attendu que le nombre 4 est pour tous les trois.

La régle nous donnera 35 jours, lesquels multipliés par 3 font en effet 105 jours. Ainsi nous savons que chaque ouvrier emploïera 35 jours. Et pour savoir si nous avons bien opéré, il ne nous reste plus qu'à voir si les trois parties d'ouvrage que feront ces ouvriers seront égales à 288 toises ; ce qui en même-tems servira de réponse au second article de la question.

12.	4.	105.	Réponse	35 jours.
				3
				105 jours.

Comme les 35 jours que chaque ouvrier emploïe sont le tiers de 105, prenons de même le $\frac{1}{3}$ de 288 toises, qui est 96, & faisons trois régles de trois, en disant pour la premiere : La force 8 en 35 jours feroit 96 toises, combien l'ouvrier dont la force est 5, en fera-t-il en ces mêmes 35 jours ? Et ainsi des deux autres.

Et ces régles nous donneront pour le premier 60 toises, pour le second 84, & pour le troisiéme 144 ; & ces trois parties ajoutées ensemble font préciſément 288 toises.

8.	96.	5	Réponse	60 toises
8.	96.	7	Réponse	84 toises
8.	96.	12	Réponse	144 toises
				288 toises

SEPTIE'ME EXEMPLE.

Deux masses de matiere différente pesant l'une & l'autre 300 lb, *aïant été plongées dans un grand vase plein d'eau, en ont fait sortir la premiere* 50 *mesures d'eau, & la seconde* 60. *Une troisiéme masse, qui est un mélange des deux premieres, & qui pese également, aïant été plongée de même, a fait sortir* 56 *mesures : on demande combien cette troisiéme contient de livres pesant de chacune des deux autres ?*

Avant de résoudre cette question, il faut savoir que deux corps de même poids étant plongés dans l'eau, en font sortir plus ou moins, selon la différence de leur volume, & que le poids de l'eau dont ils prennent la place est toujours égal au poids que ces corps perdent en y entrant. Ce qu'il est aisé de prouver, ainsi que je

l'enſeignerai ci-deſſous. Cela ſuppoſé, comme 50 meſures, 56 & 60 d'une même eau différent entr'elles de poids à proportion de leur nombre, nous pouvons regarder ces trois nombres comme étant les poids de ces trois volumes d'eau, & par conſéquent comme étant auſſi les poids qu'ont perdu les trois maſſes en y entrant. Ainſi ce qu'on nous demande ſe réduit à faire un alliage de deux matieres, dont l'une perd dans l'eau 50 parties de ſon poids, & l'autre 60, de façon que l'alliage n'en perde que 56, quoiqu'il ſoit de même poids que l'une ou l'autre de ces deux matieres. Pour cela j'écris les poids 50, 60, & le poids moïen 56 à la maniere ordinaire, j'échange les différences, & leur ſomme 10 me fait voir que pour faire un alliage qui peſe 10 ℔, j'en dois prendre 4 de la premiere matiere, & 6 de la ſeconde; car ſi les 4 de la premiere perdent chacune 6 parties de poids de moins qu'il ne faut, ce qui fait 24, les 6 de la ſeconde en perdront chacune 4 de plus qu'il ne faut, ce qui fait auſſi 24; & par conſéquent tout ſera compenſé, & ces 10 ℔ de mélange ne perdront ni plus, ni moins de 56 parties de leur poids. Je fais donc deux régles de trois, en diſant pour la premiere : Si pour 10 ℔ d'alliage il faut 4 ℔ de la premiere matiere, combien en faudra-t-il pour un alliage de 300 ℔? Et de même de la ſeconde.

50	56	4		
60		6		
				10 ℔.

Ces deux régles me donnent 120 ℔, & 180 ℔, qui font enſemble 300 ℔; ce qui me fait voir qu'il faudra 120 ℔ de la premiere matiere, & 180 de la ſeconde.

10.	4.	300	Réponſe	120 ℔.
10.	6.	300	Réponſe	180 ℔.
				300 ℔.

Ce fut en ſe ſervant de ces principes qu'Archimede découvrit à Hieron Tyran de Syracuſe la fourberie de ſon Orfévre. Ce Prince lui avoit donné une certaine quantité d'or pour faire une couronne; l'Orfévre l'aïant appottée, il ſoupçonna qu'il y avoit du mélange, & pour s'en aſſurer, il eut recours à Archimede. Ce ſavant Mathématicien voulant le ſatisfaire, prit deux lingots, l'un d'or pur, & l'autre d'argent, tous deux de même poids que la couronne de l'Orfévre, & s'étant apperçû en les trempant dans l'eau, que l'un en faiſoit ſortir moins que l'autre, & que la couronne de l'Orfévre en faiſoit ſortir plus que le lingot d'or, &

moins que le lingot d'argent, il connut par-là qu'il y avoit de l'alliage, & en détermina la quantité, ainsi que nous avons fait ci-dessus.

Supposant donc que le poids de la couronne fût de 96 onces, & que tandis que plongée dans l'eau elle en faisoit sortir 8 onces, le lingot d'or plongé de même en faisoit sortir $7\frac{3}{4}$, & celui d'argent $9\frac{1}{4}$; il allia ces trois quantités d'eau, qu'il regarda comme étant les différentes parties de poids que la couronne & les deux lingots perdoient, & la somme $1\frac{1}{2}$ des différences lui fit connoître que pour faire un alliage d'une once & demi, il falloit une once & un quart d'or & $\frac{1}{4}$ d'argent. Après quoi il fit deux régles de trois, disant pour la premiere : Si dans un alliage d'une once $\frac{1}{2}$ il entre une once & un quart d'or, combien en entrera-t-il dans un alliage de 96 onces ? Et de même pour la seconde.

	$7\frac{3}{4}$			$1\frac{1}{4}$	
		8			
	$9\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$	
				$1\frac{1}{2}$	

Et les régles faites, il trouva qu'il devoit y avoir dans

$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	96	Réponse	80 onces d'or
$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	96	Réponse	16 onces d'argent
		96		

la couronne 80 onces d'or & 16 d'argent, ce qui fait précisément 96 onces. Ainsi l'Orfèvre avoit retenu 16 onces d'or, à la place desquelles il en avoit substitué 16 d'argent.

Pour connoître ce qu'un corps perd de son poids, lorsqu'il est plongé dans l'eau, on suspend ce corps avec un fil à l'extrémité du lévier d'une balance, & on met à l'autre extrémité un poids qui soit en équilibre dans l'air avec ce corps, ensuite on plonge le corps dans l'eau; & comme alors il devient moins pesant, on diminuë le poids de l'autre côté jusqu'à ce que le reste fasse encore équilibre; ainsi ce qu'on a retranché de ce poids fait voir la quantité de celui que le corps a perdu. Et si d'un autre côté on pese la quantité d'eau que le corps a fait sortir du vase dans lequel on l'a plongé, on trouvera toujours que ce volume d'eau pese autant que la perte que le corps a fait de son poids.

HUITIE'ME EXEMPLE.

Avec des piéces de 15 sols & des piéces de 30, on veut faire autant de livres qu'on prendra de piéces; & l'on demande comment il faut y parvenir ?

Comme la livre vaut 20 ſols, écrivez 15 & 30 à la place des choſes qu'il faut allier, & 20 au lieu moïen; faites enſuite échange de différence, & la ſomme 15 vous montrera que pour faire 15 livres il faut prendre 10 piéces de 15 ſols, qui font 7 liv. 10 ſols, & 5 de 30, qui font auſſi 7 liv. 10 ſols, ce qui fait en tout 15 livres.

15		10	
	20		
30		5	
			15 livres

Ces ſortes de queſtions ſont ſuſceptibles d'une infinité de réſolutions différentes; car ſi l'on multiplie les deux parties 10 & 5 qui forment l'alliage 15 par un même nombre, comme par exemple 3, & qu'on faſſe la ſomme des produits, cette ſomme 45 ſera un nouvel alliage de 45 liv. dont les produits 30 & 15 ſeront les parties; car 30 piéces de 15 ſols font 22 liv. 10 ſols, & 15 de 30 ſols font encore 22 liv. 10 ſols, & ces deux parties jointes enſemble font 45 livres. Or comme les nombres ſont infinis, & qu'on peut toujours multiplier 10 & 5 par lequel on voudra, pourvû que ce ſoit un nombre entier, on comprend aiſément qu'on peut faire un nombre infini de ces ſortes d'alliages.

10	5	30 de 15 ſols
3	3	15 de 30 ſols
30	15	45 livres.

Et ſi l'on demandoit que cet alliage fût le plus petit qu'on puiſſe faire, on diviſeroit les deux parties 10 & 5 par leur plus grand diviſeur commun, c'eſt-à-dire, on feroit de 10 & 5 une fraction $\frac{5}{10}$, qui réduite au moindre dénominateur donneroit $\frac{1}{2}$, & prenant enſuite les deux nombres 1 & 2 de cette fraction pour les parties d'un alliage, leur ſomme 3 feroit le plus petit alliage qu'on pourroit faire, puiſque 2 & 1 ſont les plus petits nombres ſans fraction qui ſoient en même raiſon que 10 & 5. Au reſte, ce que je dis ici ne peut ſe pratiquer facilement que lorſqu'il ne s'agit que d'un alliage de deux choſes; & je dirai dans l'exemple ſuivant comment on peut faire le plus petit alliage poſſible de pluſieurs choſes, dont le nombre eſt au-deſſus de deux.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

Avec des écus de 3 livres, des piéces de 30 ſols, de 15 & de 5 faire autant de livres ou de piéces de 20 ſols que l'on prendra de piéces.

Ecrivez 60 ſols, 30, 15 & 5 à la place des choſes qu'on veut

allïer, & 20 à la place du prix moïen ; faites enſuite l'alliage, & vous trouverez que pour faire 70 piéces il en faut 15 de 60 ſols, 5 de 30 ſols, 10 de 15 ſols & 40 de 5 ſols ; car ſi 15 de 60 ſols font 45 liv. 5 de 30 font 7 liv. 10 ſols, 10 de 15 font encore 7 liv. 10 & 40 de 5 font 10 liv. & ces ſommes ajoutées enſemble font en effet 70 livres.

60		15			
30		5			
	20				
15		10			
5		40			
		70			

On pourroit donner une infinité de réſolutions différentes de cette queſtion, en multipliant les quatre parties 15, 5, 10 & 40 qui forment l'alliage, par un même nombre, & prenant la ſomme de leur produit pour un nouvel alliage dont les produits ſeroient les parties, ainſi que j'ai dit dans l'exemple précédent.

15	piéces de	60	ſols	font	45	liv.	
5	piéces de	30	ſols	font	7	liv.	10 ſols
10	piéces de	15	ſols	font	7	liv.	10 ſols
40	piéces de	5	ſols	font	10	liv.	
					70	liv.	

Mais ſi l'on demandoit le plus petit alliage poſſible, comme les parties 15, 5, 10, 40 peuvent ſe diviſer chacune par 5, & que 5 eſt leur plus grand commun diviſeur, attendu que 5 diviſé par lui-même donne au quotient 1, qui ne peut plus ſe diviſer ſans fractions, je diviſe ces 5 nombres par 5, & mettant à leur place leur quotient 3, 1, 2 & 8, la ſomme 14 eſt le plus petit mélange poſſible, puiſque 3, 1, 2 & 8 ſont les moindres nombres qui ſoient entr'eux comme 15, 5, 10 & 40.

60		15	3
30		5	1
	20		
15		10	2
5		40	8
		70 liv.	14 liv.

Cette méthode n'eſt pas toujours facile à pratiquer comme dans cet exemple, c'eſt pourquoi en voici une autre pour réſoudre cette queſtion. J'écris les valeurs 60, 30, 15 & 5, & la valeur moïenne à la maniere ordinaire, mais au lieu de changer les différences, je les mets vis-à-vis des valeurs à qui elles appartiennent ; & comme le plus petit mélange qu'on puiſſe faire doit contenir tout au moins une de chaque piéce, j'en prens donc une de chacune, ce qui fait quatre piéces ; puis jettant les yeux ſur les différences, je vois que les ex-

60		40	.
30		10	.
	20		
15		5	.
5		15	...
		6	

cédantes 40 & 10 des deux premieres me donnent 50 ſols de plus qu'il ne faut, & que les défaillantes 5 & 15 des deux dernieres me donnent 20 ſols de moins; ainſi retranchant la ſomme 20 des défaillantes de la ſomme 50 des excédantes, il me reſte encore 30 ſols de plus qu'il ne faut : de ſorte que le plus petit mélange qu'on puiſſe faire doit contenir plus de quatre piéces. Je cherche donc à augmenter le nombre des piéces de telle façon que la valeur de celles que j'y ajouterai, jointe aux 30 ſols, faſſe mon alliage tel qu'on le déſire, & je vois que prenant encore 2 piéces de 5 ſols, leur valeur 10 ſols jointe à 30 que j'ai déja, fera 2 liv. leſquels jointes à 4 ci-deſſus, feront 6 liv. de même que 2 piéces de 5 ſols jointes aux quatre précédentes que j'avois deja priſes, font également 6 piéces. Ainſi je connois que pour faire 6 liv. il faut prendre une piéce de 60 ſols, une de 30, une de 15 & trois de 5 ſols, & que c'eſt le plus petit alliage poſſible.

Il eſt à propos, quand on cherche un alliage de cette eſpéce, de mettre des points vis-à-vis les quantités que l'on prend, comme par exemple ici vis-à-vis 60, 30, 15 & 5, après quoi, quand pour faire compenſation on voit qu'il faut prendre quelqu'une de ces quantités, une ou pluſieurs fois, il faut mettre autant de points qu'on eſt obligé de la prendre de fois; & dès qu'on aura trouvé l'alliage, on écrira au bas la ſomme qui marque le nombre de points, & cette ſomme ſera l'alliage dont les points marqueront les parties. Ainſi, dans cet exemple, les trois points qui ſont vis-à-vis les piéces de 5 ſols, marquent qu'il faut prendre trois piéces de 5 ſols, & les autres quantités n'aïant qu'un point devant, elles ne ſeront priſes qu'une fois.

Suppoſons qu'avec trois ſortes de métaux, l'un de 63 livres le marc, l'autre de 45 & le troiſiéme de 56, on veüille un alliage de 60 liv. le marc, qui ſoit le plus petit qu'on puiſſe faire, & qui contienne autant de marcs de 60 liv. que l'on aura de marcs de ces trois métaux.

J'écris 63, 56, 45 & le moïen 60 à la façon ordinaire, & je mets leurs différences vis-à-vis ſans les changer; enſuite comme on me demande le plus petit alliage qu'on puiſſe faire, & que le plus petit doit contenir au moins une fois chaque eſpéce, je mets un point vis-à-vis 60, un autre vis-à-vis 56 & un autre vis-à-vis 45. Enſuite jettant

63		3 : : : : :
	60	
56		4 . . .
45		15 .
		13 livres

les yeux ſur les différences, je vois que ſur la quantité excédante 63 j'aurai 3 livres de plus qu'il ne faut, mais que ſur les deux autres j'aurai 19 de moins; ôtant donc 3 de 19, il reſtera 16 liv. que j'aurai encore de moins: donc le plus petit alliage qu'on puiſſe faire doit contenir plus d'une fois quelqu'une de ces quantités. Or pour faire compenſation, je m'apperçois que j'aurois beau prendre 63 pluſieurs fois, ſon excès 3 ne compenſera jamais le défaut 16, parce que 3 n'eſt pas contenu exactement dans 16; ainſi je cherche à ajouter à 16 quelque choſe, de ſorte qu'avec cette addition il puiſſe contenir exactement 3, & je vois qu'en prenant encore deux marcs de 56 liv. leur défaut 8 ajouté à 16 fera 24, dans lequel 3 eſt 8 fois, je mets donc deux points vis-à-vis 56; & pour compenſer ces 24 liv. de moins que j'ai, je prens encore 8 marcs de 60 liv. leſquels me donneront 24 liv. plus qu'il ne faut, par conſéquent je mets 8 points vis-à-vis 63, & j'ai trouvé l'alliage demandé; car prenant la ſomme de ces points, je vois que cette ſomme eſt 13 marcs, qui valent préciſément 60 liv. chacun l'un compenſant l'autre.

On voit par cet exemple, que toute l'adreſſe de ceci conſiſte à faire enſorte que le ſurplus ou le moins que l'on a ſoit diviſible par le moins ou le ſurplus que l'on doit prendre pour faire une juſte compenſation.

DIXIE'ME EXEMPLE.

On demande qu'avec du ſafran de 10 ſols l'once, de la canelle de 8, de la muſcade de 6, du poivre de 4 & du géroſle de 3, on faſſe un mélange ſans fraction de 336 onces à 7 ſols l'once.

Si l'on n'éxigeoit pas qu'il n'y eût point de fractions, je ferois le mélange en me ſervant de la méthode ordinaire; mais comme on juge à propos de mettre cette condition, & que ce ne ſeroit que par un pur hazard que je ne trouverois point de fractions en emploïant la façon de faire le mélange que j'ai expliquée ci-deſſus, je prens un autre parti.

Je fais d'abord le plus petit mélange poſſible de ces cinq ſortes d'épiceries; ainſi je mets un point vis-à-vis de chacune pour marquer que je prens ſur chacune une once; puis jettant les yeux ſur les différences, je vois que les quantités excédantes me donneront 4 ſols de plus, & les défaillantes 8 ſols de moins, c'eſt pourquoi je retranche l'excès 4 du défaut 8, & le reſte eſt 4 que j'ai

encore de moins. Je cherche donc à compenſer ce défaut, & je vois qu'en prenant encore une once de ſafran & une de canelle, j'aurai 4 de plus qui compenſeront les 4 de moins; ainſi je mets un point vis-à-vis le ſafran & un autre vis-à-vis la canelle; & faiſant la ſomme des points, cette ſomme eſt 7, qui eſt le moindre alliage poſſible.

10		3 . .
8		1 . .
	7	
6		1 .
4		3 .
3		4 .
		7 onces.

Cet alliage trouvé, je diviſe la ſomme 336 de l'alliage total, par la ſomme 7 de celui-ci, & trouvant qu'il y eſt exactement 48 fois, la queſtion eſt réſoluë, puiſque l'alliage 7 pris 48 fois, fera l'alliage total. Ainſi l'alliage 7 étant compoſé de 2 onces de ſafran, de 2 de canelle, d'une de muſcade, d'une de poivre & d'une de gérofle, multipliant chacun de ces nombres par 48, j'ai 96 onces de ſafran, 96 onces de canelle, 48 de muſcade, 48 de poivre & 48 de gérofle, ce qui fait en tout 336 onces.

96 onces	ſafran
96 onces	canelle
48 onces	muſcade
48 onces	poivre
48 onces	gérofle
336 onces	mélange

Il n'arrive pas toujours que le moindre alliage diviſe exactement le total, & alors la queſtion n'étant pas réſoluë, il faut néceſſairement chercher quelque choſe de plus pour en venir à bout, & pour trouver en même-tems le moïen de donner ſi l'on vouloit toutes les réſolutions dont la queſtion eſt ſuſceptible, réſolutions qui la plupart du tems ſont preſque en nombre infini.

Pour cela donc je fais le moindre mélange poſſible de la premiere eſpéce excédante, avec chacune des défaillantes, c'eſt-à-dire, j'allie le ſafran avec la muſcade, puis avec le poivre, puis avec le gérofle, ce qui me donne trois alliages différens; & comme il n'y a que deux choſes à allier dans chacun d'eux, je me ſers de la méthode que j'ai enſeignée dans le huitiéme exemple en changeant les différences, & les diviſant par leur plus grand diviſeur commun ſi elles en ont, & ſi elles n'en ont pas, leur ſomme eſt elle-même le plus petit alliage; ce qui arrive ici dans le premier & le troiſiéme, dont les différences n'ont point de diviſeur commun, au lieu que dans le ſecond les deux différences 3 & 3 pouvant ſe diviſer par elles-mêmes, ſe réduiſent à 1 & à 1, qui ſont en même raiſon que 3 & 3.

J'allie

J'allie de la même façon la ſeconde quantité excédante, qui eſt la canelle, avec chacune des trois défaillantes, ce qui me donne trois autres mélanges.

premier.

10 1
7
6 3
4

ſecond.

10 3, 1
7
4 3, 1
2

troiſiéme.

10 4
7
3 3
7

quatriéme.

8 1
7
6 1
2

cinquiéme.

8 3
7
4 1
4

ſixiéme.

8 4
7
3 1
5

ſeptiéme.

10 3
7
6 1
4 3
6

huitiéme.

10 3
7
6 1
3 4
5

neuviéme.

10 3
7
4 3
3 4
9

dixiéme.

8 1
7
6 1
4 3
6

onziéme.

8 1
7
6 1
3 4
7

douziéme.

8 1
7
4 3
3 4
9

treiziéme.

10 3
8 1
7
6 1
4 3
4

quatorziéme.

10 3
8 1
7
6 1
3 4
5

quinziéme.

10 3
8 1
7
4 3
3 4
5

seiziéme.

10	3	
8	1	
7		
6	1	
		6

dix-septiéme.

10	3	
8	1	
7		
4	3	
		6

dix-huitiéme.

10	3	
8	1	
7		
3	4	
		3

dix-neuviéme.

10	3	
7		
6	1	
4	3	
3	4	
		7

vingtiéme.

8	1	
7		
6	1	
4	3	
3	4	
		11

vingt-uniéme.

10	3	
8	1	
7		
6	1	
4	3	
3	4	
		7

Enſuite j'allie la premiere excédante 10 avec deux des défaillantes alternativement, c'eſt-à-dire avec 6 & 4, puis avec 6 & 3, puis avec 4 & 3; obſervant toujours de prendre le moindre mélange poſſible, ce qui me donne trois autres mélanges, pour leſquels j'emploïe la méthode de l'exemple précédent, à cauſe que les quantités à allier excédent le nombre de deux.

J'allie de la même façon la ſeconde excédante avec deux des défaillantes, & j'ai trois autres mélanges.

J'allie les deux excédantes avec deux des défaillantes ſucceſſivement, ce qui me donne encore trois mélanges.

J'en fais trois autres des deux excédantes avec chacune des défaillantes; un autre de la premiere excédante avec les trois défaillantes; un autre de la ſeconde excédante avec les trois défaillantes, & un dernier de toutes les excédantes avec toutes les défaillantes, & celui-ci eſt le même que nous avons fait ci-deſſus pour faire le moindre mélange poſſible des cinq quantités.

Tous ces mélanges ſe montent donc à 21, parmi leſquels il n'y a que le dernier qui contienne les cinq quantités. Ainſi pour réſoudre la queſtion, il faut néceſſairement que celui-ci ſe trouve dans le mélange total que je ferai; c'eſt pourquoi je retranche ſa valeur 7 du nombre 336, qui eſt le mélange total qu'on demande, & le reſte eſt 329; de ſorte que j'ai à faire un mélange de 329

onces: J'examine donc parmi les 20 autres petits mélanges que je viens de faire quels ſont ceux dont la ſomme diviſe 329 exactement, & je trouve que ce ſont ceux dont la ſomme eſt 7, parce que 7 eſt 47 fois dans 329: or j'ai trois de ces mélanges, qui ſont le troiſiéme, le onziéme & le dix-neuviéme; donc multipliant les parties de chacun de ces mélanges par 47, j'aurois trois produits, chacun deſquels ſera un mélange de 329 onces; & ajoutant à chaque produit les parties du dernier mélange que j'avois retranché, & dont la ſomme eſt 7, j'aurai trois ſommes chacune deſquelles ſera un mélange de 336 onces, & par conſéquent voilà déja trois réſolutions différentes.

Pour trouver d'autres réſolutions, j'ajouterois enſemble quelques-uns des alliages dont la ſomme eſt 4, avec quelques-uns dont la ſomme eſt 3, ce qui feroit 7, & multipliant toutes les parties de cette ſomme par 47, le produit donneroit 329; auquel ajoutant le dernier alliage dont la ſomme eſt 7, le total ſeroit encore un mélange de 336 onces.

Premiere réſolution par le troiſiéme mélange.

troiſiéme mélange.	vingt-uniéme mélange.	mélange total.
188 onces ſafran.	2 onces ſafran.	190 ſafran.
141 onces géroſle.	2 onces canelle.	142 géroſle.
	1 once muſcade.	1 muſcade.
329	1 once poivre.	1 poivre.
	1 once géroſle.	2 canelle.
	7	336 onces.

Seconde réſolution par le onziéme mélange.

onziéme mélange.	vingt-uniéme mélange.	mélange total.
235 onces canelle.	2 onces ſafran.	237 canelle.
47 onces muſcade.	2 onces canelle.	2 ſafran.
47 onces poivre.	1 once muſcade.	48 muſcade.
	1 once poivre.	48 poivre.
329	1 once géroſle.	1 géroſle.
	7	336 onces.

Je pourrois faire la même choſe, en ajoutant enſemble quelques-uns des alliages dont la ſomme eſt 2, avec quelques-uns de ceux dont la ſomme eſt 5.

Je pourrois de même ajouter enſemble le treiziéme, quatorziéme & quinziéme mélange dont la ſomme ſeroit 14 onces, & multipliant leur partie par 23, le produit ſeroit 327 onces, auquel ajoutant le ſecond alliage dont la ſomme eſt 2, j'aurois 329 onces, & ajoutant le dernier mélange dont la ſomme eſt 7, j'aurois encore 336 onces.

Troiſiéme réſolution par le dix-neuviéme mélange.

dix-neuviéme mélange.	vingt-uniéme mélange.	mélange total.
141 onces ſafran.	2 onces ſafran.	2 canelle.
94 onces muſcade.	2 onces canelle.	143 ſafran.
47 onces poivre.	1 once muſcade.	95 muſcade.
47 onces géroſle.	1 once poivre.	48 poivre.
	1 once géroſle.	48 géroſle.
329	7	336 onces.

De même, je pourrois ajouter enſemble le quinziéme, ſeiziéme, dix-neuviéme & vingtiéme, dont la ſomme ſeroit 29 onces, leſquelles retranchées de 329, il reſteroit 300, & ces 300 je les ferois en ajoutant le huitiéme & le quatorziéme mélange dont la ſomme ſeroit 10, & multipliant les parties de cette ſomme par 30, le produit ſeroit 300, auquel ajoutant les 29 ci-deſſus & les 7 du vingt-uniéme mélange, j'aurois encore 336.

Je laiſſe aux Commençans le plaiſir de chercher d'autres réſolutions, ſoit de la maniere dont je viens de me ſervir, ſoit de telle autre qu'ils voudront, pourvû que le mélange ſoit toujours juſte, & qu'il ſe monte à 336 onces; & ils peuvent s'aſſurer d'avance qu'ils auroient long-tems à s'amuſer avant de trouver toutes les réſolutions poſſibles de cette queſtion.

Comme il arrive dans la plupart des réſolutions, qu'on trouve par la voïe dont nous venons de nous ſervir, qu'il ſe trouve très-peu de quelques-unes des quantités, tandis qu'il y en a beaucoup de quelques autres, voici comme on peut corriger ce défaut.

Puiſque le ſafran vaut 10 ſols & la canelle 8, multipliant l'un par l'autre, ce qui fait 80, vous trouverez que 8 onces de ſafran valent 10 onces de canelle: de même, puiſque le ſafran vaut 10 ſols & la muſcade 6, multipliant l'un par l'autre, ce qui fait 60, vous trouverez que 6 onces de ſafran valent 10 de muſcade; & emploïant toujours la même voïe, vous trouverez que 4 de ſafran valent 10 de poivre, & 3 de ſafran 10 de géroſle.

Comparant de même la canelle avec la muſcade, le poivre & le géroſle, vous trouverez que 6 de canelle valent 8 de muſcade, 4 de canelle 8 de poivre, & 3 de canelle 8 de géroſle; & par la même raiſon 4 de muſcade vaudront 6 de poivre, 3 de muſcade 6 de géroſle, & 3 de poivre 4 de géroſle.

8 onces ſafran valent	10 onces canelle.	
6 onces ſafran valent	10 onces muſcade.	
4 onces ſafran valent	10 onces poivre.	
3 onces ſafran valent	10 onces géroſle.	
6 onces canelle valent	8 onces muſcade.	
4 onces canelle valent	8 onces poivre.	
3 onces canelle valent	8 onces géroſle.	
4 onces muſcade valent	6 onces poivre.	
3 onces muſcade valent	6 onces géroſle.	
3 onces poivre valent	4 onces géroſle.	

Cela ſuppoſé, prenons par exemple, le mélange total de la premiere réſolution, où il y a trop de ſafran & de géroſle, & trop peu de muſcade, poivre & canelle, & puiſque nous ſavons que 10 de muſcade valent 6 de ſafran, ſi nous voulons mettre 80 onces de muſcade de plus, qui eſt 8 fois 10, nous retrancherons de 190 onces de ſafran 8 fois 6 onces, c'eſt-à-dire 48, ainſi nous aurons 81 onces de muſcade & 142 de ſafran. De même, comme nous ſavons que 10 de poivre valent 4 de ſafran, ſi nous voulons mettre 90 onces de poivre de plus, qui eſt 9 fois 10, nous retrancherons de 142 de ſafran 9 fois 4, c'eſt-à-dire 36 onces, & par conſéquent nous aurons 91 onces de poivre & 106 onces de ſafran. De même enfin, comme nous ſavons que 3 de canelle valent 8 de géroſle, ſi nous voulons 36 de canelle de plus, qui eſt 12 fois 3, nous ôterons de 142 de géroſle 12 fois 8, c'eſt-à-dire 96, & par conſéquent nous aurons 38 onces de canelle & 46 de géroſle. Ainſi ce mélange ſera changé en un autre qui aura 106 de ſafran, 46 de géroſle, 81 de muſcade, 91 de poivre & 38 de canelle, & le mélange paroît aſſez raiſonnable; mais il s'y trouve un défaut, car le total eſt 362 au lieu de 336, ce qui fait 26 onces de plus qu'il ne faut; c'eſt pourquoi je prens quatre fois le ſeptiéme alliage, ce qui fait 24, & ajoutant le ſecond, dont la ſomme eſt 2, leur ſomme ſera 26 que je retrancherai de 362 & j'aurai 336.

190	ſafran.
142	géroſle.
1	muſcade.
1	poivre.
2	canelle.
336	

nouveau mélange.

106	ſafran.
46	géroſle.
81	muſcade.
91	poivre.
38	canelle.
362	

On pourroit corriger de même la ſeconde & la troiſiéme réſo-

lution ci-deſſus, & toutes celles que l'on trouveroit en avoir beſoin ; & comme ces corrections peuvent ſe faire de beaucoup de manieres différentes, le nombre des réſolutions poſſibles qu'on trouveroit par la voïe dont nous nous ſommes ſervi, deviendroit encore bien plus grand par celle-ci ; de ſorte qu'il n'eſt pas poſſible de déterminer le nombre des réſolutions dont cette queſtion & ſes ſemblables ſont ſuſceptibles ; & delà il ſuit que ſi un homme avoit fait un mélange de cette eſpéce, & qu'il propoſât à quelqu'un de le trouver, ce ne ſeroit jamais que par un pur haſard, ſi parmi tant de mélanges différens que l'on peut faire, on tomboit préciſément ſur le ſien.

ſeptiéme mélange pris quatre fois.	ſecond mélange.	ſomme des deux.
8 ſafran.	1 ſafran.	9 ſafran.
12 muſcade.	1 poivre.	12 muſcade.
4 poivre.	2	5 poivre.
24		26

nouveau mélange corrigé.

ſafran	97
gérofle	46
muſcade	69
poivre	86
canelle	38
	336

ONZIE'ME EXEMPLE.

Une compagnie compoſée de vingt perſonnes a dépenſé 64 liv. chaque homme a païé 5 liv. chaque femme 4 liv. chaque fille 3 liv. chaque enfant 2 liv. & chaque domeſtique 1 liv. on demande combien il y avoit d'hommes, de femmes, de filles, d'enfans & de domeſtiques ?

Dans cette queſtion-ci nous n'avons point de prix moïen, mais pour le trouver, je ſuppoſe qu'ils ont tous dépenſé également, & je dis : Si 20 ont dépenſé 64, combien dépenſera une perſonne, & je trouve $3\frac{1}{5}$ qui ſera le prix moïen, puiſqu'en ſuppoſant que chacun eût dépenſé $3\frac{1}{5}$, la dépenſe totale ſe monteroit à 64 liv. car 20 multiplié par $3\frac{1}{5}$ fait 64.

20. 64. Réponſe $3\frac{1}{5}$.

J'écris donc les nombres 5, 4, 3, 2, 1, & le prix moïen $3\frac{1}{5}$ à la façon ordinaire ; mais auparavant je réduis tout en fractions, à cauſe que le prix moïen a une fraction, & j'ai $\frac{25}{5}$, $\frac{20}{5}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{5}{5}$, & le prix moïen $\frac{16}{5}$, je me contente d'écrire les numérateurs de

ces fractions, parce que les différences de ces nombres ne peuvent se trouver que dans les numérateurs, attendu que le dénominateur est le même par tout ; je cherche donc le plus petit mélange possible de ces nombres, & ce mélange est 10 ; j'examine si ce mélange est exactement un certain nombre de fois dans 20, & trouvant qu'il y est 2 fois, la question est résoluë : mais pour trouver d'autres résolutions, je fais de nouveaux mélanges, en alliant le premier 25 successivement avec chaque valeur défaillante 15, 10 & 5 ; puis je combine la seconde excédante, c'est-à-dire 20, avec chaque défaillante ; puis la ~~premiere excédante~~ alternativement avec deux défaillantes, & de même de la seconde excédante. Ensuite les deux excédantes alternativement avec deux défaillantes ; puis la premiere excédante avec les trois défaillantes, & de même pour la seconde excédante, ce qui me donne 20 mélanges, ausquels j'ajoute celui que je viens de trouver, ce qui fait en tout 21 mélanges, dont le dernier est le seul qui contienne toutes les valeurs.

25	9	
20	4	
15	1	
10	6	
5	11	
		10

premier.			second.			troisiéme.		
25	1		25	6, 2		25	11	
15	9		10	9, 3		5	9	
		10			5			20

quatriéme.			cinquiéme.			sixiéme.		
20	1		20	6, 3		20	11	
15	4		10	4, 2		5	4	
		5			5			15

septiéme.			huitiéme.			neuviéme.		
25	9		25	9		25	9	
15	1		15	1		10	6	
10	6		5	11		5	11	
		5			10			15

dixiéme.

20 4 . .
16
15 1 . .
10 6 .
5

onziéme.

20 4 . . .
16
15 1 .
5 . 11 .
5

douziéme.

20 4 : : : :
16
10 6 .
5 11 . .
10

treiziéme.

25 9 .
20 4 .
16
15 1 : : : : : : :
15

quatorziéme.

25 9 . .
20 4 . . .
16
10 6 : : .
10

quinziéme.

15 9 . .
20 4 .
16
5 11 . .
5

seiziéme.

25 9 .
20 4 .
16
15 1 .
10 6 . .
5

dix-septiéme.

25 9 .
20 4 .
16
15 1 . .
5 11 .
5

dix-huitiéme.

25 9 .
20 4 . .
16
10 6 .
5 11 .
5

dix-neuviéme.

25 9 . .
16
15 1 .
10 6 .
5 11 .
5

vingtiéme.

20 4 : : .
16
15 1 . . .
10 6 .
5 11 .
10

vingt-uniéme.

25 9 . .
20 4 .
16
15 1 : : .
10 6 .
5 11 .
10

Maintenant pour rèſoudre la queſtion autrement que ci-deſſus, je trouve que parmi ces mélanges il n'y a que ceux dont la ſomme eſt 10, & ceux dont la ſomme eſt 5 qui puiſſent me ſervir, parce que l'alliage total étant 20, & me trouvant obligé de prendre toujours le dernier qui eſt 10, il n'y a plus que ceux dont la ſomme

somme est 10, qui ajoutés avec lui faſſent 20; & ceux dont la somme est 5, pris deux à deux; faisant donc ces différens alliages, j'en trouve jusqu'à 61, dont je ne mettrai ici que deux ou trois, afin que les Commençans s'exercent à chercher les autres.

Que si à ces 61 résolutions j'ajoutois celles que je pourrois faire par le moïen des corrections, en augmentant le nombre de certaines personnes, & diminuant le nombre de certaines autres, j'en trouverois peut-être un plus grand nombre.

Premiere résolution par le moïen du vingt-uniéme pris deux fois.

4	hommes
2	femmes
10	filles
2	enfans
2	domeſtiques
20	

Seconde résolution par le moïen du vingtiéme ajouté au dernier.

vingtiéme mélange.		dernier mélange.		total.	
5	femmes	2	hommes	2	hommes
3	filles	1	femme	6	femmes
1	enfant	5	filles	8	filles
1	domeſtique	1	enfant	2	enfans
		1	domeſtique	2	domeſtiques
10		10		20	

Troiſiéme résolution par le moïen du onziéme & du seiziéme ajoutés au dernier.

11e mélange.		16e mélange.		dernier mélange.		total.	
3	femmes	1	homme	2	hommes	3	hommes
1	fille	1	femme	1	femme	5	femmes
1	domeſtique	1	fille	5	filles	7	filles
		2	enfans	1	enfant	3	enfans
				1	domeſtique	2	domeſtiques
5		5		10		20	

Et pour faire ces corrections, j'examine que les hommes païant 5 liv. & les femmes 4, si je multiplie l'un par l'autre, ce qui fait 20, je trouverai que 4 hommes païent autant que 5 femmes.

& ſuivant la même voïe, je trouverai 3 hommes autant que 5 filles; 2 hommes autant que 5 garçons; 1 homme autant que 5 domeſtiques; 3 femmes autant que 4 filles; 2 femmes autant que 4 enfans; 1 femme autant que 4 domeſtiques; 2 filles autant que 3 enfans; 1 fille autant que 3 domeſtiques, & 1 enfant autant que 2 domeſtiques.

4 hommes autant que	5 femmes.
3 hommes	5 filles.
2 hommes	5 enfans.
1 homme	5 domeſtiques.
3 femmes	4 filles.
2 femmes	4 enfans.
1 femme	4 domeſtiques.
2 filles	3 enfans.
1 fille	3 domeſtiques.
1 enfant	2 domeſtiques.

Cela ſuppoſé, ſi je veux que dans la ſeconde réſolution il ſe trouve moins de femmes & de filles, & plus d'hommes & de domeſtiques; comme je ſais que 5 femmes ne païent pas plus que 4 hommes, j'augmente de 4 hommes, ce qui fait 6 hommes & 1 femme, à cauſe que j'en retranche 5 pour 4 hommes que j'ajoute. De même comme je ſais que 3 femmes païent autant que 4 filles, je retranche 4 filles & j'ajoute 3 femmes; ainſi j'ai 6 hommes, 4 femmes & 4 filles; & comme une fille païe autant que 3 domeſtiques, je retranche une fille & j'ajoute 3 domeſtiques, & par conſéquent j'ai un nouveau mélange compoſé de 6 hommes, 4 femmes, 3 filles, 2 garçons & 5 domeſtiques, ce qui fait en tout 20.

6	hommes
4	femmes.
3	filles.
2	enfans
5	domeſtiques.
20	

De même, ſi je veux que dans la premiere réſolution il ſe trouve moins de filles & plus d'hommes & de domeſtiques, comme je ſais que 3 hommes païent autant que 5 filles, je retranche 5 filles & j'ajoute 3 hommes, ce qui fait 7 hommes & 5 filles: de même, comme une fille païe autant que 3 domeſtiques, je retranche 1 fille & j'ajoute 3 domeſtiques, & par conſéquent j'ai 7 hommes, 2 femmes, &c.

7	hommes.
2	femmes.
4	filles
2	enfans
5	domeſtiques.
20	

On trouvera dans la troiſiéme Partie de cet Ouvrage une autre maniere de faire ces ſortes de changemens.

Au reſte, quoique j'aïe dit que ces queſtions ſont ordinairement ſuſceptibles de grand nombre de réſolutions plus ou moins, ſelon les qualités qu'elles contiennent, il peut cependant arriver, mais très-rarement, qu'elles n'en aïent qu'une; & en voici un

exemple que j'ai tiré du onziéme Livre des Elémens du Pere Preſlet, dans ſa ſeconde édition: *Soixante perſonnes*, dit-il, *ont dépenſé 100 piſtoles, chaque homme 2; chaque femme $\frac{1}{3}$; chaque enfant $\frac{1}{5}$, & chaque domeſtique $\frac{1}{2}$: combien y avoit-il d'hommes, de femmes, d'enfans & de ſerviteurs?*

Pour trouver le prix moïen, je diviſe 100 par 60, & le quotient $\frac{100}{60}$ eſt la dépenſe que chacun auroit fait ſi on avoit païé également. Je réduis $\frac{100}{60}$ à $\frac{10}{30}$, parce que les autres fractions peuvent avoir 30 pour dénominateur commun; ainſi réduiſant ces fractions, j'ai $\frac{30}{30}$ pour la dépenſe de chaque femme, $\frac{18}{30}$ pour celle de chaque enfant, $\frac{15}{30}$ pour celle de chaque domeſtique, & $\frac{60}{30}$ pour chaque homme, parce que deux entiers ſont $\frac{60}{30}$. J'écris donc ces différentes dépenſes & la dépenſe moïenne, en négligeant le dénominateur, parce que les différences de ces dépenſes ne peuvent être que dans le numérateur, & je cherche le moindre mélange poſſible; en prenant une de chacune, & examinant les différences, je trouve que je perds 87; je prens donc encore 8 de la premiere, marquant 8 points, & ces 8 points faiſant 80 de gain, il me reſte 7 de perte. Comme 10 n'eſt pas diviſible par 7, je prens encore 1 de la quatriéme, ce qui me fait perdre 35, & 7 font 42 de perte; je prens donc 4 de la premiere, marquant 4 points, ce qu'il faut toujours obſerver à meſure qu'on prend une quantité, & ces 4 me donnent 40 de gain, par conſéquent j'ai encore 2 de perte; & prenant 4 de la troiſiéme, j'ai 128 de perte, & 2 font 130, que je compenſe en prenant 13 fois la premiere, ce qui fait auſſi 130; ainſi mon mélange eſt trouvé. Faiſant donc la ſomme des points, je trouve que le moindre eſt de 34 perſonnes, parmi leſquelles il y a 26 hommes, 1 femme, 5 enfans & 2 domeſtiques.

60	50	10
20		30
18		32
15		35
		34

Comme ce mélange ne peut pas diviſer exactement le nombre 60 du mélange total, je fais d'autres mélanges, en combinant l'excédant 60, ſucceſſivement avec chaque défaillant, & enſuite le même excédant alternativement avec deux défaillans, ce qui me donne 6 alliages, auſquels ajoutant celui que nous venons de trouver, la ſomme ſera 7.

premier.			second.			troiſiéme.		
60	30, 3		60	32, 16		60	35, 7	
50			50			50		
20	10, 1	4	18	10, 5	21	15	10, 2	9

quatriéme.			cinquiéme.			ſixiéme.		
60	10		60	10		60	10	
50			50			50		
20	30		20	30		18	32	
18	32	25	15	35	15	15	35	30

Or je ſuis obligé de prendre le dernier de ces mélanges, parce qu'il eſt l'unique qui contienne les quatre dépenſes différentes; ainſi du mélange total 60 retranchant 34, il reſtera 26, & ces 26 je ne puis les faire qu'en prenant 2 fois le premier, dont la ſomme eſt 4, ce qui fera 8; & 2 fois le troiſiéme, dont la ſomme eſt 9, ce qui fera 18, qui ajoutée à 8 fera en effet 26; ainſi les autres mélanges ne me ſerviront de rien, car ſi du ſixiéme je retranche le deuxiéme, le reſte ſera le troiſiéme; de même ſi du cinquiéme je veux retrancher le troiſiéme, le reſte ſera le premier; de même ſi de ce cinquiéme je veux retrancher le premier, le reſte ſera le troiſiéme: que ſi je tente de retrancher le quatriéme du ſixiéme, je vois que je ne le puis pas, parce qu'il y a une femme dans le quatriéme, & qu'il n'y en a point dans le ſixiéme; enfin, que je me retourne de tous les côtés, je ne trouverai jamais que cette ſeule & unique réſolution.

Réſoluion unique, en ajoutant au ſeptiéme alliage deux fois le premier & deux fois le troiſiéme.

double du premier.		double du troiſiéme.		ſeptiéme alliage.		total.	
6	hommes	14	hommes	26	hommes	46	hommes.
2	femmes.	4	domeſtiques	1	femme	3	femmes.
				5	enfans	5	enfans
8		18		2	domeſtiques	6	domeſt.
				34		60	perſonnes

Que ſi je veux trouver d'autres réſolutions, en augmentant le

nombre ou des femmes, ou des enfans, ou des domeſtiques, & diminuant celui des hommes, je n'y réüſſirai pas mieux; car en comparant les hommes avec les femmes, les enfans & les domeſtiques; puis les femmes avec les enfans & les domeſtiques, & enfin les domeſtiques avec les enfans, je trouverai bien qu'un homme païe autant que 3 femmes; 3 hommes autant que 10 enfans; 1 homme autant que 4 domeſtiques; 9 femmes autant que 10 enfans; 3 femmes autant que 4 domeſtiques, & 5 enfans autant que 6 domeſtiques:

1	homme païe autant que	3	femmes.
3	hommes	10	enfans.
1	homme	4	domeſtiques.
9	femmes	10	enfans.
3	femmes	4	domeſtiques.
5	enfans	6	domeſtiques.

mais ſi je veux par ce moïen diminuer le nombre des hommes, qui eſt l'unique de cette réſolution où il y a du trop eu égard aux autres, & que je prenne, par exemple, 3 femmes ou 4 domeſtiques pour un homme que je retrancherai, ou bien 10 enfans pour 3 hommes, le total deviendra plus grand que 60, & je ne trouverai nul moïen de corriger cet excès; car la dépenſe des hommes étant beaucoup plus excédante à l'égard de chaque autre en particulier, que les autres ne le ſont entr'elles, il ſe trouvera toujours du trop quand on voudra mettre l'équivalant de deux ou pluſieurs hommes, & ce trop ne pourra être compenſé par un moins qui lui ſoit égal, à moins qu'on ne remette les choſes dans leur premier état.

On me reprochera peut-être de m'arrêter trop ſur des queſtions qui ne ſont pas d'un grand uſage, mais je répondrai en deux mots, que les queſtions d'uſage dépendant des principes de la théorie, il eſt toujours bon de s'appliquer à bien connoître ces principes, ſur tout lorſqu'ils ſont auſſi capables que ceux-ci de donner à l'eſprit l'étenduë & la méthode dont il a beſoin pour bien diriger ſes opérations.

DOUZIE'ME EXEMPLE.

Un homme a fait un mélange de 30 boiſſeaux de froment à 2 liv. 4 ſols le boiſſeau, de 50 boiſſeaux de ſeigle à 16 ſols le boiſſeau, & de 24 boiſſeaux d'orge à 1 liv. 6 ſols le boiſſeau: on demande combien le boiſſeau de ce mélange doit être vendu?

Pour trouver le prix moïen, je fais la ſomme totale des boiſſeaux qui eſt 104; enſuite je multiplie 30 boiſſeaux de froment

par 2 liv. 4 ſols, & le produit eſt 66 liv. Je multiplie de même 50 boiſſeaux de ſeigle par 16 ſols, & le produit eſt 40 liv. enfin, je multiplie 24 boiſſeaux d'orge par 1 liv. 6 ſols, ce qui me donne 31 liv. 4 ſols; & ajoutant les trois produits enſemble, leur ſomme eſt 137 liv. 4 ſols, qui eſt la valeur de 104 boiſſeaux. Donc 104, multiplié par le prix moïen que je cherche, produiroit 137 liv. 4 ſols; par conſéquent diviſant 137 liv. 4 ſols par 104, le quotient 1 liv. 6 ſ. 4 den. $\frac{8}{13}$ ſera la valeur de chaque boiſſeau du mélange.

30
50
24
104 somme des boiſſeaux

30 boiſſeaux de froment
2 liv. 4 ſols
60
6
66 livres

104 | 2744 | 26 ſols
66.4
40

50 boiſſeaux de ſeigle
0 liv. 16 ſols
25
12 liv. 10 ſols
2 liv. 10 ſols
40 liv. 0 ſol

104 | 480 | 4 deniers
64

24 boiſſeaux d'orge
1 liv. 6 ſols
24
6
1 liv. 4 ſols

40
12
80
40
480 deniers

31 liv. 4 ſols
66 liv.
40 liv.
137 liv. 4 ſ. prix total
20
2740
4
2744 ſols

Prix du boiſſeau de mélange 1 livre 6 ſols 4 deniers $\frac{16}{26}$ ou $\frac{8}{13}$.

De l'extraction de la Racine quarrée.

XIX. Lorſqu'un nombre ſe multiplie lui-même, le produit s'appelle *un quarré*, dont la *racine* eſt le nombre qui l'a produit; 2 multiplié par 2 fait 4, ce nombre quatre eſt un quarré, & 2 en eſt la racine: de même 5 multiplié par 5 produit le quarré 25, dont la racine eſt 5.

Quand les nombres quarrés ne contiennent qu'un ou deux caractéres tout au plus, l'extraction de leurs racines eſt fort facile; pourvû qu'on ſache quels ſont les quarrés des neuf ou dix premiers nombres que nous avons marqués dans cette Table, dont le premier rang horizontal contient les 10 premiers nombres, & celui du deſſous contient les racines.

Racines	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
quarrés	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Mais s'il ſe trouve qu'un quarré contienne trois ou pluſieurs caractéres, alors il faut néceſſairement ſe ſervir des régles que nous allons expliquer ici, & dont on comprendra aiſément la raiſon, après que nous aurons examiné de quelle maniere ſe forment ces ſortes de nombres.

Suppoſons donc qu'on nous demande de faire le quarré de 36, j'écris 36 ſous 36, comme dans la multiplication ordinaire, mais au lieu de retenir les dixaines que je trouve dans chaque rang, je les écris à leur place, & je mets par-deſſous le produit qui vient après, ainſi qu'on va voir.

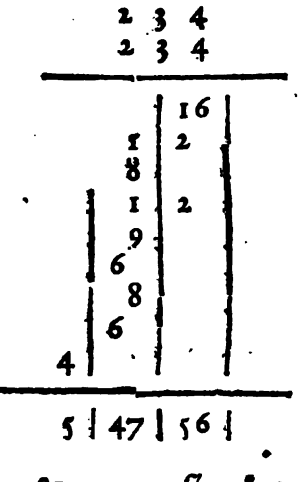
Je dis: 6 fois 6 font 36, j'écris 6 & j'avance 3 dixaines ſous les dixaines; 6 fois 3 font 18 dixaines, je mets 8 dixaines ſous 3 & j'avance 1 au rang des centaines; enſuite multipliant par le ſecond caractére 3, je dis: 3 fois 6 font 18, j'écris 8 ſous le 3 & j'avance 1 au rang des centaines; enfin 3 fois 3 font 9, & j'écris 9 au rang des centaines; je fais la ſomme de tous ces produits, & cette ſomme 1296 eſt le quarré de 36.

	36
	36
	36
1	8
1	8
9	
12	96

Or en examinant ces quatre produits partiaux, je vois 1°. Que le dernier 9 eſt le quarré du premier caractére de la racine 36.

2°. Que les deux ſuivans 18 & 18 ſont chacun un produit du premier caractére 3 par le ſecond 6, & qu'ainſi ces deux produits ajoutés enſemble ſont le double du premier caractére multiplié par le ſecond. 3°. Enfin, que le premier produit 36 eſt le quarré du ſecond caractére 6; ainſi je ſais que tout quarré dont la racine a deux parties, contient le quarré de la premiere, le double de la premiere multiplié par la ſeconde, & le quarré de la ſeconde; & pour mieux reconnoître la place que chacune de ces trois choſes occupe dans le produit total, c'eſt-à-dire dans le nombre quarré, j'en tranche les caractéres de deux en deux, en commençant de droite à gauche; après quoi je vois que le quarré 9 du premier caractére ſe trouve placé à gauche de la ſeconde tranche, car 9 eſt dans 12; que le double du premier caractére 3 par le ſecond eſt en partie à gauche de la ſeconde tranche & en partie à droite, & que le quarré 36 vient immédiatement après la premiere tranche.

Suppoſons de nouveau que nous aïions à faire le quarré de 234, je multiplie 234 par lui-même de la même façon que j'ai multiplié 36, & après avoir fait la ſomme de tous les produits, je trouve que le quarré de 234 eſt 54756; je le coupe par tranches, & j'en ai ici trois, ce qui me fait voir qu'un quarré peut être coupé en autant de tranches que ſa racine contient de caractéres.



J'examine enſuite les produits partiaux, en commençant par la gauche, & je trouve que le premier 4 eſt le quarré du premier caractére 2 de la racine, & que la place de ce quarré eſt immédiatement après la premiere tranche; qu'enſuite les deux produits 6 & 6 ſont chacun le produit du premier caractére 2 par le ſecond 3; & par conſéquent que ces deux produits joints enſemble ſont le double du premier multiplié par le ſecond, & que leur place eſt en partie après la premiere tranche & en partie devant. Qu'enſuite vient 9 avec deux produits 8, l'un en-deſſous de 9 & l'autre en-deſſus; que 9 eſt le quarré du ſecond caractére 3, & que ſa place eſt immédiatement après la ſeconde tranche; que les deux produits 8 & 8 ſont chacun le produit du premier caractére par le troiſiéme, de même

même que les deux produits 12 & 12 qui viennent après ſont chacun le produit du ſecond caractére par le troiſiéme ; & qu'ainſi ajoutant les deux produits 8 & 8 enſemble, & les deux produits 12 & 12, la ſomme des deux 8 & 8 ſera le double de la premiere par la troiſiéme, de même que la ſomme des deux 12 & 12 eſt le double de la ſeconde par la même troiſiéme ; & par conſéquent ces deux ſommes priſes enſemble ſont le double des deux premiers caractéres multiplié par le troiſiéme, & que leur place eſt en partie après la ſeconde tranche & en partie devant ; enfin que le dernier produit 16 eſt le quarré du troiſiéme caractére 4, & que ſa place eſt immédiatement après la premiere tranche.

De-là j'infere que tout quarré dont la racine a trois caractéres, contient, 1°. Le quarré du premier. 2°. Le double du premier multiplié par le ſecond. 3°. Le quarré du ſecond. 4°. Le double des deux premiers multiplié par le troiſiéme, & 5°. Le quarré du troiſiéme.

De-là j'infere encore que ſi la racine avoit plus de trois caractéres, je trouverois tout de même le double des trois premiers multiplié par le quatriéme, le quarré du quatriéme, le double des quatre premiers multiplié par le cinquiéme ; & ainſi de ſuite à l'infini.

Cela ſuppoſé, on connoîtra facilement les raiſons des régles que nous allons ſuivre pour l'extraction des racines. Suppoſons donc qu'on nous demande d'extraire la racine du quarré 186629, je tire une ligne ſous ce nombre ; & le coupant par tranches, je connois que ſa racine a 3 caractéres puiſqu'il y a trois tranches ; je dis donc : Tout quarré contient immédiatement après ſa derniere tranche à gauche le quarré du premier caractére de ſa racine ; j'examine donc quel eſt le plus grand quarré qui ſoit contenu dans 18, & conſultant la Table ci-deſſus, je trouve que ce quarré eſt 16, dont la racine eſt 4, j'écris 4 après la premiere tranche à droite & 4 deſſous 18, & je dis : 4 fois 4 font 16, & de 18 ôtez 16 reſte 2 que j'écris ſous 4 ; enſuite j'abaiſſe les deux caractéres 6 & 6, qui ſont entre la troiſiéme & la ſeconde tranche, & les écrivant à droite du reſte 2, je dis : Tout quarré contient encore le double du premier caractére multiplié par le ſecond, & le quarré du ſe-

18|66|24	432
4	
266	
83	
1724	
862	
000	

cond. Or je ne connois pas ce ſecond, mais puiſque le double du premier multiplié par le ſecond ſe trouve dans 26, car c'eſt-là ſa place, ſi je diviſe 26 par le double du premier, le quotient ſera le ſecond ; j'écris donc le double de 4 qui eſt 8 ſous 26, & voïant que 8 eſt 3 fois dans 26 avec un reſte 2, j'écris 3 pour le ſecond caractére de la racine, & 3 ſous le ſecond 6, parce que le quarré de 3 doit ſe trouver là, ainſi je dis : 3 fois 3 font 9, qui eſt le quarré de 3, & de 6 retranchez 9, cela ne ſe peut, mais de 16 retranchez 9, reſte 7, que j'écris ſous 3, & non pas en avançant d'un rang à gauche comme dans la diviſion, parce que cela n'eſt pas néceſſaire, & qu'il faut conſerver l'ordre des caractéres ; enſuite 3 fois 8 font 24, & 1 que j'ai emprunté pour faire 16 font 25, & de 26 ôtez 25, reſte 1 que j'écris ſous 8.

J'abaiſſe les deux derniers caractéres 2 & 4, qui ſont entre la ſeconde & la premiere tranche, & les écrivant à droite du reſte 17, je dis : Tout quarré contient encore le double des deux premiers caractéres de la racine multiplié par le troiſiéme ; or je ne connois pas ce troiſiéme, mais puiſque le double des deux premiers multiplié par le troiſiéme eſt dans 172, car c'eſt-là ſa place, ſi je diviſe 172 par le double des deux premiers, le quotient ſera le troiſiéme ; je prens donc le double de 43 qui eſt 86, & je l'écris ſous 172, obſervant que ſon dernier caractére 6 ſoit en-delà de la tranche, enſorte que ce double ſoit partie en deçà & partie en-delà, à quoi il faut toujours avoir attention quand ce double a pluſieurs caractéres, & quand il n'en a qu'un, comme le double 8 de la premiere, il faut qu'il ſoit écrit en-delà. Je dis donc : En 17, 8 eſt 2 fois & reſte 1, qui joint avec 2 fait 12, dans lequel 6 eſt auſſi 2 fois, & il ne reſtera que 4 qui doit être le quarré de 2, ce qui ſe trouve juſte ; j'écris 2 ſous 4 & 2 à la racine après 43, & je dis : 2 fois 2 font 4, & de 4 ôtez 4, reſte zero ; 2 fois 6 font 12, & de 2 ôtez 12, cela ne ſe peut, mais de 12 ôtez 12, reſte zero ; 2 fois 8 font 16, & 1 que j'ai emprunté pour faire 12 font 17, & de 17 ôtez 17, reſte zero ; après quoi il ne reſte plus rien au nombre propoſé, & cela me fait voir que ce nombre eſt un quarré dont la racine eſt 432.

Et pour m'en aſſurer, je multiplie 432 par 432, & le produit eſt 186624, qui eſt le même que le nombre propoſé.

432
432
864
1296
1728
186624

Il eſt à propos, à meſure qu'on abaiſſe les nombres de la tran-

chie ſuivante, de mettre un point entre le reſte & les nombres qu'on abaiſſe, parce que ce point marque la place de la tranche. On doit auſſi obſerver de n'abaiſſer à la fois que les caractéres qui ſe trouvent entre la tranche ſur laquelle on vient d'opérer, & la tranche immédiatement ſuivante, parce que dans chaque opération on ne cherche qu'un caractére de la racine, & que le quarré de ce caractére doit toujours ſe trouver là; enfin lorſqu'en examinant combien de fois le double d'une racine, ou de deux, ou de trois, &c. eſt contenu dans le reſte, on trouve qu'il y eſt un certain nombre de fois, mais que ce qui reſte ne contient pas le quarré de ce nombre de fois, comme il doit le contenir, c'eſt marque que ce quotient n'eſt pas le véritable que l'on cherche, & par conſéquent il faut le diminuer juſqu'à ce que le reſte renferme ſon quarré; c'eſt ce qu'on va voir dans l'extraction ſuivante, où je me propoſe de tirer la racine du nombre 4831204.

Je coupe ce nombre par tranches, & je connois que ſa racine aura 4 caractéres, parce qu'il y a 4 tranches; enſuite je prens le plus grand quarré contenu dans le caractére 4 qui eſt après la derniere tranche, & ce quarré eſt 4 lui-même, dont la racine eſt 2; j'écris 2 pour le premier caractére de la racine, & 2 ſous 4, & je dis: 2 fois 2 ſont 4, & de 4 ôtez 4, reſte zero.

4|83|12|04	2198
2	
0.83	
41	
42.12	
4212	
351.04	
4388	

J'abaiſſe les deux caractéres 8 & 3 qui ſont entre la derniere tranche & la troiſiéme, & prenant le double du caractére 2 de la racine, j'écris 4 ſous 8, diſant: En 8, 4 eſt 2 fois, mais il ne reſte plus que 3, & le quarré de 2 n'eſt pas contenu dans 3; ainſi au lieu de 2 j'écris 1 pour le ſecond caractére & 1 ſous 3, diſant: Une fois 1 eſt 1, & de 3 ôtez 1, reſte 2; une fois 4 eſt 4, & de 8 ôtez 4, reſte 4.

J'abaiſſe les deux caractéres 1 & 2 qui ſont entre la troiſiéme & la ſeconde tranche, mettant un point entre le reſte 42, & ces deux caractéres pour marquer la place de la tranche; je double les deux caractéres 21 de la racine & j'écris 42, enſorte que 2 tombe en-delà du point ſous 1, enſuite je dis: 4 eſt 9 fois dans 42, & reſte 6, qui avec le caractére ſuivant 1, fait 61, & 2 eſt 9 fois dans 61, avec un reſte beaucoup plus grand qu'il ne faut pour contenir le quarré de 9 qui eſt 81; ainſi j'écris 9 pour le troiſiéme ca-

ractére de la racine, & 9 ſous 2, diſant : 9 fois 9 font 81, & de 82 ôtez 81, reſte 1 ; 9 fois 2 font 18, & 8 que j'ai emprunté font 26, & de 31 ôtez 26, reſte 5 ; 9 fois 4 font 36, & 3 font 39, & de 42 ôtez 39, reſte 3.

J'abaiſſe les deux derniers caractéres qui ſont entre la ſeconde & la premiere tranche, mettant un point entr'eux & le reſte 351, & doublant les trois caractéres 219, ce qui fait 438, j'écris 438 ſous 35108, enſorte que le dernier caractére 8 tombe en-delà du point ſous zero ; & trouvant que 438 eſt 8 fois dans 3510, & que le reſte joint à 8 contient le quarré de 8, j'écris 8 pour le quatriéme caractére de la racine, & 8 ſous le dernier caractére 8, en diſant : 8 fois 8 font 64, & de 64 ôtez 64, reſte zero ; 8 fois 8 font 64, & 6 que j'ai emprunté font 70, & de 70 ôtez 70, reſte zero ; 8 fois 3 font 24, & 7 que j'ai emprunté font 31, & de 31 ôtez 31, reſte zero ; 8 fois 4 font 32, & 3 que j'ai emprunté font 35, & de 35 ôtez 35, reſte zero ; & comme il ne reſte rien au nombre propoſé, je connois que ce nombre eſt un quarré dont la racine eſt 2198 ; & en effet, multipliant 2198 par lui-même, le produit eſt 4831204 qui eſt le même que le nombre propoſé.

2198
2198
17584
19782
2198
4396
4831204

Après avoir expliqué la maniere de tirer la racine quarrée d'un nombre, j'ajouterai quelques exemples qui feront voir l'application que l'on en peut faire ſelon les occaſions.

PREMIER EXEMPLE.

Un Seigneur a fait faire dans ſes terres un Parc quarré qui contient 289444 *toiſes quarrées : combien chaque côté a-t-il de toiſes en longueur ?*

Je tire la racine quarrée de ce nombre, & trouvant que cette racine eſt 538, & qu'il ne reſte rien, je connois que chaque côté de ce Parc a 538 toiſes de longueur ; & en effet, 538 toiſes multipliées par elles-mêmes, font 289444 toiſes quarrées, ce qui eſt préciſément le nombre propoſé.

28|94|44 | 538 toiſes
5
3.94
103
85.44
1068
000

SECOND EXEMPLE.

Une cour quarrée contient 42 toiſes quarrées, 1 pied, 6 pouces de toiſe quarrée; on veut l'augmenter d'une toiſe par côté, & l'on demande quelle ſera ſa longueur & ſa profondeur?

Je ne puis connoître quelles ſont les dimenſions que cette cour aura, ſans connoître auparavant quelles ſont celles qu'elle a préſentement; ainſi il faut que je tire la racine quarrée de 42 toiſes, 1 pied, 6 pouces de toiſe quarrée; & pour tirer cette racine, je réduis tout en pouces, & j'ai 3042 pouces; mais comme chacun de ces pouces eſt long de 6 pieds & large d'un pouce, ce qui eſt bien éloigné d'être un quarré, ces 3042 pouces peuvent fort bien former un quarré, ſans que leur nombre ſoit pour cela un quarré dont je puiſſe extraire la racine; & cela eſt ſi vrai, qu'une toiſe quarrée, qui eſt un quarré parfait, contient 72 de ces pouces, & le nombre 72 n'eſt pas un quarré: c'eſt pourquoi je conſidére que chaque pouce de toiſe aïant un pouce de hauteur & 6 pieds ou 72 pouces de longueur, contient par conſéquent 72 pouces quarrés; donc ſi je multiplie 3042 pouces de toiſe par 72 pouces quarrés, le produit 219024 ſera le contenu de la cour en pouces quarrés; & comme la cour eſt ſuppoſée quarrée, il faut néceſſairement que le nombre 219024 ſoit quarré, à cauſe que les côtés de la cour étant égaux contiennent autant de pouces l'un que l'autre; & que ces pouces ſe multipliant les uns par les

42 toiſes 1 pied 6 pouces
6

252
1

253 pieds
12

506
2536

3042 pouces de toiſe
72

6084
21294

219024 pouces quarrés

21|90|24 | 468 pouces

4 | 39 pieds

5.90
86

74.24
928

00

6 toiſes 3 pieds

autres, font le contenu de la cour, & en même-tems un nombre quarré, puiſque le nombre quarré eſt le produit d'un nombre par lui-même. Je tire donc la racine quarrée de 219024 pouces, & cette racine eſt 468 pouces; j'en prens le $\frac{1}{12}$ pour le réduire en pieds, & j'ai 39 pieds dont je prens le $\frac{1}{6}$ pour avoir des toiſes, & j'ai 6 toiſes, 3 pieds pour le côté de la cour. Et en effet, multipliant 6 toiſes, 3 pieds, par 6 toiſes, 3 pieds,

6	toiſes	3	pieds
6	toiſes	3	pieds
39			
3	toiſes	1 pied	6 pouces
42	toiſes	1 pied	6 pouces

j'ai 42 toiſes, 1 pied, 6 pouces, qui eſt préciſément le contenu de la cour tel qu'il eſt porté dans la queſtion.

7	toiſes	3	pieds côté augmenté
7	toiſes	3	pieds
52	toiſes	3	pieds
3	toiſes	4	pieds 6 pouces
56	toiſes	1	pied 6 pouces

Maintenant puiſqu'on veut agrandir chaque côté d'une toiſe, les côtés de cette cour auront donc 7 toiſes, 3 pieds chacun, & multipliant 7 toiſes, 3 pieds, par 7 toiſes, 3 pieds, on aura pour le contenu de la cour, lorſqu'elle ſera agrandie, 56 toiſes quarrées, 1 pied, 6 pouces de toiſe, ce qui feroit une augmentation de 14 toiſes.

Afin que cette augmentation ne paroiſſe pas étonnante à ceux qui ne ſont pas accoutumés à meſurer ces ſortes de dimenſions, ſuppoſons que la figure ABCD, [fig. 15.] repréſente la cour qui a 6 toiſes, 3 pieds par côté, & que le quarré EFGH repréſente cette même cour avec l'augmentation d'une toiſe par côté, c'eſt-à-dire, de 3 pieds à chaque extrémité des côtés, l'augmentation de cette cour ſera l'eſpace contenu entre le circuit ABCD & le circuit EFGH; ſi de toutes les diviſions du circuit ABCD nous tirons des lignes perpendiculaires ſur le circuit EFGH, l'eſpace renfermé ſera diviſé en pluſieurs autres petits eſpaces. Examinons d'abord ceux qui ſont le long du côté EF, nous trouverons que depuis A juſqu'en P ces eſpaces ont une toiſe de longueur, & trois pieds, ou $\frac{1}{2}$ toiſe de hauteur, donc ces 6 eſpaces vaudront ſix $\frac{1}{2}$ toiſes, c'eſt-à-dire 3 toiſes. Enſuite les deux eſpaces qui ſont de A en E, & celui qui eſt de B en F, ont chacun $\frac{1}{2}$ toiſe de longueur & $\frac{1}{2}$ toiſe de hauteur, & par conſéquent ils valent chacun $\frac{1}{4}$ de toiſe, ce qui fait $\frac{3}{4}$, leſquels ajoutés aux trois toiſes déja trouvées, feront 3 toiſes $\frac{3}{4}$. Or les eſpaces qui ſeront le long du côté GH,

vaudront auſſi 3 toiſes $\frac{1}{4}$, donc ceux-ci ajoutés aux autres feront 7 toiſes $\frac{1}{2}$.

Examinons de même les eſpaces qui ſont le long du côté EH, depuis O juſqu'en R, car le reſte a déja été compté, & nous trouverons que ceux qui ſont de O en S ont chacun une toiſe de hauteur & $\frac{1}{2}$ toiſe de largeur, & qu'ils valent par conſéquent 3 toiſes, & que celui qui eſt de S en R n'aïant que $\frac{1}{2}$ toiſe de hauteur & $\frac{1}{2}$ toiſe de largeur, ne vaut que $\frac{1}{4}$, lequel ajouté à 3 fait $3\frac{1}{4}$. Or les eſpaces qui ſont le long du côté oppoſé FG, depuis M juſqu'en T, en valent autant, donc ceux-ci ajoutés aux autres font $6\frac{1}{2}$, & ces $6\frac{1}{2}$ ajoutés aux $7\frac{1}{2}$ trouvés ci-deſſus, font 14 toiſes d'augmentation, ainſi que nous l'avons trouvé par le calcul.

Pour revenir à l'extraction de la racine quarrée, il faut bien obſerver ce que nous avons fait ici pour tirer la racine quarrée de 42 toiſes, 1 pied, 6 pouces, & faire la même choſe toutes les fois qu'il s'agira de tirer la racine d'un quarré compoſé de toiſes, pieds, pouces & lignes de toiſes, c'eſt-à-dire, qu'il faudra réduire le quarré à ſa derniere eſpéce de diviſion, & multiplier cette eſpéce par le nombre des eſpéces quarrées qu'elle contient; ainſi ſi le quarré contient des lignes de toiſe, on le réduira en lignes, & l'on multipliera ces lignes par 864, parce que les lignes de toiſes quarrées aïant une ligne de largeur & une toiſe ou 864 lignes de longueur, contiennent par conſéquent 864 lignes quarrées; & pour faciliter l'uſage de ceci, il faut ſavoir qu'un pied de toiſe aïant 6 pieds de long, vaut 6 pieds quarrés, 1 pouce de toiſe 72 pouces quarrés, & 1 ligne de toiſe 864 lignes quarrées.

1 pied de toiſe quarrée vaut	6	pieds quarrés
1 pouce	72	pouces quarrés
1 ligne	864	lignes quarrées

Cela ſuppoſé; s'il falloit tirer la racine quarrée de 6 toiſes, 4 pieds, 0 pouce, 6 lignes, on réduiroit tout en lignes, ce qui produiroit 5766; enſuite on réduiroit ces lignes de toiſe en lignes quarrées, en les multipliant par 864, & le produit ſeroit 4981824, dont on extrairoit la racine quarrée qu'on trouveroit être 2232 lignes; cela fait, on diviſeroit la racine par 864, parce que la toiſe contient 864 lignes, & le quotient, après avoir évalué les fractions, ſeroit 2 toiſes, 3 pieds, 6 pouces; & pour s'aſſurer d'avoir bien opéré, on multiplieroit 2 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, par 2 toiſes, 3 pieds 6 pouces, & le produit ſeroit 6 toiſes, 4 pieds, 0 pouce, 6 lignes, ainſi qu'il étoit propoſé.

6 toiſ. 4 p. 0 pou. 6 l.
6

36
4

40 pieds
12

80
40

480 pouces
12

960
480
6

5766 lignes
864

23064
34596
46128

4981824 lignes quarrées

4|98|18|24 | 2232 lignes

2

98
42

14.18
443

89.24
4462

000

864 | 2232 | 2 toiſes 3 pieds 6 pouces

504
6

3024 pouces

864 | 3024 | 3 pieds

432
12

864
432

5184

864 | 5184 | 6 pouces

000

2 toiſes 3 pieds 6 pouc.
2 toiſes 3 pieds 6 pouc.

5 toiſes 1 pied 0 pouc.
1 toiſe 1 pied 9 pouc.
1 pied 3 pouc. 6 lig.

6 toiſes 4 pieds 0 pouc. 6 lig.

Et ſi après avoir tiré la racine il reſtoit quelque choſe, ce ſeroit ſigne que le nombre n'étoit pas quarré; & en ce cas, pour s'aſſurer d'avoir bien fait, on multiplieroit la racine par elle-même, & ajoutant au produit ce qui auroit reſté, la ſomme ſeroit le nombre propoſé.

Soit,

Soit, par exemple 6 toiſes, 1 pied, 6 pouces, 6 lignes, dont il faut extraire la racine.

6 toiſ. 1 p. 6 pou. 6 l.

6

36
1

37 pieds
12

74
376

450 pouces
12

900
4506

5406 lignes
864

21624
32436
43248

4670784 lignes quarrées

4|67|07|84 | 2161 lignes

2

67
41

26.07
4 26

51.84
43 21

863

864 | 2161 | 2 t. 3 pieds 0 pouc. 1 lig.

433
6

2598

6
12

72 pouces
12

144
72

864 lignes

864 | 2598 | 3 pieds

6

864 | 864 | 1 ligne

Je réduis tout en lignes, & j'ai 5406 lignes que je réduis en lignes quarrées, en les multipliant par 864; je tire la racine du produit; & cette racine eſt 2161, avec un reſte 463, ce qui me fait voir que le nombre n'eſt pas un quarré, & pour m'aſſurer d'avoir bien opéré, je réduis la racine en toiſes, & trouvant 2 toiſes, 3 pieds, 0 pouce, 1 ligne, j'en fais le quarré, & j'ajoute le reſte 863 lignes, mettant par-deſſous le dénominateur 864, parce que

ces 863 étant des lignes quarrées, il en faut 864 pour faire 1 ligne de toiſe quarrée. Ajoutant donc le produit avec ce reſte, la ſomme eſt 6 toiſes, 1 pied, 6 pouces, 6 lignes, qui eſt préciſément le nombre propoſé.

		2	toiſ.	3	pieds	0	pouc.	1	lig.
		2	toiſ.	3	pieds	0	pouc.	1	lig.
		5	toiſ.	0	pied	0	pouc.	2	lig.
pour 3 pieds		1	toiſ.	1	pied	6	pouc.	0	lig. $\frac{1}{2}$ ou $\frac{432}{864}$.
pour 1 pied ſuppoſé				2	pieds	6	pouc.	6	lig. $\frac{1}{6}$
pour 1 pouce ſuppoſé				6	pied	2	pouc.	6	lig. $\frac{1}{72}$
pour 1 ligne						0	pouc.	2	lig. $\frac{433}{864}$ ou $\frac{432}{864}$.
									Reſte de la racine $\frac{863}{864}$.
		6	toiſ.	1	pied	6	pouc.	6	lig.

Nous dirons plus bas comment il faudroit faire s'il ſe trouvoit une fraction de lignes au nombre, dont on devroit extraire la racine.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un homme a un Jardin en forme de quarré long, qui contient 160 toiſes quarrées, & qui eſt large de 10 toiſes; il voudroit en faire un quarré parfait, dont le côté eût un nombre entier de toiſes ſans fraction, & ſes voiſins conviennent avec lui de lui fournir autant de terrein qu'il lui en faudra ſur les côtés, en prenant en échange ce qu'il aura de trop ſur la longueur; à condition que s'il lui faut quelque choſe de plus, il le païera argent comptant ſur le pied de 25 livres la toiſe. On demande, 1°. Combien de toiſes aura le côté de ſon Jardin, & combien il devra en acheter de plus pour en faire un quarré parfait? 2°. Combien de toiſes quarrées les voiſins lui donneront, ſoit en échange, ſoit pour l'argent comptant, & quelle ſera la longueur & largeur de la partie du terrein que chacun d'eux lui fournira?

Avant de répondre à ce qu'on nous demande, il faut ſavoir que ſi on prend les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. & leurs quarrés 1, 4, 9, 16, &c. ces quarrés ſe ſurpaſſeront tous les uns les autres d'une mê-

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	&c.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	

me façon, enſorte que le ſupérieur ſurpaſſera celui qui lui eſt immédiatement inférieur du double de la racine de cet inférieur, plus l'unité. Le quarré de 5, par exemple, qui eſt 25, ſurpaſſera le quarré de 4 qui eſt 16, de deux fois 4 plus 1, ce qui fait 9; de même le quarré de 8 qui eſt 64, ſurpaſſera le quarré de 7 qui eſt 49, de deux fois 7 plus 1, ce qui fait 15; & ainſi des autres à l'infini.

Cela poſé, il ſera facile de réſoudre la queſtion en cette maniere. 1°. Je tire la racine quarrée de 160, & cette racine eſt 12 avec un reſte 16 toiſes, ce qui me fait voir que 160 n'eſt pas un nombre quarré, & que ce nombre ſurpaſſe le quarré de 12 de 16 toiſes; ainſi le côté de ſon jardin devra avoir plus de 12 toiſes, & ne pourra pas en avoir moins de 13, puiſqu'on ne veut point de fraction. Or le quarré de 12 étant plus petit que 160 de 16, ſi nous retranchons 16, le reſte 144 ſera le quarré de 12; & ſi à ce quarré nous ajoutons deux fois la racine 12, plus l'unité, ce qui ſera 25, nous aurons 169 qui ſera le quarré de 13; & par conſéquent cet homme en aïant déja 160, ſera obligé d'en acheter 9 à ſes voiſins, outre ce qu'il leur cedera ſur la longueur, & ces 9 à 25 livres la toiſe, lui coûteront 225 livres.

1|60	12
1	
60	
22	
16	

9	
25 livres	
225 livres	

Maintenant, puiſque ce jardin eſt large de 10 toiſes, & qu'il doit l'être de 13 pour faire un quarré parfait, il s'enſuit que le terrein que ſes voiſins lui cederont, tant pour l'échange que pour l'argent comptant, aura 3 toiſes de largeur, ſur 13 toiſes de longueur; ainſi multipliant 13 par 3, nous trouverons 39 toiſes quarrées qu'ils ſeront obligés de lui fournir, c'eſt-à-dire 19 $\frac{1}{2}$ chacun, & ſur ces 39 il y en aura 30 qu'ils auront pris ſur la longueur, ce qui eſt en effet vrai; car le jardin aïant 160 toiſes quarrées, & ſa largeur étant de 10 toiſes, ſa longueur devoit être par conſéquent de 16 toiſes, puiſque 10 fois 16 font 160; & comme elle ne doit plus être que de 13, il y en aura donc 3 de retranchées ſur la longueur, leſquelles multipliées par la largeur 10 font 30.

13	
3	
39	

Pour réſumer donc la queſtion en deux mots, le jardin aura 13 toiſes de longueur, le propriétaire en cedera 30 à ſes voiſins, & en achetera 9 de ſurplus qui lui couteront 225 livres, & les voiſins lui donneront chacun 19 $\frac{1}{2}$ toiſes quarrées ſur 13 de longueur

& 1 ½ de largeur ; car 13 multipliées par 1. ½ font 19 ½.

Nous verrons bientôt comment il auroit fallu répondre à la même queſtion, ſi le propriétaire du jardin ne ſe fût pas embarraſſé qu'il ſe trouvât de fractions de toiſe dans les dimenſions du quarré.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

On veut ranger en bataillon quarré une troupe de 1326 hommes : combien y en aura-t-il de front & de file ?

Je tire la racine quarrée 1326 & cette racine eſt 36, ce qui me fait voir que ce bataillon aura 36 hommes de front & 36 de file, mais qu'il reſtera 30 hommes qui ne ſauroient y entrer.

Que ſi on vouloit augmenter chaque côté de ce bataillon d'un homme, enſorte que le côté fût 37 au lieu de 36, on doubleroit la racine 36, ce qui feroit 72 ; & y ajoutant l'unité, on auroit 73, qui ajoutés au quarré de 36 formeroient le quarré de 37. Or comme ſur ces 73 on en a déja 30, il s'enſuit qu'augmentant le nombre 1326 de 43, ce qui feroit 1369, on auroit le quarré de 37 ; & en effet, tirant la racine quarrée de 1369, on trouve 37 ; ainſi en augmentant cette troupe de 43 hommes, on en formeroit un bataillon quarré qui auroit 37 hommes de front & autant de file.

```
13|26 | 36
 3
---
4.26
 66
---
 30

13|69 | 37
 3
---
4.69
 67
---
 00
```

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Un bataillon quarré à centre vuide, eſt compoſé de 2016 hommes, & l'eſpace vuide eſt capable de contenir une troupe qui auroit 22 hommes de front & autant de file : combien y a-t-il d'hommes de front & de file dans ce bataillon ?

Je fais le quarré de 22 qui eſt 484, puis ſuppoſant que le bataillon propoſé eſt plein, j'ajoute 484 à 2016, & la ſomme eſt 2500 hommes que le bataillon contiendroit s'il n'étoit pas à centre vuide. Je tire la racine quarrée de 2500, & cette

```
 22
 22
----
 44
 44
----
484

 484
2016
----
2500
```

racine eſt 50, laquelle multipliée par elle-même fait en effet 2500 hommes, & de ce nombre ôtez 484, le reſte eſt 2016 hommes, comme on l'a propoſé.

25|00 | 50
0.00
1.00
00

SIXIE'ME EXEMPLE.

Avec une troupe de 1815 hommes, on veut former un quarré long dont les hommes de front ſoient aux hommes de file comme 5 eſt à 3, c'eſt-à-dire, que quand on mettra 5 hommes de front, on ne mettra que 3 hommes de file : combien y en aura-t-il de file, & combien de front ?

Nous avons fait obſerver ailleurs que ſi deux nombres inégaux ſont multipliés par un même nombre, les produits ſont entr'eux comme les nombres inégaux ; 2 & 3 multipliés par 5 donnent 10 & 15, qui ſont entr'eux comme 2 & 3 ; d'où il ſuit que ſi le nombre à multiplier eſt le même de part & d'autre, & le multiplicateur different, les produits ſeront entr'eux comme les multiplicateurs ; ainſi 2 & 2 multipliés par 3 & 5, donnent 6 & 10, qui ſont entr'eux comme les multiplicateurs 3 & 5.

Cela ſuppoſé, je conſidére que ſi on faiſoit un bataillon parfaitement quarré, dont le front fût égal au front du quarré long qu'on veut faire, le bataillon quarré ſeroit le produit du front par le front, puiſque ſon front & ſa hauteur ſeroient égaux, & le quarré long ſeroit le produit du front par ſa hauteur, c'eſt-à-dire par le nombre d'hommes de la file. Donc ces deux produits ſeroient

3. 5 1815 Réponſe 3025
5
9075
3
9075 | 3025
0.0
07
30|25 | 55 front
15
5
0
5.25
105
000

entr'eux comme le front eſt à la file, ou comme 5 eſt à 3, puiſque le nombre à multiplier ſeroit égal dans l'un & dans l'autre, & que la différence ne ſe trouveroit que dans le multiplicateur. Je dis donc, pour trouver le quarré parfait, 3 eſt à 5 comme le quarré long 1815 eſt au quarré parfait qui auroit le même front que lui; & faiſant la régle, je trouve que ce quarré ſeroit 1155; tirant donc la racine quarrée, j'ai 55 qui eſt le front ſoit du quarré parfait, ſoit du quarré long qu'on veut faire.

Pour trouver les hommes de la file, j'examine que ſi on faiſoit un quarré parfait, dont la hauteur fût égale aux nombres d'hommes de file qui ſeront dans le quarré long, ce quarré ſeroit le produit de la hauteur par la hauteur, au lieu que le quarré long eſt le produit de la hauteur par le front; ainſi ces deux produits ſeroient entr'eux comme la hauteur eſt au front, ou comme 3 à 5; je dis donc pour trouver le quarré, 5 eſt à 3 comme le quarré long 1815 eſt au quarré qu'on feroit ſur ſa hauteur.

5. 3. 1815 — 3 — 5445

Réponſe 1089

5445 | 1089 — 04 — 44 — 45 — 0

1089 | 33 file — 3. — 189 — 63 — 00

Et faiſant la régle, je trouve 1089 dont la racine 33 eſt la hauteur, ſoit du quarré parfait, ſoit du quarré long; & par conſéquent le bataillon qu'on demande aura 55 hommes de front & 33 de file; car 55 multiplié par 33 font 1815, ainſi qu'il eſt propoſé.

55 × 33 — 165 — 165 — 1815

SEPTIE'ME EXEMPLE.

On veut ranger 4715 hommes en bataillon en forme de quarré long, dont le front ſoit à la hauteur comme 7 eſt à 5; & on veut qu'il y aïe un centre vuide capable de contenir une troupe dont le front ſeroit de 20 hommes, & la hauteur ſeroit au front comme 3 eſt à 1:

on demande combien il y aura d'hommes de front & de file?

Puiſque la hauteur de la troupe que le centre vuide eſt capable de contenir, ſeroit triple de ſon front, cette hauteur ſeroit donc 60; ainſi multipliant 20 par 60, j'ai 1200 hommes, leſquels ajoutés à 4715 font 5915 hommes que le bataillon contiendroit s'il étoit à centre plein.

	20
	60
	1200
	1200
	4715
	5915

Maintenant pour trouver le front de ce bataillon, je conſidére que ſi on faiſoit un bataillon parfaitement quarré, qui eût le même front que celui qu'on veut faire, ce bataillon quarré ſeroit le produit du front par le front, au lieu que le quarré long ſera le produit du front par la hauteur; ainſi ces deux produits aïant le même *nombre à multiplier*, ſeroient entr'eux comme leur multiplicateur, & par conſéquent comme le front à la file, ou comme 7 eſt à 5; ainſi pour trouver le quarré parfait, je dis: 5 eſt à 7 comme le quarré long 5915 eſt au quarré que je cherche; & faiſant la régle, je trouve que ce quarré ſeroit 8281 dont la racine quarrée me donne 91 hommes de front, ſoit pour ce quarré, ſoit pour le quarré long qu'on veut faire.

5. 7. 5915 — 7 — 41405

Réponſe 8281

5 | 41405 | 8281

1.4

4.0

0.5

0

8281 | 91 front.

9

181

181

000

Pour trouver la hauteur, je conſidére que ſi on faiſoit un quarré parfait qui eût la hauteur du quarré long qu'on demande, ce quarré ſeroit le produit de la hauteur par la hauteur, au lieu que le quarré long ſera le produit de la hauteur par la baſe; ainſi ces deux produits ſeront entr'eux comme la hauteur eſt au front, ou comme 5 eſt à 7; je cherche donc ce quarré parfait, en diſant: 7

eſt à 5 comme le quarré long 5915 eſt au quarré que je cherche.

7. 5. 5915 Réponſe 4225

5

29575

7

29575 | 4225

15.

17 42|25 | 65 hom. de file.

35 6

0 6.25

125

000

Et faiſant la régle, je trouve que ce quarré ſeroit 4225, dont la racine 65 eſt la hauteur, ſoit du quarré parfait, ſoit du quarré long qu'on demande; ainſi ce quarré long aura 91 de front & 65 de file.

Et pour m'aſſurer que j'ai bien fait, je multiplie 65 par 91, & le produit eſt 5915; & retranchant de ce produit le contenu 1200 de l'eſpace vuide, le reſte eſt 4715 qui eſt préciſément le nombre propoſé; & pour voir ſi la hauteur 65 eſt au front 91, comme 5 eſt à 7, je dis par régle de trois: 5 eſt à 7 comme 65 eſt à un quatriéme terme qui doit être 91.

65
91

65
585

5915
1200

4715 reſte

Et faiſant la régle je trouve juſtement 91, ce qui me fait voir que j'ai bien opéré.

On pourroit faire beaucoup d'autres queſtions ſur les bataillons triangulaires, exagonaux, octogonaux, &c. dont je ne parlerai point, parce qu'elles ſuppoſent la connoiſſance des progreſſions Arithmetiques & des nombres Poligones que j'expliquerai dans la ſuite de cet Ouvrage.

5. 7. 65 Réponſe 91

7

455

5

455 | 91

05

0

De l'extraction des Racines quarrées des fractions.

XX. Nous avons dit ailleurs que pour multiplier une fraction par une autre, il falloit multiplier le numérateur par le numérateur, & le dénominateur par le dénominateur, puis faire une nouvelle fraction de ces deux produits. Or de-là il suit que si une fraction est véritablement un nombre quarré, son numérateur & son dénominateur doivent aussi être des nombres quarrés, & que par conséquent tirant la racine de chacun de ces nombres, on aura la racine de la fraction. Ainsi pour tirer la racine de $\frac{4}{9}$, il faut tirer celle de 4 qui est 2, & celle de 9 qui est 3, & la fraction $\frac{2}{3}$ sera la racine de $\frac{4}{9}$, ce qu'on peut prouver aisément, puisque $\frac{2}{3}$ multiplié par $\frac{2}{3}$ produisent en effet $\frac{4}{9}$.

PREMIER EXEMPLE.

Une Place publique contient $588\frac{1}{16}$ *de toise quarrée, on demande de combien de toises est son côté?*

Je réduis $588\frac{1}{16}$ de toises en $\frac{1}{16}$, ce qui me donne $\frac{9402}{16}$; je tire la racine du numérateur 9409; qui est 97, & celle du numérateur, qui est 4, & par conséquent la racine est $\frac{97}{4}$; & réduisant cette fraction en entiers, j'ai $24\frac{1}{4}$ de toises pour le côté de cette Place publique.

$588\frac{1}{16}$.
16

3528
588
1

9409

94|09 | 97

9 4

13.09
1 87

000

4
97 | $24\frac{1}{4}$

1.7

1

SECOND EXEMPLE.

On veut savoir quel est le côté d'une salle quarrée qui contient 12 *toises*, 3 *pieds*, 3 *pouces*, 1 *ligne* $\frac{1}{2}$ *de toise quarrée?*

Je réduis tout en demi lignes, & comme ces lignes sont des li-

gnes de toiſes quarrées, chacune deſquelles vaut 864 lignes quarrées ; je multiplie 864 par 2, & j'ai 1728 demi lignes quarrées ; je multiplie les demi lignes de toiſe par les demi lignes quarrées, & le produit me donne des quarts de lignes quarrées, car des demi par des demi donnent des quarts ; j'en tire la racine qui me donne 6120 demi lignes courantes, & pour réduire ces demi lignes en toiſes, comme je ſai que la toiſe courante contient 864 lignes, je prens le double 1728, parce que la toiſe contient deux fois plus de demi lignes que de lignes ; & diviſant 6120 par 1728, je trouve, après avoir évalué les fractions, que la racine eſt 3 toiſes, 3 pieds, 3 pouces, & par conſéquent 3 toiſes, 5 pieds, 3 pouces ſont le côté de la ſalle.

12 toiſ. 3 pieds 3 pouc. 1. lig. $\frac{1}{2}$.
6
72
3
75 pieds
12
150
753
903 pouces
12
1806
9031
10837 lignes
2
21674
1
21675 demi lig.
1728
173400
43350
151725
21675
37454400 quarts de lignes quarrées.

864
2
1728 demi lignes quarrées.

1728 | 3 toiſes
936
6
5616 pieds

37|45|44|00 | 6120
6
145
121
2444
1222
00 00.00
12240
0 00 00

1728 | 5616 | 3 pieds
432
12
864
432
5184

1728 | 5184 | 3 pouces
000

Racine 3 toiſes 5 pieds 3 pouces.

Et pour voir ſi j'ai bien fait, je multiplie 3 toiſes, 3 pieds, 3 pouces par 3 toiſes, 3 pieds, 3 pouces, & le produit eſt 12 toiſes, 3 pieds, 3 pouces, 1 ligne $\frac{1}{2}$, ainſi qu'on l'avoit propoſé.

3 toiſes	3 pieds	3 pouces			
3 toiſes	3 pieds	3 pouces			
10 toiſes	3 pieds	9 pouces			
1 toiſe	4 pieds	7 pouces	6 lignes		
0 toiſe	0 pied	10 pouces	7 lignes	$\frac{6}{12}$ ou	$\frac{1}{2}$.
12 toiſes	3 pieds	3 pouces	1 ligne	$\frac{1}{2}$.	

6 toiſes 4 pieds 3 pouces 1 ligne $\frac{1}{144}$.

6

36
4

40 pieds
12

80
403

483 pouces
12

966
4831

5797 lignes
24

23188
115941

139129 vingt-quatriémes de lignes de toiſe
20736

834774
4173870
973903
2782580

2884978944 vingt-quatriémes de vingt-quatriémes de lignes quarrées.

864
24

3456
1728

20736 vingt-quatriémes de lignes quarrées

20736 | 537712 | 2 toiſ.

12240
6

73440

20736 | 73440 | 3 pieds

112752
12

22464
112320

1344784

20736 | 1344784 | 6 pouces

10368
12

2 7316
10368

124416

20736 | 124416 | 6 lignes

000000

Racine 2 toiſes 3 pieds 6 pouces 6 lignes.

28|84|97|89|44 | 537712 vingt-quatriémes de lignes courantes

5

3.84
103

75.97
1067

128.89
10741

2148.44
1074122

80 00 00

Voïez la page ſuivante, pour l'explication de ceci.

Et ſi on avoit propoſé de tirer la racine quarrée de 6 toiſes, 4 pieds, 3 pouces, 1 ligne $\frac{1}{24}$, j'aurois tout réduit en vingt-quatriémes de lignes ; mais comme ces lignes contiennent 864 lignes quarrées, j'aurois multiplié 864 par 24, ce qui m'auroit donné des vingt-quatriémes de lignes quarrées ; ainſi multipliant les vingt-quatriémes des unes par les vingt-quatriémes des autres, j'aurois eu des vingt-quatriémes de vingt-quatriémes de lignes quarrées, c'eſt-à-dire de lignes quarrées multipliées par le quarré de 24 ; ainſi tirant la racine, j'aurois eu des vingt-quatriémes de lignes courantes, & pour réduire cette racine en toiſe, j'aurois pris 864, qui eſt la valeur de la toiſe en ligne, & l'aïant multiplié par 24, ainſi que ci-deſſus, le produit 20736 auroit été le diviſeur ; & faiſant la diviſion, j'aurois trouvé après avoir évalué les fractions, que cette racine auroit été 2 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, 6 lignes.

Et en effet, faiſant le quarré de cette racine, j'aurois trouvé 6 toiſes, 4 pieds, 3 pouces, 1 ligne $\frac{1}{24}$ ainſi qu'on me l'auroit propoſé.

2 toiſes	3 pieds	6 pouces	6 lignes		
2 toiſes	3 pieds	6 pouces	6 lignes		
5 toiſes	1 pied	1 pouce	0 ligne		
1 toiſe	1 pied	9 pouces	3 lignes		
0 toiſe	1 pied	3 pouces	6 lignes	$\frac{1}{2}$ ou	$\frac{12}{24}$.
0 toiſe	0 pied	1 pouce	3 lignes		$\frac{13}{24}$.
6 toiſes	4 pieds	3 pouces	1 ligne		$\frac{1}{24}$.

On voit dans les trois derniers exemples comment on extrait la racine du dénominateur ſans opérer cependant ſur lui, ce qui peut toujours ſe faire quand le nombre dont on extrait la racine eſt compoſé d'entiers & de fractions ; mais quand ce nombre eſt une véritable fraction, dont le dénominateur eſt plus grand que le numérateur, alors il faut néceſſairement opérer ſur l'un & ſur l'autre ; ainſi s'il falloit extraire la racine de $\frac{576}{961}$, qui eſt une véritable fraction, on tireroit la racine de 576, qui eſt 24, & celle de 961, qui

$\frac{576}{961}$ 5|76 | 24 — 9|61 | 31 — Racine $\frac{24}{31}$.

2 — 3

176 — 61

44 — 61

00 — 00

eſt 31; & la racine cherchée ſeroit $\frac{24}{31}$; & ainſi des autres.

De l'extraction de la Racine quarrée par approximation.

XXI. Quand après avoir tiré la racine quarrée d'un nombre entier, on trouve qu'il reſte quelque choſe, ce reſte eſt une marque certaine que le nombre n'eſt pas quarré, & qu'on ne peut en exprimer au juſte la racine ni par aucun nombre entier, puiſqu'il ne reſteroit rien ſi cela ſe pouvoit, ni par aucune fraction, parce qu'un entier qui a une fraction ſe multipliant lui-même, ne peut jamais produire un nombre entier, à cauſe que la fraction venant à ſe multiplier produit toujours une fraction moindre qu'elle, ainſi qu'on a vû ailleurs: & la même choſe arrive lorſqu'on tire la racine quarrée d'une fraction & qu'il ſe trouve un reſte; car comme on opére ſéparément ſur le numérateur & ſur le dénominateur, qui en eux-mêmes ſont des nombres entiers; ſi les racines de chacun de ces nombres laiſſent des reſtes, on ne pourra jamais les exprimer ni par aucun nombre entier, ni par aucune fraction: mais ſi cela eſt impoſſible, on peut du moins en approcher de ſi près, que ce qui manquera à la racine pour être véritable ſera moindre qu'un dixiéme, qu'un centiéme, qu'un milliéme, qu'un dix milliéme, qu'un cent milliéme; & ainſi de ſuite tant qu'on voudra, en rendant toujours la partie qui lui manquera dix fois plus petite, & c'eſt ce qu'on appelle tirer la racine par approximation.

Nous avons dit ci-deſſus que ſi l'on fait les quarrés de deux nombres qui ne ſe ſurpaſſent que d'une unité, le petit quarré ſera moindre que le grand du double de ſa racine, plus l'unité; & de-là il ſuit que ſi après avoir tiré la racine d'un nombre on trouve qu'il reſte quelque choſe, ce reſte doit toujours être moindre que le double de la racine trouvée, plus l'unité, parce que s'il lui étoit égal, la racine augmenteroit d'une unité, & il n'y auroit point de reſte. Ainſi ſi l'on tire la racine, par exemple de 45, qui eſt 6 avec un reſte 9, ce reſte vaut moins que 2 fois 6, c'eſt-à-dire que 12, plus 1, ce qui fait 13, parce que le quarré 36 joint à ce reſte feroit 49, dont la racine ſeroit plus grande que la racine 6 d'une unité, & ne laiſſeroit aucun reſte: donc ce qui ſe trouve de ſurplus après avoir tiré la racine, vaut néceſſairement moins qu'une unité de cette racine.

Cela ſuppoſé, ſi nous voulons tirer par approximation la raci-

ne quarrée de 67, qui n'eſt pas un quarré parfait, & qu'on demande que ce qui manquera à cette racine ſoit moindre que ſa dixiéme partie, nous ajouterons deux zeros à 67, ce qui ſera la même choſe que ſi nous avions multiplié 67 par 100 pour en faire une fraction $\frac{6700}{100}$, qui lui ſeroit égale. Or comme la racine de 100 eſt 10, il eſt sûr que ſi nous tirons la racine de 6700, ce qui viendra ſera des dixiémes; tirant donc cette racine, nous trouverons $\frac{81}{10}$ ou $8\frac{1}{10}$ pour la racine approchée 67, à laquelle il manquera moins d'un dixiéme pour être la véritable, parce que le reſte 139 ne vaut pas une unité de 81, ainſi que nous l'avons prouvé ci-deſſus.

67|00	81
8	10
3 00	
1 61	
139	

Et ſi on avoit demandé que ce qui auroit manqué à la racine eût été moindre qu'un centiéme, nous aurions ajouté quatre zeros, ce qui eſt la même choſe que ſi on multiplioit 67 par 10000 pour en faire une fraction $\frac{670000}{10000}$, & comme la racine de dix mille eſt cent, il eſt encore sûr que tirant la racine de 670000, ce qui ſeroit venu auroit été des centiémes; ainſi on auroit eu $\frac{818}{100}$ ou $8\frac{18}{100}$ pour la racine approchée de 67 à qui il auroit manqué moins d'un centiéme pour être la véritable, parce que le reſte 876 vaut moins qu'une unité de la racine 818.

67|00|00	818
8	100
3.00	
1 61.	
139.00	
16 28	
876	

Que ſi on vouloit approcher davantage, & que ce qui manqueroit à la racine fût moindre qu'un milliéme, on ajouteroit ſix zeros à 67, ce qui eſt la même choſe que ſi on le multiplioit par 1000000 pour en faire une fraction $\frac{67000000}{1000000}$ qui lui ſeroit égale, & comme la racine de 1000000 eſt 1000, il eſt viſible qu'en tirant la racine de 67000000 ce qui viendroit ſeroit des milliémes: donc on auroit $\frac{8185}{1000}$ ou $8\frac{185}{1000}$ pour la racine approchée de 67, à qui il auroit manqué moins d'un milliéme pour être la véritable, puiſque le reſte 5775 ne vaut pas une unité de la racine 8.85; & l'on continueroit de même en ajoutant toujours deux zeros de plus à meſure qu'on voudroit approcher de plus près de la véritable racine, ce qui iroit à l'infini, ſans qu'on pût jamais parvenir à la trouver exactement.

Et pour ſe convaincre qu'on en approcheroit toujours, on n'a qu'à jetter les yeux ſur ces trois différentes racines $8\frac{1}{10}$, $8\frac{18}{100}$ &

$8\frac{185}{1000}$, & l'on verra que la premiere eſt moindre que la ſeconde, la ſeconde moindre que la troiſiéme, & par conſéquent que cette racine devenant toujours plus grande à meſure qu'on fait de nouvelles opérations, ſans que pour cela ſon quarré ſoit épuiſé, elle approche de plus en plus de la véritable & ne lui eſt jamais égale.

67|00|00|00 | 8185	
8	1000
3.00	
1 61	
1 39.00	
16 28	
876.00	
1 63 65	
5775	

Pour abréger ces opérations, il ſuffit d'ajouter deux zeros à chaque reſte & un zero ſous la racine, & de continuer enſuite l'extraction. Ainſi pour tirer la racine de 28, j'ajoute deux zeros à ce nombre, & je mets 10 ſous la racine, parce que la racine des centiémes ſont des dixiémes; puis tirant la racine, je trouve 52, & un reſte 96.

28|00 | 52915	
5	10000
3.00	
1 02	
96.00	
10 49	
159.00	
105 81	
53 19.00	
10 58 25	
0 27 75	

J'ajoute 2 zeros à ce reſte & un ſous la racine, & écrivant par-deſſous le double de la racine 52, qui eſt 104, je trouve le troiſiéme caractére 9 de la racine avec un reſte 159.

J'ajoute à ce reſte 2 zeros & 1 ſous la racine, & doublant 529, je trouve le quatriéme caractére 1 de la racine, avec un reſte 5319.

J'ajoute encore 2 zeros à ce reſte & 1 ſous la racine, & doublant 5291, je trouve le cinquiéme caractére 5 de la racine, avec un reſte 2775, auquel j'ajouterois encore 2 zeros ſi je voulois continuer l'approximation, achevant le reſte comme auparavant.

On voit par là qu'il faut ajouter deux zeros au quarré quand on veut que le défaut de la racine ſoit moindre qu'un dixiéme, quatre quand ce défaut doit être moindre qu'un centiéme, ſix quand il doit être au-deſſous d'un milliéme, & ainſi de ſuite en augmentant toujours de deux zeros à meſure que le dénominateur de la racine augmente d'un zero ou devient dix fois plus grand; de ſorte que tout l'artifice de cette méthode conſiſte à ne

mettre ſous la racine que la moitié des zeros qu'on ajoute au quarré, & que ceux-ci, à chaque nouvelle opération, doivent être au nombre de deux.

Par rapport aux fractions dont il ſeroit propoſé d'extraire la racine par approximation, il faudroit ajouter au numérateur & au dénominateur un égal nombre de zeros, comme 2, 4, 6, &c. puis tirer la racine de l'un & de l'autre, & faire une fraction des deux racines, ſoit, par exemple la fraction $\frac{5}{7}$ dont on demande la racine approchée, j'ajoute ſix zeros au numérateur 5, & autant au dénominateur 7, afin que ce qui manquera à la racine de l'un & de l'autre ſoit moindre qu'un milliéme, & la fraction $\frac{5000000}{7000000}$ étant la même que $\frac{5}{7}$, puiſque tout a été multiplié également, je tire la racine quarrée de 5000000 & celle de 7000000 ſans rien écrire au-deſſous, & trouvant que l'une eſt 2236 & l'autre 2645, j'écris l'une ſous l'autre, & la fraction $\frac{2236}{2645}$ eſt la racine approchée de $\frac{5000000}{7000000}$ ou $\frac{5}{7}$; enſorte qu'il ne s'en faut pas d'une milliéme partie au numérateur & au dénominateur pour être la véritable.

$\frac{5}{7}$ $\frac{5000000}{7000000}$

5|00|00|00 | 2236		7|00|00|00 | 2645	
2		2	
1.00		3.00	
42		46	
16,00		24.00	
443		524	
271.00		304.00	
4466		5285	
304		3975	

Racine $\frac{2236}{2645}$.

PREMIER EXEMPLE.

Un quarré contient 9 toiſes quarrées, & l'on veut en faire un autre qui en contienne le double : on demande combien le côté de celui-ci contiendra de toiſes ?

Bien des perſonnes s'imaginent d'abord qu'en doublant le côté 3 du quarré 9, on aura le côté d'un quarré double; mais pour peu qu'elles y faſſent attention, elles s'apperçoivent bien-tôt qu'au lieu d'un quarré double, on en fait un quadruple; car en prenant

prenant le double de 3, on a 6, dont le quarré eſt 36, & 36 contient 4 fois 9, au lieu de 2 fois; pour réſoudre donc la queſtion propoſée, il faut doubler 9, ce qui fait 18 toiſes, & comme 18 toiſes n'eſt pas un quarré parfait, on réduira ces 18 toiſes en lignes, en les multipliant tout d'un coup par 864, parce que la toiſe contient 864 lignes de toiſe; & puis encore par 864, parce que la ligne de toiſe contient 864 lignes quarrées; ou ſi l'on veut, on multipliera 18 tout d'un coup par le quarré de 864.

```
  864
   18
 ------
 6912
 864
 ------
 15552 lignes de toiſes
   864
 ------
 62208
 93312
124416
--------
13436928

  864000 | 4 toiſes
 3665641 |
 -------
  209641
       6
 -------
 1257846

  864000 | 1 pied
 1257846 |
 -------
  393846
      12
 -------
  787692
  393846
 -------
 4726152
```

```
13|43|69|28|00|00|00 | 3665641
-------------------
 3
 ---
 4.43
   66
 ----
 47.69
  726
 -----
 413.28
  7325
 ------
 4703.00
  73306
 ------
 30464.00
  733124
 -------
 1139404.00
  7331281
 ---------
  4059119

  864000 |
 4726152 | 5 pouces
 -------
  406152
      12
 -------
  812304
  406152
 -------
 4873824

  864000 |
 4873824 | 5 lignes
 -------
  553824
```

Enſuite on ajoutera au produit 6 zeros, afin que ce qui manquera à la racine ſoit moindre qu'un milliéme, & tirant la racine, on aura 3665641 milliémes de lignes; & pour les réduire en toiſes, on multipliera 864, qui eſt le contenu de la toiſe, par 1000, ce qui fera 864000; & par-là le diviſeur ſe trouvera autant agrandi que la racine, c'eſt-à-dire, que l'un & l'autre ſeront des milliémes de lignes. Ainſi on diviſera la racine par 864000, & évaluant les fractions, on aura 4 toiſes, 1 pied, 5 pouces, 5 lignes, $\frac{513824}{864000}$ ou $\frac{641}{1000}$ pour le côté approché du quarré double de 9, enſorte que ce côté ne ſera pas au-deſſous du véritable d'une milliéme partie de ligne.

Et ſi l'on multiplie ce côté par lui-même, on trouvera que le produit eſt 17 toiſes, 5 pieds, 11 pouces, 11 lignes, & une fraction qui vaut à très-peu de choſe près une ligne; & par conſéquent ce quarré approche de bien près du quarré 18, qui eſt le quarré propoſé.

	4 toiſ.	1 p.	5 pouc.	5 lig.	$\frac{641}{1000}$				
	4 toiſ.	1 p.	5 pouc.	5 lig.	$\frac{641}{1000}$				
	16 toiſ.	5 p.	9 pouc.	10 lig.	$\frac{564}{1000}$	ou	$\frac{487296000}{864000000}$		
pour 1 pied	0 toiſ.	4 p.	2 pouc.	10 lig.	$\frac{5641}{5000}$	ou	$\frac{81230400}{864000000}$		
pour 4 pouc.	0 toiſ.	1 p.	4 pouc.	11 lig.	$\frac{11641}{18000}$	ou	$\frac{15876800}{864000000}$		
pour 1 pouc.	0 toiſ.	0 p.	4 pouc.	2 lig.	$\frac{61641}{72000}$	ou	$\frac{7876920}{864000000}$		
pour 4 lignes	0 toiſ.	0 p.	1 pouc.	4 lig.	$\frac{209641}{216000}$	ou	$\frac{838564000}{864000000}$		
pour 1 ligne	0 toiſ.	0 p.	0 pou.	4 lig	$\frac{209641}{864000}$	ou	$\frac{209641000}{864000000}$		
pour $\frac{641}{1000}$	0 toiſ.	0 p.	0 pouc.	2 lig.			$\frac{62267581}{864000000}$		
	17 toiſ.	5 p.	11 pouc.	11 lig.			$\frac{860890881}{864000000}$		

Et ſi le quarré dont on voudroit avoir le double avoit des fractions de ligne, comme par exemple le quarré 5 toiſes, 4 pieds, 7 pouces, 8 lignes $\frac{1}{6}$, on prendroit le double de ce quarré, qui ſeroit 11 toiſes, 3 pieds, 3 pouces, 4 lignes $\frac{1}{3}$, & on le réduiroit en tiers de ligne; & comme ces lignes contiennent chacune 864 lignes quarrées, on multiplieroit 864 par 3, pour avoir des tiers de ligne quarrée; enſuite on multiplieroit les tiers de ligne de toiſe par les tiers de ligne quarrée, & on auroit des neuviémes de ligne quarrée. On ajouteroit 6 zeros à ce nombre, afin que le défaut de la racine fût moindre qu'un milliéme, & l'on tireroit

la racine, qui ſeroit des tiers de ligne multipliés par 1000, c'eſt-à-dire, des trois milliémes de ligne. Ainſi pour réduire cette racine, on multiplieroit 864, qui eſt le contenu de la toiſe, par 3000, & diviſant la racine par ce produit, on trouveroit, après avoir évalué les fractions, 3 toiſes, 2 pieds, 4 pouces, 7 lignes & un peu plus d'une moitié de ligne pour le côté du quarré.

11 toiſes 3 pieds 3 pouces 4 lignes $\frac{1}{7}$.

6

66

3

69 pieds

12

138

693

831 pouces

12

1662

8314

9976 lignes

3

29928

1

29929 tiers de lignes de toiſe

2592

59858

269361

149645

59858

77575968 neuviémes de lignes quarrées.

864

3

2592 tiers de lignes quarrées

77|57|59|68|00|00|00 | 8807722

8

13.57

1 68

13.59

17 60

13 59.68

1 76 07

1 27 19.00

17 64 47

3 88 71.00

1 76 15 42

36 40 16.00

17 61 54 42

1 17 07 16

2592000 | 8807722 | 3 toiſes

1031722

6

6190332

2592000 | 2 pieds
6190332 |

1006332
12

2012664
1006332

12075984

2592000 | 4 pouces
12075989 |

1707989
12

3415978
1707989

20495868

2592000 | 7 lignes
20495868 |

2351868

SECOND EXEMPLE.

Un jardin en forme de quarré long contient 160 *toiſes quarrées, & ſa largeur eſt de* 10 *toiſes. Le propriétaire voudroit le rendre parfait, en cédant à ſes voiſins ſur ſa longueur autant de terrein qu'ils lui en fourniront pour la largeur; mais il veut que ce quarré ſe faſſe de telle façon qu'il ne ſoit point obligé de rien acheter pour le rendre parfait: on demande de combien de toiſes ſera le côté de ce jardin?*

Nous avons déja réſolu cette queſtion ci-deſſus, en ſuppoſant que le maître du jardin n'étoit pas fâché d'acheter du terrein, pourvû que le côté du quarré eût un nombre complet de toiſes ſans fraction. A préſent nous ſuppoſons qu'il s'embarraſſe fort peu que le côté de ſon jardin aïe des fractions de toiſe, pourvû qu'il n'achete rien; c'eſt pourquoi il faut que nous tâchions de faire un quarré avec le terrein qu'il a, ſeulement en échangeant, & ſans qu'il acquiére rien de nouveau. Pour cela je multiplie 160 par 864, pour avoir des lignes de toiſe, & puis encore par 864, pour avoir des lignes quarrées. J'ajoute au produit 6 zeros, afin que le défaut de la racine ſoit au-deſſous d'un milliéme; puis tirant la racine, j'ai des milliémes de lignes; & pour réduire ces milliémes en toiſes, je multiplie 864, qui eſt le contenu de la toiſe par 1000, & je diviſe la racine par le produit, ce qui me donne après l'évaluation des fractions, 12 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes $\frac{811}{1000}$ pour le côté du jardin.

Or comme ce jardin avoit déja 10 toiſes de largeur, il s'enſuit que les deux voiſins enſemble lui fourniront 2 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes & un peu plus de $\frac{4}{1}$ de largeur ſur 12 toiſes, 3

pieds, 10 pouces, 8 lignes & un peu plus de $\frac{4}{5}$ de longueur ; & de même de 16 toiſes de longueur que le jardin avoit, retranchant 12 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes & un peu plus de $\frac{4}{5}$, il reſtera 3 toiſes, 2 pieds, 1 pouce, 3 lignes & $\frac{1}{5}$ de longueur ſur 10 toiſes de largeur que le propriétaire cédera aux voiſins ; de ſorte qu'il ne débourſera rien, & que ce qu'il cédera d'un côté vaudra préciſément ce qu'on lui donnera de l'autre ; comme on peut voir aiſément, en multipliant d'une part la largeur par la longueur de ce que les voiſins donneront, & de l'autre la longueur par la largeur de ce qu'il cédera ; car l'un ou l'autre de ces produits fera 33 toiſes, 3 pieds, 0 pouce, 8 lignes plus ou moins très-peu de choſe.

160 toiſes
864

640
960
1280

138240 lignes de toiſes
864

552960
829440
1105920

119439360 lignes quarrées

864000 | 109288 31 | 12 toiſ.

228883.1

560831
6

3364986

1|19|43|93|60|00|00|00 | 109288 31

1

19
20

19.43
209

62.93
2182

1929.60
21848

181 76.00
21 85 68

6 90 56.00
2 18 57 63

34 83 11.00
21 85 76 61

12 97 34 39

```
 864000 |
3364986 | 3 pieds
772986
    12
1545972
 772986
9275832 pouces
```

```
 864000 |
9275832 | 10 pouces
635832
635832
    12
1271664
 635832
7629984
```

```
 864000 |
7629984 | 8 lignes
717984
```

Racine 12 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes $\frac{717984}{864000}$ ou $\frac{831}{1000}$.

Au reſte ſi on vouloit s'aſſurer d'avoir bien fait l'extraction de la racine, & qu'on voulût éviter l'embarras des fractions qu'on ne manque pas de trouver lorſqu'on veut faire le quarré de la racine, après l'avoir réduite en toiſes, pieds, pouces & lignes de toiſe, ainſi que nous avons fait dans l'exemple précédent, on prendroit la racine ſans la réduire, & on la multiplieroit par elle-même, ce qui donneroit des cent milliémes de lignes quarrées; enſuite pour réduire ce produit en toiſes quarrées, on multiplieroit 864, qui eſt le contenu de la toiſe courante, par 864, & le produit 746496 ſeroit le contenu de la toiſe quarrée en lignes quarrées; on ajouteroit 6 zeros à ce produit, pour en faire des cent milliémes, & l'on divi-

```
 10928831
 10928831
 10928831
 32786493
 87430648
 87430648
 21857662
 98359479
109288310
119439347026561
   864
   864
  3456
 51840
 69120
746496
```

ſeroit enſuite le quarré de la racine par le diviſeur 746496000000, ce qui donneroit 159 toiſes ; puis on évalueroit la fraction en multipliant ſon numérateur par 6, pour avoir des pieds de toiſe, & la diviſion donneroit 5 pieds avec une fraction, qui étant évaluée, donneroit 11 pouces, & une autre fraction, dont l'évaluation donneroit encore 11 lignes, avec une derniere fraction, qui approcheroit bien près de la valeur d'une ligne ; de ſorte qu'à très-peu de choſe près, ce quarré vaudroit 160 toiſes.

```
74649600000 0 | 159 toiſes
11943934702656 1
-----------------
447897470265.6
-----------------
746494702656.1
-----------------
74648302656 1
            6
-----------------
4478898159366.
```

```
746496000000 | 5 pieds
447889815936 6
---------------
74641815936 6
           12
---------------
1492836318732
74641815936 6
---------------
895701791239 2
```

```
74649600000 0 | 11 pouces
89570179123 92
---------------
1493057912392.
---------------
74556191239 2
          12
---------------
1491123824784
74556191239 2
---------------
8946742948704
```

```
74649600000 0 | 11 lignes
89467429487 04
---------------
1481782948704.
---------------
735286948704
```

De l'extraction de la Racine cubique.

XXII. Quand on multiplie un nombre deux fois ſucceſſivement par lui-même, ou, ce qui eſt la même choſe, quand on multiplie un quarré par ſa racine, le produit s'appelle *cube*, & le nombre qui le produit, *racine cubique*. 3 multiplié par 3 fait 9, & 9 multiplié par 3 fait 27 ; 27 eſt un cube, dont la racine eſt 3. Et ainſi de tous les autres nombres.

La Table qu'on voit ici contient dans son premier rang paralléle les neuf premiers nombres, & dans le second leurs cubes, dont il faut se rendre la connoissance familiere, pour extraire plus facilement les racines des nombres plus composés.

Racines	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cubes.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Avant d'en venir à l'opération, considérons comment se forme un cube, de même que nous avons considéré ci-dessus comment se formoit un quarré. Supposons donc le nombre 23 qu'il faille cuber, je multiplie ce nombre par lui-même, en écrivant tout sans rien retenir, ce qui me donne les quatre produits partiaux 9, 6, 6, 4, lesquels joints ensemble font le quarré de 23. Je multiplie de la même façon ces quatre produits par 23, & j'ai huit produits partiaux, dont le premier à gauche 8 est le cube du premier caractére 2 de la racine 23; ensuite viennent trois autres produits 12, 12, 12, dont deux viennent de 6 multiplié par 2, & le troisiéme de 4 multiplié par 3 : or 6 venoit de 2 multiplié par 3; ainsi 12 vient de 2 multiplié par 2, & puis par 3, c'est-à-dire, du quarré de 2, qui est le premier caractére de la racine multiplié par 3, qui est le second; & de même 4 multiplié par 3, est le quarré du premier multiplié par le second. Donc ces trois produits 12, 12, 12 sont trois quarrés du premier caractére multipliés par le second, ou, ce qui revient au même, ils sont le triple du quarré du premier caractére multiplié par le second; car ce quarré étant 4, & le triple de 4 étant 12, 12 multiplié par 3 fait 36, de même que trois fois 12 font 36.

```
        23
        23
      ----
         9
         6
         6
         4
      ----
        23
      ----
        27
        18
        18
     1  2
        18
     1  2
     1  2
     8
      ----
     12 | 167 |
```

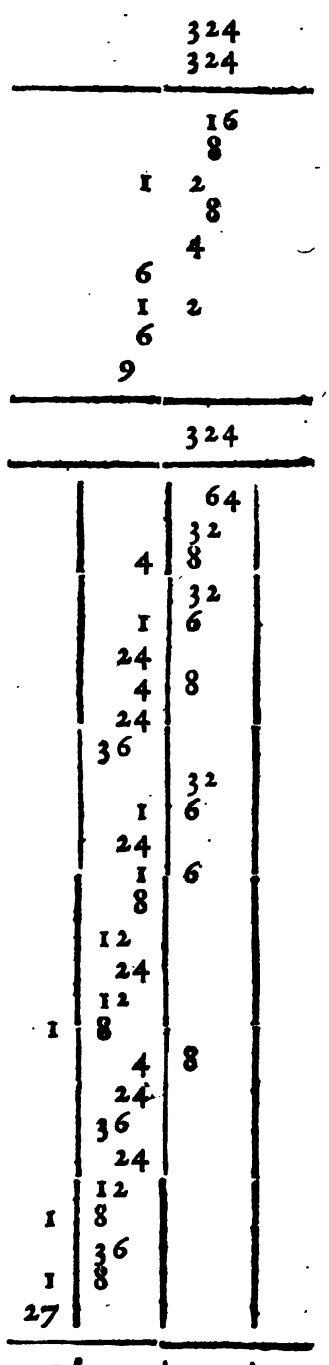
Après ces trois produits viennent trois autres 18, 18 & 18, dont deux viennent de 6 multiplié par 3, & le troisiéme, de 9 multiplié par 2 : or comme 6 venoit déja de 3 par 2, 18 dans les deux premiers produits vient donc de 3 multiplié par 3, & puis par 2, c'est-à-dire, du quarré du second caractére 3 multiplié par le premier

mier 2; & de même 9 multiplié par 2 eſt le quarré du ſecond multiplié par le premier. Ainſi ces trois produits 18, 18, 18 ſont trois quarrés du ſecond caractére multipliés par le premier, ou, ce qui revient au même, ils ſont le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier.

Enfin le dernier produit eſt 27, qui eſt le cube du dernier caractére; par conſéquent tout cube dont la racine a deux caractéres, contient 1°. le cube du premier; 2°. le triple du quarré du premier multiplié par le ſecond; 3°. le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier; 4°. le cube du ſecond.

Et ſi je tranche les caractéres de ce cube de trois en trois de droite à gauche, il y aura deux tranches, & je verrai que le cube du premier caractére ſera immédiatement à gauche de la ſeconde tranche; que le triple de ſon quarré multiplié par le ſecond ſera en partie à gauche, & en partie à droite de cette tranche; que le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier ſera entre les deux tranches; & enfin que le cube du troiſiéme ſera immédiatement à gauche de la premiere tranche.

Et ſi je fais de la même façon le cube du nombre 324, dont la racine a trois caractéres, & que je le coupe par tranches de la même façon, je trouverai que ce cube aura trois tranches, c'eſt-à-dire, autant que ſa racine a de caractéres; que le cube 27 du premier caractére ſera immédiatement à gauche de la troiſiéme tranche; qu'enſuite viendront trois produits 18, 18, 18, chacun deſquels eſt le quarré 9 du premier caractére multiplié par le ſecond 2; & qu'ainſi ces trois produits ſeront le triple du quarré du pre-



mier multiplié par le ſecond ; qu'après ceux-ci en viendront trois autres 12, 12, 12, qui ſont le triple du quarré 4 du ſecond multiplié par le premier caractére 3 ; qu'après eux viendra le produit unique 8, qui eſt le cube du ſecond.

Après cela viendront trois produits 36, 36, 36, qui ſont le triple du quarré 9 du premier multiplié par le troiſiéme 4 ; trois autres 16, 16, 16, qui ſont auſſi le triple du quarré 4 du ſecond multiplié par le troiſiéme 4 ; & encore ſix autres 24, qui ſont ſix fois le premier 3 par le ſecond 2, multipliés par le troiſiéme 4 ; de ſorte que ces douze produits font enſemble le triple du quarré des deux premiers multipliés par le troiſiéme : car nous avons vû que pour faire le quarré de deux caractéres, il faut le quarré du premier, deux fois le premier par le ſecond, puis le quarré du ſecond. Ainſi comme nous avons le triple d'un quarré de cette eſpéce, il faut auſſi ſix produits du double du premier par le ſecond.

Viendront enſuite trois produits 48, 48, 48, qui ſont le triple du quarré du troiſiéme multiplié par le premier ; ; trois autres 32, 32, 32, qui ſont le triple du même quarré 16 par le ſecond 2 ; & ces ſix produits feront enſemble le triple du quarré 16 par les deux premiers 3 & 2 ; enfin le dernier produit 64 ſera le cube du troiſiéme caractére, & ce cube ſera à gauche de la premiere tranche, de même que le cube 8 du ſecond caractére ſera immédiatement à gauche de la ſeconde, & le cube 27 à gauche de la troiſiéme, tandis que le triple du quarré du premier par le ſecond, & le triple du quarré du ſecond par le premier ſeront en partie à gauche, & en partie à droite de la troiſiéme tranche ; & le triple du quarré des deux premiers par le quatriéme, comme auſſi le triple du quarré du quatriéme par les deux premiers ſeront en partie à gauche, & en partie à droite de la ſeconde.

De-là je connois que tout cube dont la racine a trois caractéres contient 1°. le cube du premier ; 2°. le triple du quarré du premier multiplié par le ſecond ; 3°. le triple du quarré du ſecond multiplié par le premier ; 4°. le cube du ſecond ; 5°. le triple du quarré des deux premiers par le troiſiéme ; 6°. le triple du quarré du troiſiéme par les deux premiers ; 7°. enfin le cube du troiſiéme.

De-là j'infére encore que ſi la racine contenoit un plus grand nombre de caractéres, je trouverois de la même façon le triple du quarré des trois premiers par le quatriéme, le triple du quarré du quatriéme par les trois premiers, le cube du quatriéme ; & ainſi de ſuite à l'infini.

Cela ſuppoſé ; ſi l'on me demande quelle eſt la racine cubique du nombre 40061688 ; je tranche ce nombre de trois en trois caractéres de droite à gauche, & voiant qu'il y a trois tranches, je connois que la racine aura trois caractéres.

Et je dis : Tout nombre cube contient immédiatement à gauche de ſa derniere tranche le cube de ſon premier caractére. Je cherche donc quel eſt le plus grand cube contenu dans 40, & trouvant que ce cube eſt 27, dont la racine eſt 3, j'écris 3 à la racine, & 27 ſous 40, & ſouſtraïant de 40, 27, le reſte eſt 13, que j'écris au-deſſous. Je mets un point après 13, pour marquer la place de la tranche, & j'abaiſſe les trois caractéres 001, compris entre la troiſiéme tranche & la ſeconde.

40|001|688	342
27	
13.001	108
x 7	144
12304	64
697.688	12304
3 x 8	
697688	6936
000000	408
	8
	697688

Je dis enſuite : Tout cube contient partie à gauche, & partie à droite de ſa derniere tranche le triple du quarré du premier caractére de ſa racine multiplié par le ſecond : je ne connois pas ce ſecond ; mais ſi je prens le quarré de 3, qui eſt 9, & qu'après l'avoir multiplié par 3, ce qui fait 27, je diviſe 130 par 27, le quotient me donnera le ſecond caractére de la racine. J'écris donc 27 ſous 130, enſorte que le dernier caractére 27 ſoit en-delà de la tranche ; & faiſant la diviſion, je trouve 4, que j'écris à la racine après le premier caractére 3.

Je multiplie 27 par 4, le produit eſt 108, que j'écris à part. Puis je dis : Le cube contient encore entre ſa derniere tranche & celle qui vient après, le triple du quarré du ſecond caractére de ſa racine multiplié par le premier ; je prens donc le quarré de 4, qui eſt 16, je le multiplie par 3, pour en avoir le triple, qui eſt 48 ; puis multipliant 48 par le premier caractére 3 de la racine, j'ai le produit 144, que j'écris à part ſous le produit 108, en avançant d'un rang à droite, parce que j'ai obſervé dans la formation de ce produit avance de la même façon : enfin je prens du cub 64 du ſecond caractére 4, parce que le cube contient im- le cube

médiatement à gauche de ſa ſeconde tranche le cube du ſecond caractére de ſa racine, & j'écris 64 ſous les deux produits précédens, en avançant de même d'un rang à droite.

Je fais la ſomme 12304 de ces trois produits, & je l'écris ſous 13001, ſans faire attention au diviſeur 27, que j'efface. Je retranche 12304 de 13001, & le reſte eſt 697.

Je mets un point après le dernier caractére 7 de ce reſte, pour marquer le lieu de la ſeconde tranche, & j'abaiſſe les trois caractéres 688 contenus entre la ſeconde & la premiere tranche; & je dis: Le cube contient encore en partie à gauche, & en partie à droite de ſa ſeconde tranche, le triple du quarré des deux premiers caractéres de ſa racine multiplié par le troiſiéme, que je ne connois pas encore. Je fais donc le quarré de 34, qui eſt 1156, je le multiplie par 3, pour en avoir le triple 3468, & j'écris 3468 ſous le dernier reſte, de ſorte que le dernier caractére 8 ſoit endelà de la tranche ſous le caractére 6. Je diviſe 6976 par 3468, & le quotient 2 eſt le troiſiéme caractére de la racine que je cherche; ainſi j'écris 2 après 34, & multipliant 3468 par 2, j'écris à part le produit 6936; puis je prens le triple 12 du quarré 4 du troiſiéme caractére 2, je le multiplie par 34, parce que le cube contient auſſi ce triple multiplié par les deux premiers caractéres, & j'écris le produit 408 ſous le précédent, en avançant d'un rang à droite; je prens auſſi le cube de 2, qui eſt 8, je l'écris ſous les deux produits précédens, en avançant d'un rang à droite.

Je fais la ſomme 69788 des deux produits & de ce dernier cube, & je l'écris ſous le reſte 69788, ſans faire attention au diviſeur 3468, que j'efface. Je ſouſtrais 69788 de 69788, & il ne reſte rien. Et comme le cube ne contient plus de tranches, je connois que la racine cubique de 40001688 eſt 342; & en effet multipliant 342 par 342, le produit eſt 116964, lequel multiplié de nouveau par 342, donne 40001688, qui eſt le cube propoſé.

Pour faire avec netteté ces opérations, il faut avoir devant ſoi un autre papier, ſur lequel on écrit à part les quarrés, dont il faut prendre le triple, & les triples de ces quarrés multipliés par les caractéres qui doivent les multiplier; car autrement on s'offuſque, & l'on court riſque de ſe tromper, ſurtout lorſque les diviſions donnent des quotiens trop grands, qu'il faut enſuite diminuer; ce que l'on ne connoît qu'après avoir fait ces différens produits dont je viens de parler; car alors il ſe trouve que leur ſomme eſt plus grande que le reſte dont elle doit être retranchée,

ainſi qu'on va voir dans l'opération ſuivante, où je me propoſe le cube 106189863 92.

Je tranche ce nombre de trois en trois caractéres, & trouvant quatre tranches, je connois que ſa racine aura quatre caractéres.

Je prens donc le cube contenu dans 10, & ce cube eſt 8, que j'écris ſous 10, & ſa racine 2 pour le premier caractére de la racine. Je retranche 8 de 10, & le reſte eſt 2. Je mets un point après 2, & j'abaiſſe les trois caractéres 618 contenus entre la quatriéme tranche & la troiſiéme.

Je prens le triple 12 du quarré 4 du ſecond caractére 2, & diviſant 26 par 12, le quotient eſt 2, qui devroit être par conſéquent le ſecond caractére de la racine: mais ſi je multiplie 12 par 2, ce qui fait 24, que j'écrirai à part; que je prenne encore 24 pour le triple du quarré du ſecond caractére 2 multiplié par le premier 2, puis le cube 8 du ſecond caractére, je trouve que la ſomme eſt 2648, qui eſt plus grande que 2618, dont il faudroit la retrancher. C'eſt pourquoi au lieu de 2, je marque 1 à la racine. Je multiplie 12 par 1, ce qui fait 12, que j'écris à part. Je prens le triple 3 du quarré de 1, je le multiplie par le premier caractére 2, ce qui fait 6, que j'écris à part ſous 12, en avançant d'un rang à droite; je prens encore le cube 1 du ſecond caractére, que j'écris ſous 6, en avançant d'un rang; puis faiſant la ſomme, je trouve 1261, que je tranſporte ſous 2618, ſans faire attention au diviſeur 12, que j'efface. Je ſouſtrais 1261 de 2618, & le reſte eſt 1357.

```
  342
  342
 ----
  684
 1368
 1026
 ----
116964
  342
 ----
233928
467856
350892
 ------
40001688
```

Je mets un point après ce reſte, & j'abaiſſe les trois caractéres 986, qui ſont entre la troiſiéme & la ſeconde tranche. Je fais le quarré des deux premiers caractéres 21, & ce quarré eſt 441, dont le triple eſt 1323, que j'écris ſous 13579; & faiſant la diviſion, le quotient eſt 9, qui eſt le troiſiéme caractére de la racine. Je multiplie 1323 par 9, ce qui donne 11907, que j'écris à part. Je prens le triple 243 du quarré 81 du troiſiéme caractére 9, & je le multiplie par les deux premiers 21, ce qui me donne 5103, que j'écris à part ſous le produit précédent, mettant encore par-deſſous le cube 729 du troiſiéme caractére; & faiſant la ſomme 1242459, je la tranſporte ſous 1357986, effaçant le diviſeur 1323; je retranche

1242459 de 1357986, & le reſte eſt 115527, après lequel je mets un point.

10|618|986|392 | 2198

8

2.618
2 2
1 261

1 357.986
1 2 3
1 242 459

115 527.392
1 4 3 8 8 3
115 527 392

000 000 000

24
24
8

2648 excédant.

12
6
1

1261 bon.

11907
5103
729

1242459

1151064
42048
512

115527392

J'abaiſſe les trois derniers caractéres 392 qui ſont entre la ſeconde & la premiere tranche, & prenant le triple 143883 du quarré des trois premiers caractéres 219 de la racine, j'écris ce triple pour diviſeur, & le quotient 8 eſt le quatriéme caractére que je cherche. Je multiplie 143883 par 8, & j'écris à part le produit 1151064. Je prens de même le triple du quarré de 8, que je multiplie par les trois premiers caractéres, & j'écris à part le produit 42048, ſous lequel j'écris le cube 512 du caractére 8; & faiſant la ſomme 115527392, je la tranſporte ſous 115527392; effaçant le diviſeur, & retranchant l'un de l'autre, il ne reſte rien. Par conſéquent la racine cubique que je cherchois eſt 2198.

PREMIER EXEMPLE.

On a fait une citerne de forme cubique, qui contient 46656 pieds cubiques d'eau, quelles ſont ſes dimenſions, c'eſt-à-dire, ſa longueur, ſa largeur & ſa profondeur?

Je tire la racine cubique de 46656, & cette racine eſt 36; ainſi

la citerne a 36 pieds de hauteur, 36 de largeur, & 36 de longueur.

Que si l'on demandoit combien 46656 pieds cubiques d'eau font de muids, il faut savoir que le muid de la mesure de Paris contient 14400 pouces cubiques; & comme le pied cubique contient 1728 pouces cubiques, on multiplieroit 46656 pieds cubiques par 1728, ce qui donneroit 80621568 pouces cubiques pour le contenu de la citerne; & ce contenu étant divisé par 14400 pouces que le muid contient, donneroit 5598 muids, & une fraction $\frac{10568}{14400}$, que l'on pourroit évaluer ou en multipliant le numérateur par 3, parce que le muid contient 3 feüillettes, & divisant par 14400; ou en le multipliant par 300, parce que le muid contient 300 pintes, & divisant par 14400, ce qui donneroit 216 pintes, ou 2 feüillettes & 16 pintes.

46656 | 36
27
19.656
27
19656
00 000

162
324
216
19656

46656 pieds cubiques.
1728

373248
93312
326592
46656

80621568

14400
80621568 | 5598 muids

86215
14215.6
12556.8
10368
300
3110400

14400
3110400 | 216 pintes, ou deux feüillettes & seize pintes.
2304.0
8640.0
0000

Ainsi la citerne contiendroit 5598 muids, 216 pintes ou 2 feüillettes & 16 pintes.

SECOND EXEMPLE.

Un homme a un bloc de marbre qui contient 274697 pouces cubiques ; mais comme ce bloc n'a pas ſes trois dimenſions égales, il propoſe à un marbrier de le changer contre un autre de figure cubique qui ne ſoit ni moindre, ni plus grand que le ſien qu'autant qu'il le faudra pour que le côté de ce cube contienne un certain nombre de pouces ſans fraction, & ils conviennent enſemble que ſi le marbre que l'ouvrier donnera excéde, il païera le ſurplus à raiſon de 10 ſols par pouce cubique ; & ſi au contraire il ſe trouve moindre, le marbrier lui donnera 5 ſols pour chaque pouce cubique qui manquera. On demande ce que l'un ou l'autre ſera obligé de païer ?

Pour réſoudre cette queſtion, il faut auparavant ſavoir que ſi l'on prend les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. & leurs cubes 1, 8, 27, &c. ces cubes ſe ſurpaſſeront tous d'une même façon ; c'eſt-à-dire, que le ſupérieur ſurpaſſera celui qui lui eſt immédiatement inférieur du triple de la racine de l'inférieur, multiplié par la racine du ſupérieur, plus l'unité. Ainſi 27 ſurpaſſe 8 de 19, & 19 eſt égal au triple de 2, qui eſt 6 multiplié par 3, ce qui fait 18, plus l'unité, ce qui fait 19. Or 2 eſt la racine du cube 8, & 3 eſt celle du cube 27. De même le cube 125 ſurpaſſe le cube 64 de 61, & 61 eſt égal à trois fois 4, ce qui fait 12, multiplié par 5, ce qui fait 60, plus l'unité, ce qui fait 61. Et ainſi des autres.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.

Cela ſuppoſé, je tire la racine de 274697, en diſant : Le plus grand cube contenu dans 274 eſt 216, dont la racine eſt 6 ; j'écris 6 à la racine, & retranchant 216 de 274, le reſte eſt 58 ; j'abaiſſe les trois autres caractéres 697, & prenant le triple 108 du quarré 36 du caractére 6, je trouve que le ſecond caractére de la racine eſt 5. Ainſi je multiplie 108 par 5, ce qui fait 540, que j'écris à part ; je prens auſſi le triple du quarré de 5, que je multiplie par 6, ce qui fait 450, que j'écris ſous 540, & pardeſſous je mets le cube 125 du caractére 5 ; enſuite faiſant la ſomme

274 | 697 | 65		
216		
58.697		540
108		450
58625		125
72		58625

me 58625, je la retranche de 58697, & je trouve qu'il reste 72; ce qui me fait voir que ce nombre n'eſt pas cubique.

Or puiſque le nombre 274697 ſurpaſſe de 72 le cube dont la racine eſt 65, il eſt évident que ſi le marbrier donne un cube moindre que le bloc, ce ne peut être que le cube de 65, parce que ce cube eſt le plus grand qui ſoit contenu dans 274697, attendu que l'excédant de ce nombre n'eſt pas ſuffiſant pour former le cube de 66, & qu'ils ſont convenus enſemble qu'il n'en donneroit pas un moindre. Donc ce marbrier païera 18 liv. pour les 72 pouces que le bloc a de plus.

72 liv.
0 liv. 5 ſols
18 liv.

Mais ſi le marbrier donne un cube plus grand que le bloc, je triplerai la racine 65, ce qui fera 195, je la multiplierai par 66, qui eſt le nombre immédiatement ſupérieur à 65, & le produit ſera 12870, auquel ajoutant l'unité, j'aurai 12871, qui eſt le nombre qu'il faudroit ajouter au cube de 65. Mais comme le nombre 274697 ſurpaſſe de 72 le cube de 65, je retranche 72 de 12871, & le reſte eſt 12799, que j'ajoute au nombre 274697, pour avoir le cube de 66. Et en effet tirant la racine cubique de la ſomme 287496, je trouve que la racine eſt 66. Donc le cube que le marbrier donnera ne pourra contenir davantage de 287496 pouces cubiques, ſelon les conventions. Et comme ce nombre ſurpaſſe 274697 de 12799 pouces, multipliant cet excès par 10 ſols, on aura 6399 liv. 10 ſols qu'il devra recevoir.

65
3
195
66
1170
1170
12870
1
12871
72
12799 reſte

274697
12799
287496

287|496 | 66
216
71.496
208
71 496
00 000

648
648
216
71496

Nous dirons plus bas comment il auroit fallu faire ſi le maître du bloc ne s'étoit pas mis en peine que le côté du cube eût eu des fractions.

On obſervera en paſſant que ſi après avoir tiré la racine cubique d'un nombre, il reſte quelque choſe, ce reſte eſt

toujours moindre que le triple de la racine trouvée multiplié par la racine d'un cube immediatement supérieur plus l'unité ; & par conſequent que ce reſte ne peut jamais valoir une unité.

12799
0 liv. 10 ſols
6399 liv. 10 ſols

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un Seigneur a fait faire devant ſon Château une terraſſe qui contient 162000 pieds cubiques. Sa largeur eſt double de la hauteur, & ſa longueur eſt triple de cette même hauteur. On demande quelles ſont ſes dimenſions ?

Je ſuppoſe que ſa hauteur eſt 1 pied, la largeur ſera par conſequent 2, & la longueur 3 ; & multipliant ces trois dimenſions enſemble, j'ai 6, qui repréſente une terraſſe faite dans les mêmes proportions que la terraſſe 162000. Et je fais réflexion que ſi l'on faiſoit un cube dont le côté fût la hauteur 1 de la terraſſe 6, cette terraſſe ſeroit auſſi grande par rapport à ce cube, que la terraſſe 162000 par rapport au cube que l'on feroit ſur ſa hauteur. Ainſi je dis par régle de trois : 6 eſt à 1 comme 162000 au cube que je cherche. Et la régle me donne 27000, qui eſt le cube de la hauteur. Tirant donc la racine cubique de 27000, je trouve 30 pour la hauteur.

1
2
2
3
6

6. 1. 162000 Réponſe 27000

27000 | 30 hauteur.
27
0.000
2.7
0 000

30 hauteur
60 largeur
1800
90 longueur
162000 terraſſe.

Donc la largeur ſera 60, & la longueur 90. Et en effet multipliant ces trois dimenſions enſemble, le produit eſt 162000, ainſi qu'il étoit propoſé.

De l'extraction de la racine cubique des fractions.

XXIII. Pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faut extraire la racine du numérateur & celle du dénominateur, & faire une fraction des deux racines trouvées. Ainſi pour ex-

traire la racine de $\frac{27}{64}$, on tirera la racine de 27, qui eſt 3, & celle de 64, qui eſt 4, & la fraction $\frac{3}{4}$ ſera la racine de $\frac{27}{64}$; car $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{4}$ font $\frac{9}{16}$, & $\frac{9}{16}$ par $\frac{3}{4}$ font $\frac{27}{64}$. De même pour extraire la racine de $\frac{8}{125}$, on tirera la racine de 8, qui eſt 2, & celle de 125, qui eſt 5, & la fraction $\frac{2}{5}$ ſera la racine cubique de $\frac{8}{125}$; car $\frac{2}{5}$ par $\frac{2}{5}$ font $\frac{4}{25}$, & $\frac{4}{25}$ par $\frac{2}{5}$ font $\frac{8}{125}$; & ainſi des autres.

Et pour extraire la racine cubique d'un nombre compoſé d'entier & fraction, on réduira l'entier en fraction, & l'on tirera la racine, comme il vient d'être dit. Pour extraire la racine de $614\frac{1}{8}$, on réduira 614 en huitiémes, ce qui fera $\frac{4913}{8}$; enſuite on tirera la racine de 4913, qui eſt 17, & la racine de 8, qui eſt 2, & la fraction $\frac{1}{2}$, ou $8\frac{1}{2}$ ſera la racine cubique de $614\frac{1}{8}$. Et en effet multipliant $8\frac{1}{2}$ par $8\frac{1}{2}$, on a $72\frac{1}{4}$, & multipliant $72\frac{1}{4}$ par $8\frac{1}{2}$, on a $614\frac{1}{8}$, qui eſt le nombre propoſé.

On obſervera dans l'extraction que je viens de faire, que quoique le diviſeur 3 ſoit naturellement 9 fois dans 39, & au-delà même de 9 fois, il a cependant fallu le rabaiſſer juſqu'à ne le faire entrer que 7 fois pour trouver une ſomme 3913, qui ne fût pas au-deſſus du reſte 3913.

De même pour extraire la racine de $1103\frac{10}{27}$, on réduira 1103 en vingt-ſeptiéme, ce qui joint à la fraction, fera $\frac{29791}{27}$; après quoi on tirera la racine de 29791, qui eſt 31, & celle de 27, qui eſt 3, & la fraction $\frac{31}{3}$, ou $10\frac{1}{3}$ ſera la racine cherchée. Et en effet multipliant $10\frac{1}{3}$ deux fois ſucceſſivement par lui-même, on trouvera $1103\frac{10}{27}$.

$614\frac{1}{8}$
8
4912
1
4913

4913 | 17 ou $8\frac{1}{2}$
1 2
3913 2P
8 247
3913 343
0000 3913

$8\frac{1}{2}$
$8\frac{1}{2}$
64
4
$4\frac{1}{2}$
$72\frac{1}{4}$
$8\frac{1}{2}$
576
36
$2\frac{1}{8}$
$614\frac{1}{8}$

$1103\frac{10}{27}$
27
7721
2206
10
29791

29|791 | 31 ou 10 $\frac{1}{1}$.

27 3

2.791 27
2 9
2791 1

0 000 2791

PREMIER EXEMPLE.

On a fait un cube qui contient 228 toiſes cubiques, & $\frac{163}{729}$: on demande quel eſt le côté de ce cube ?

Je réduis les toiſes en fractions, & j'ai $\frac{166375}{729}$; je tire la racine de 166375, qui eſt 55, & celle de 729, qui eſt 9, & la fraction $\frac{11}{9}$, ou 6 $\frac{1}{9}$ eſt le côté du cube.

Et pour voir ſi j'ai bien opéré, je multiplie 6 $\frac{1}{9}$ par 6 $\frac{1}{9}$, & le produit eſt 37 $\frac{28}{81}$; & multipliant encore ce produit par 6 $\frac{1}{9}$, je trouve 228 $\frac{163}{729}$, qui eſt effectivement le cube dont on me demandoit la racine.

228
729

2052
456
1596
163

166375

166|375 | 55 ou 6 $\frac{1}{9}$.

125 9

41.375 375
11 375
41 375 125

00 000 41375

6 $\frac{1}{9}$ 37 $\frac{28}{81}$
6 $\frac{1}{9}$ 6 $\frac{1}{9}$

36 222
6 ou $\frac{54}{81}$ 4 $\frac{2}{9}$ ou $\frac{81}{729}$
6 ou $\frac{54}{81}$ 2 $\frac{6}{81}$ ou $\frac{14}{729}$
$\frac{1}{81}$ $\frac{28}{729}$

37 $\frac{28}{81}$ 228 $\frac{163}{729}$

SECOND EXEMPLE.

Le piedeſtal d'un grand obéliſque contient 17 toiſes cubiques, 1 pied, 5 pouces, 3 lignes $\frac{1}{2}$ de toiſe cubique, & ſa figure eſt un cube parfait : combien contient-il de toiſes au côté ?

Je réduis tout en demi lignes, & j'ai 29791 demi lignes de toiſe cubique. Mais comme ces lignes ont une ligne de hauteur, & une toiſe, quarrée de baſe, & que cette toiſe quarrée de baſe contient 864 fois 864 lignes, je multiplie 864 par lui-même, & j'ai 746496 lignes cubiques, qui ſont la valeur d'une ligne de toiſe cubique.

Multipliant donc ces lignes cubiques par les demi lignes de toiſe cubique, j'aurai des demi lignes cubiques. Or on ne peut extraire la racine des moitiés, parce que $\frac{1}{2}$ n'eſt pas un nombre cubique ; c'eſt pourquoi je multiplie ces demi lignes cubiques par 4, ce qui me donnera des huitiémes de ligne cubique ; car des moitiés par des quarts font des huitiémes ; ou ſi l'on veut, des lignes multipliées par 2, & puis par 4, ſont des lignes multipliées par 8, & qui par conſéquent étant devenuës 8 fois plus grandes, ne doivent être regardées que comme des huitiémes de ligne.

17 toiſes 1 pied 5 pouc. 3 lign. $\frac{1}{2}$.
6
102
1
103 pieds
12
206
1035
1241 pouces
12
2482
12413
14895 lignes
2
29790
1
29791 demi lignes de toiſes cubes

864
864
3456
5184
6912
746496 lignes cubiques

Maintenant comme on peut extraire la racine cubique des huitiémes, parce que 8 eſt un nombre cube, je tire la racine de 88955449344, & cette racine, qui eſt 4464, exprime des demi lignes, puiſque la racine d'un huitiéme eſt $\frac{1}{2}$. Ainſi pour réduire ces demi lignes en toiſe, je multiplie 864, qui eſt la valeur de la

toiſe, par 2, afin que le diviſeur ſoit également multiplié, & je diviſe 4464 par le produit 1728, ce qui me donne, après avoir évalué les fractions, 2 toiſes, 3 pieds, 16 pouces pour le côté du piedeſtal. Et pour m'aſſurer d'avoir bien opéré, je fais le cube de 2 toiſes, 3 pieds, 6 pouces, & je trouve que ce cube eſt 17 toiſes, 1 pied, 5 pouces, 3 lignes $\frac{1}{2}$, ainſi qu'on l'avoit propoſé.

746496
29791

746496
6718464
5225472
6718464
1492992

22238862336 demi lignes cubiques
4

88955449344 huitiémes de lignes cubiques.

88|955|449|344 | 4464 demi lignes

64

24955
48
21184

3771449
8948
353 2536

238913344
89 6748
238 913 344

0 000

192
192
64

21184

34848
4752
216

3532536

1728 | 2 toiſes
4464 |

1008
6

6048

2386992
21408
64

238913344

1728 | 6048 | 3 pieds

864
12

1728
864

10368

1728 | 10368 | 6 pouces

0000

2 toiſes 3 pieds 6 pouces
2 toiſes 3 pieds 6 pouces

5 toiſes 1 pied 0 pouce
1 toiſe 1 pied 9 pouces
0 toiſe 1 pied 3 pouces 6 lignes

6 toiſes 4 pieds 0 pouce 6 lignes
2 toiſes 3 pieds 6 pouces

13 toiſes 2 pieds 1 pouce 0 ligne
3 toiſes 2 pieds 0 pouce 3 lignes
0 toiſe 3 pieds 4 pouces 0 ligne $\frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{12}$

17 toiſes 1 pied 5 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$

TROISIE'ME EXEMPLE.

Une grande caiſſe contient une toiſe cubique, 1 pied, 1 pouce, 9 lignes de toiſe cubique ; ſa largeur eſt double de ſa hauteur, & ſa longueur eſt triple de la même hauteur : on demande 1°. quelles ſont ſes dimenſions ; 2°. combien elle pourroit contenir de boëtes de 6 pouces de largeur, 6 de longueur, & 6 de hauteur ?

Je réduis tout en lignes, ce qui me donne 1029 lignes de toiſe cube ; & comme chacune de ces lignes contient 746496 lignes cubiques, je les multiplie par ce nombre, & j'ai 768144384 lignes cubiques.

Enſuite je ſuppoſe que la hauteur ſoit 1 ligne, la largeur ſera par conſequent 2, & la longueur 3 ; & multipliant ces trois dimenſions enſemble, j'ai 6, qui repréſente une caiſſe dont les dimenſions ſeroient en même proportion que les dimenſions de la caiſſe propoſée. C'eſt pourquoi je dis : La caiſſe 6 doit être auſſi grande par rapport au cube que l'on feroit de ſa hauteur, que la

caisse 768144384 par rapport au cube que l'on feroit sur la sienne. Faisant donc la règle de trois, je trouve 128024064, qui est le cube de la hauteur de la caisse. Tirant donc la racine cubique, j'ai 504 lignes pour la hauteur ; & comme 504 lignes sont moins qu'une toise, je les réduis en pieds, en les multipliant par 144, parce que le pied contient 144 lignes, & je trouve 3 pieds, & $\frac{72}{144}$ ou $\frac{1}{2}$, qui est 6 lignes. Doublant donc 3 pieds, 6 lignes, j'ai une toise & un pied pour la largeur ; & triplant 3 pieds, 6 pouces, j'ai 1 toise, 4 pieds, 6 pouces pour la longueur ; & multipliant ces trois dimensions ensemble, j'ai 1 toise, 1 pied, 1 pouce, 9 lignes, ainsi qu'il étoit proposé.

1 toise 1 pied 1 pouce 9 lignes

6

6
1

7 pieds
12

84
1

85 pouces
12

170
859

1029 lignes de toises.

746496
1029

6718464
1492992
7464960

768144384 lignes cubiques

6. 1. 768144384. Réponse 128024064

128|024|064 | 504 lignes

125

3.024
78
0 000

3 024.064
78ϕ ϕ
3 024 064

00 000

30000
2400
64

3024064

144 | 504 | 3 pieds 6 lignes

72

hauteur

hauteur	0 toiſe	3 pieds	6 pouces		
largeur	1 toiſe	1 pied	0 pouce		
	0 toiſe	3 pieds	6 pouces		
	0 toiſe	0 pied	7 pouces		
	0 toiſe	4 pieds	1 pouce		
longueur	1 toiſe	4 pieds	6 pouces		
	0 toiſe	4 pieds	1 pouce		
	0 toiſe	2 pieds	0 pouce	6 lignes	
	0 toiſe	0 pied	8 pouces	2 lignes	
	0 toiſe	0 pied	4 pouces	1 ligne	
	1 toiſe	1 pied	1 pouce	9 lignes	

Maintenant pour ſavoir combien cette caiſſe contiendra de boëtes cubiques de 6 pouces de hauteur, 6 de largeur, & 6 de longueur, je réduis la hauteur 3 pieds, 6 pouces en pouces, ce qui fait 42, & diviſant 42 par la hauteur 6 des boëtes, je trouve qu'elle en contiendroit 7 de hauteur.

Réduiſant de même la largeur 1 toiſe, 1 pied en pouces, j'ai 84 pouces, leſquels diviſés par la largeur 6 des boëtes, donnent 14 boëtes que la caiſſe contiendroit ſur ſa largeur.

Enfin réduiſant la longueur une toiſe, 4 pieds, 6 pouces en pouces, j'ai 126 pouces, leſquels diviſés par la longueur 6 des boëtes, donnent 21

3 pieds 6 pouces
12
36
6
42 pouces

6 | 42 | 7

1 toiſe 1 pied
6
6
1
7
12
84

6 | 84 | 14
24

1 toiſe 4 pieds 6 pouces
6
6
4
10
12
20
106
126

6 | 126 | 21
06

boëtes que la caiſſe contiendroit ſur ſa longueur. Ainſi multipliant 7 de la hauteur par 14 de la largeur, puis par 21 de longueur, je trouve que la caiſſe peut contenir 2054 boëtes.

Et pour voir ſi j'ai bien opéré, je multiplie ces boëtes par 216 pouces, qui eſt la valeur de chacune de ces boëtes, puiſqu'elles ſont le cube de 6, & je trouve que ces boëtes occupent 444528 pouces cubiques; de ſorte que ſi j'ai bien fait, la caiſſe n'en doit pas contenir davantage. Or j'ai trouvé ci-deſſus que la caiſſe contenoit 768144384 lignes cubiques; & comme le pouce cubique contient 1728 de ces lignes, je diviſe 768144384 par 1728, & je trouve en effet 44528 pouces cubiques; de ſorte que tout quadre parfaitement.

7
14
98
21
98
196
2058 boëtes
216
12348
2058
4116
444528 pouces cubiques

1728 | 768144384 | 444528 pouces cubiques
769.4
782.4
912.3
483.8
1382.4
0000

De l'Extraction de la Racine cubique par approximation.

XXIV. Quand après avoir extrait la racine cubique d'un nombre, il reſte quelque choſe, ce reſte eſt une marque certaine que le nombre n'eſt pas cubique, & qu'on n'en peut exprimer la racine ni en nombre entier, ni en fraction; car ſi on pouvoit l'exprimer en nombre entier, le reſte donneroit tout au plus une unité de plus à la racine; & en ce cas il n'y auroit plus de reſte, ce qui eſt contre la ſuppoſition; & ſi on pouvoit l'exprimer en fractions, il s'enſuivroit qu'une fraction multipliée par elle-même

pourroit donner un nombre entier, ce qui n'eſt pas poſſible, comme nous avons déja dit ci-deſſus. L'unique parti qui reſte à prendre dans ces occaſions, eſt donc d'approcher de la racine véritable le plus près qu'il ſe puiſſe, & voici de quelle façon on s'y prend.

Suppoſons le nombre 48 dont on nous demande d'extraire la racine, j'ajoute à ce nombre trois zeros, ce qui eſt la même choſe que ſi je le multipliois par 1000, dont la racine cubique eſt 10; après quoi faiſant l'extraction, je trouve $\frac{16}{10}$, ou $3\frac{6}{10}$, & un reſte 1344, qui ne peut valoir une unité de la racine: c'eſt-à-dire, $\frac{1}{10}$. Par conſéquent la racine $3\frac{6}{10}$ n'eſt pas au-deſſous de la véritable d'un $\frac{1}{10}$.

48|000	36
27	10
21.000	
x 7	161
19656	324
	216
1344	19656

Que ſi je voulois approcher de plus près, j'ajouterois ſix zeros à 48, ce qui eſt la même choſe que ſi je multipliois 48 par 1000000, dont la racine cubique eſt 100, & faiſant l'extraction, je trouverois $\frac{363}{100}$, ou $3\frac{63}{100}$, à qui il ne manque pas un centiéme pour être la véritable racine. Et ſi je voulois approcher davantage, j'ajouterois encore 3 zeros, & ce qui viendroit à la racine approcheroit de la véritable à moins d'un milliéme près; & je pourrois continuer ainſi à l'infini, de ſorte que ce qui manqueroit à la racine pour être la véritable, ſeroit au-deſſous d'un dix milliéme, d'un cent milliéme, d'un millioniéme; & ainſi de ſuite de dix en dix fois moindre à l'infini, obſervant toujours de mettre un zero ſous la racine toutes les fois que j'augmenterois le cube de trois zeros.

48|000|000	363
27	100
21.000	
x 7	
19656	
1344000	
3888	
1166147	
177853	

Quant aux fractions dont on voudroit trouver la racine approchée, on ajouteroit trois, ou ſix, ou neuf zeros, &c. au numérateur, & au dénominateur; puis on extrairoit la racine de l'un & de l'autre, & les deux racines étant miſes en fraction, ſeroient la racine approchée. Ainſi pour tirer la racine approchée de $\frac{9}{7}$, j'a-

joute ſix zeros au numérateur, & au dénominateur, afin que ce qui manquera à la racine de l'un & de l'autre ſoit au-deſſous d'un centiéme ; puis tirant la racine de l'un & de l'autre, je trouve $\frac{181}{191}$, qui eſt la racine approchée de $\frac{6}{7}$.

Au reſte cette approximation par rapport aux pures fractions n'eſt pas de grande utilité. Ainſi je finirai ce qui regarde cet article par un ou deux exemples ſur les nombres entiers, & ſur ceux qui ſont compoſés d'entiers & fractions.

$\frac{6}{7}$. $\frac{6000000}{7000000}$.

7|000|000 | 191	6|000|000 | 181
1	1
6.000	5 000
ℨ	ℨ
5859	4832
141.000	168.000
1084 ℨ	97ℨ
108871	97741
32129	70259

PREMIER EXEMPLE.

Un homme a un bloc de marbre qui contient 274697 *pouces cubiques ; & comme il n'eſt pas de figure cubique, il veut le changer pour un autre qui ſoit un cube parfait, & qui approche de ſi près du contenu du bloc, qu'il n'y ait ni perte, ni gain : on demande quel ſera le côté de ce cube ?*

Nous avons déja réſolu cette queſtion ci-deſſus, en ſuppoſant que cet homme conſentoit de païer le ſurplus, s'il s'en trouvoit, ou qu'on lui païeroit ce qu'il y auroit de moins : mais comme nous ſuppoſons à préſent qu'il ne veut pas qu'il y ait du plus, ou du moins, il faut néceſſairement en venir à une approximation, où le moins qui ſe trouvera ſoit ſi peu de choſe, qu'on puiſſe le compter pour rien.

Je réduis donc 274697 pouces cubiques en lignes cubiques, en les multipliant par 1728, parce que le pouce cubique contient 1728 lignes cubiques ; puis j'ajoute neuf zeros, afin que ce qui manquera à la racine ſoit au-deſ-

274697
1728
2197576
549394
1922879
274697
474676416

ſous d'un milliéme, & tirant la racine, je trouve 780068 milliémes de lignes, que je réduis en pouces, multipliant 12, qui eſt le contenu d'un pouce, par 1000, ce qui fait 12000, avec leſquels je diviſe 780068, & vient au quotient 65 pouces, & une fraction $\frac{17}{1000}$, qui eſt à peu de choſe près la quinziéme partie d'un pouce ou un peu plus des quatre cinquiémes d'une ligne. Ainſi le cube qu'on donnera pour le bloc aura ſon côté de 65 pouces $\frac{17}{1000}$, c'eſt-à-dire, 5 pieds, 5 pouces $\frac{17}{1000}$.

474|676|416|000|000|000 | 780068

343

131.676
2 4 7
131 552

124.416
2 8 2 5 2
000 000

124 416.000
2 8 2 5 2 0 0
000 000 000

124 416 000.000
2 8 2 5 2 0 0 0 0
109 520 424 216

14 895 575 784.000
2 8 2 5 4 8 0 8 2 0 8
14 603 996 258 432

291 579 525 568

Et ſi on veut en faire la preuve ſans avoir l'embarras de multiplier par les fractions, on multipliera la racine 780068 deux fois ſucceſſivement par elle-même, ce qui donnera des *milliardiémes* de lignes cubiques; & comme le pouce cubique contient 1728 de ces lignes, on ajoutera neuf zeros à 1728; après quoi diviſant l'un par l'autre, on trouvera 274696, & une fraction qui approche beaucoup de l'entier; & par conſéquent le maître du bloc perdra ſi peu de choſe au change, qu'on pourra le compter pour rien.

12000
780068 | 65 pouces $\frac{68}{12000}$ ou $\frac{17}{1000}$.

60068

068

780068
780068

6240544
4680408
624054400
5460476

608506084624
780068

4868048676992
3651036507744
4868048676992 00
4259542592368

4746761244204744 32

172800000000 0 | 274696
4746761244204744 32

1290761244204.7

811612442047.4

12041244204744 4

1673244204744.3

1180442047443.2

143642047443.2

SECOND EXEMPLE.

Une pierre cubique a 3 toiſes cubiques, 5 pieds, 9 pouces, 11 lignes $\frac{1}{2}$ de toiſe cubique; quel en eſt le côté?

Je réduis tout en demi lignes de toiſe cubique; & comme ces demi lignes contiennent chacune 746496 lignes cubiques, je multiplie ces demi lignes par 746496, ce qui me donne des demi lignes cubiques, que je multiplie par 4, pour avoir des huitiémes de ligne, à cauſe que le huitiéme eſt un nombre cubique dont la racine eſt $\frac{1}{2}$; & j'ai 2049280819 2 huitiémes de lignes cubiques. J'ajoute neuf zeros à ce nombre, afin que ce qui manquera à la

racine ſoit au-deſſous d'un milliéme de demi lignes, & tirant la racine, je trouve 2736499, qui ſont des milliémes de demi lignes, ou des deux milliémes de lignes; & pour les réduire en toiſes, je multiplie 864, qui eſt le contenu de la toiſe, par 2000, ce qui fait 1728000; & diviſant la racine par 1728000, je trouve, après avoir évalué les fractions, 1 toiſe, 3 pieds, 6 pouces, & une fraction, qui multipliée par 12, donne à peu près $\frac{1}{4}$ de ligne. Ainſi le côté de cette pierre a une toiſe, trois pieds, 6 pouces, 0 ligne $\frac{431136}{1728000}$.

3 toiſes 5 pieds 9 pouces 11 lignes $\frac{1}{2}$.
6

18
5

23 pieds
12

46
239

285 pouces
12

570
285
11

3431 lignes
2

6862
1

6863 demi lignes de toiſe cubique.

746496
6863

2239488
4478976
5971968
4478976

5123202048 demi lignes cubiques.
4

20492808192 huitiémes de lignes cubiques.

Et pour faire la preuve ſans multiplier par les fractions, je fais le cube de la racine; ce qui me redonne des huitiémes de lignes cubiques multipliées par un milliard, c'eſt-à-dire, des huit *milliardiémes* de lignes cubiques.

20|492|808|192|000|000|000 | 2736499

8

12.492
2 2
11 683

809.808
2 2 8 ℏ
663 417

146 391.192
2 2 3 5 8 ℏ
134 447 256

11 943 936.000
2 2 4 5 ℏ 0 8 8
8 984 148 544

2 959 767 456.000
2 2 4 0 3 0 5 4 8 8
2 021 795 534 449

0 937 991 921 551.000
2 2 4 0 5 2 3 2 ℏ 0 3
202 186 858 010 499

735 805 063 540 501

1728000		1728000	
2736499	1 toise	6050994	3 pieds
1008499		866994	
6		12	
6050994		1733988	
		866994	
		10403928	

Enſuite pour les réduire en toiſes, je fais le cube de 864, parce que la toiſe cubique contient ce cube de lignes, & je le multiplie par huit milliards; après quoi faiſant la diviſion, je trouve après avoir

avoir évalué toutes les fractions, que le cube de la racine contient 3 toiſes, 5 pieds, 9 pouces, 11 lignes, & une fraction, qui eſt à peu près $\frac{1}{5}$ de ligne; de ſorte qu'il ne s'en faut pas de deux cinquiémes de ligne que ce cube ne ſoit égal au cube propoſé.

1728000 | 6 pouces
10403928 |

35928
12

71856
35928

431136

2736499
2736499

24628491
24628491
10945996
16418994
8209497
19155493
5472998

7488426777001
2736499

673958409930 09
673958409930 09
29953707108004
4493056066 2006
2246528033 1003
524189874390 07
149768535540 02

2049207238683645 9499

5159780352000000000 | 3 toiſes
2049207238683645 9499 |

501273153083645 9499
6

3007638798501875 6994

5159780352000000000 | 5 pieds
3007638798501875 6994 |

427748622501875 6994
12

8554992450039513988
427748622501875 6994

5132985470022708 3928

```
  5159780352000000000 |
  5132985470022708 3928 | 9 pouces
-------------------------
  4891831532227083928
                    12
-------------------------
  9783663064454167858
  4891831532227083928
-------------------------
  5870197838672500713 8
```

```
  5159780352000000000 0 |
  5870197838672500713 8 | 11 lignes
-------------------------
  7104174866725007 13.8
-------------------------
  1044394514725007138
```

Comme il eſt ſouvent néceſſaire dans le toiſé de réduire les pieds, pouces & lignes de toiſes quarrées ou cubiques, en pieds, pouces & lignes quarrées ou cubiques; & les pieds, pouces & lignes quarrées ou cubiques, en pieds, pouces & lignes de toiſe; je mettrai ici une Table où l'on verra d'un coup d'œil, les rapports de ces différentes meſures.

Cette Table contient deux ſortes de rangs de cellules, dont les uns vont de haut en bas, & ſeront appellés perpendiculaires; & les autres de gauche à droite, & je les appelle horizontaux. Dans le premier horizontal; c'eſt-à-dire dans celui d'enhaut, ſont écrits les pieds, pouces & lignes courantes; les pieds, pouces & lignes quarrées; & les pieds, pouces & lignes cubiques. Dans le premier perpendiculaire à gauche, ſont écrits la toiſe, les pieds & les pouces courans; la toiſe quarrée, les pieds, pouces & lignes de toiſe quarrée; la toiſe cubique, les pieds, pouces & lignes de toiſe cubique; & les valeurs de ces meſures ſont marquées dans les autres rangs; de façon que ſi on veut ſavoir, par exemple, combien un pouce de toiſe quarrée vaut de pouces quarrés, on prendra dans le premier rang perpendiculaire l'endroit où eſt écrit pouce de toiſe quarrée; & dans le premier horizontal l'endroit où eſt écrit pouce quarré; enſuite ſuivant des yeux le rang horizontal, à la tête duquel eſt écrit pouce de toiſe quarrée, & le rang perpendiculaire où eſt écrit pouce quarré, l'endroit où ces deux rangs

ſe croiſeront marquera 72, qui eſt la valeur d'un pouce de toiſe quarrée en pouces quarrés.

De même, ſi on vouloit ſavoir combien il faut de pouces quarrés pour un pied de toiſe quarrée, on prendroit dans le premier rang horizontal l'endroit où eſt écrit pouce quarré, & dans le premier perpendiculaire l'endroit où eſt écrit pied de toiſe quarrée; & ſuivant des yeux le rang perpendiculaire qui commence par pouce quarré, & l'horizontal qui commence par pied de toiſe quarrée, l'endroit où ces deux rangs ſe croiſeroient feroit voir qu'il faut 864 pouces quarrés pour un pied de toiſe quarrée.

	pied courant.	pouce courant.	ligne courante.	pied de toiſe quarrée.	pouce de toiſe quarrée.	ligne de toiſe quarrée.	pied quarré.	pouce quarré.	ligne quarrée.
toiſe courante.	6	72	864						
pied courant.	1	12	144						
pouce courant.		1	12						
toiſe quarrée.				6	72	864	36	5184	746496
pied de toiſe quarrée.					12	144	6	864	124416
pouce de toiſe quarrée.						1	12	72	10368
ligne de toiſe quarrée.									864

	pied de toiſe cube.	pouce de toiſe cube.	ligne de toiſe cube.	pied cubique.	pouce cubique.	ligne cubique.
toiſe cube.	6	72	864	216	373248	644972544
pied de toiſe cube.	1	12	144	36	62208	107495424
pouce de toiſe cube.		1	12		5184	8957952
ligne de toiſe cube.						746496

Fin de la ſeconde Partie.

SUITE
DE
L'ARITHMETIQUE
DES
GÉOMÉTRES,

CONTENANT UNE INTRODUCTION A L'ALGEBRE & à l'Analyſe; avec la réſolution des Equations du ſecond & du troiſiéme degré; les Raiſons, Proportions & Progreſſions Arithmétiques & Géométriques; les Combinaiſons; l'Arithmétique des Infinis; les Logarithmes; les Fractions décimales, &c.

Par Monſieur l'Abbé DEIDIER.

A PARIS;
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, ruë ſaint Jacques, vis-à-vis la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXXIX.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

AVERTISSEMENT.

DANS les deux premieres Parties de cet Ouvrage, j'ai donné un corps complet d'Arithmétique vulgaire, qui peut être d'une grande utilité, non-ſeulement pour les perſonnes qui veulent s'adonner aux Mathématiques, mais encore pour celles qui ſont engagées dans le Commerce ou dans le maniement des Affaires & des Finances. Je paſſe maintenant aux trois autres Parties qui regardent principalement ceux qui veulent faire étude de la Géométrie. Elles comprennent l'Algébre, l'Analyſe, la maniere de réſoudre les Problêmes numériques, déterminés & indéterminés; les Raiſons, proportions & progreſſions Arithmétiques & Géométriques; en un mot, tout ce qu'on entend ſous le nom d'Elémens de Mathématiques. Je traite cette matiere avec tout l'ordre & la clarté qu'il eſt poſſible d'y mettre. Je l'entremêle de grand nombre d'Exemples inſtructifs, & très-propres à délaſſer l'eſprit de la fatigue que la recherche de l'Algébre peut lui cauſer. Je n'abrége rien dans les Calculs, de peur que les Commençans ne s'y trouvent embarraſſés. Enfin, je mets tout en uſage pour faire enſorte que l'on ſoit inſtruit par une ſimple lecture, pourvû qu'on y apporte l'application convenable aux ſujets. Cependant, comme il importe beaucoup d'acquérir l'habitude de cette façon de calculer, lorſqu'on veut faire des progrès dans les Mathématiques; je conſeille à tous ceux qui liront ceci de travailler toujours la plume à la main, & de ſe faire eux-mêmes des Exemples ſemblables à ceux que je leur propoſe, afin de ſe procurer une facilité, qui les exemtera dans la ſuite de bien des travaux.

TABLE

Des Articles contenus dans les trois dernieres Parties.

TROISIE'ME PARTIE.

Définition de l'Algébre, page 1
Des ſignes Algébriques, 3
Des grandeurs Complexes & Incomplexes, Poſitives & Négatives, 7
De l'Addition des grandeurs littérales, 8
De la Souſtraction des grandeurs littérales, 10
De la Multiplication des grandeurs littérales, 11
De la Diviſion des grandeurs littérales, 14
Des puiſſances des grandeurs littérales Incomplexes & de leur calcul, 23
Des puiſſances des grandeurs Complexes, 28
Du calcul des grandeurs Sourdes & Irrationnelles, 51
De l'Addition des grandeurs Incommenſurables, 59
De la Souſtraction des grandeurs Incommenſurables, 60
De leur Multiplication, ibid.
De leur Diviſion, 62
De l'extraction des Racines des grandeurs Incommenſurables, 65
De l'Analyſe, 100
Des Problêmes déterminés, ibid.
Méthode générale pour les Equations du ſecond degré dans la réſolution des Problêmes determinés, 137
Des Problêmes indéterminés, 141
De la réſolution des Equations, compoſées du ſecond & troiſiéme degré, 172
Faire évanoüir le ſecond terme d'une Equation, 182
Oter les Fractions d'une Equation, dont le premier terme n'a point de coefficiens, 183
Transformer une Equation, dont le premier terme a un coefficient, en un autre où ce premier terme n'en ait point, 184
Transformer une Equation qui n'a pas tous ſes termes, en un autre qui les ait tous, ibid.
Oter le ſecond terme d'une Equation, dont le premier terme a un coefficient, ibid.
Oter les Incommenſurables d'une Equation, 185
Réſoudre les Equations du ſecond degré, 187
Réſoudre les Equations du troiſiéme degré, 192

TABLE.

QUATRIE'ME PARTIE.

Ce que c'eſt que Raiſon, Proportion & Progreſſion, 212
Des Raiſons & Proportions Arithmétiques, 216
Des Progreſſions Arithmétiques, 221
Des Raiſons & Proportions Géométriques, 238
Des Progreſſions Géométriques, 261
Des Raiſons compoſées, 276
Des Incommenſurables, 292
Des Nombres premiers, des Nombres compoſés, des Nombres premiers entr'eux & compoſés entr'eux, & de la Diviſion de ces Nombres, 301

CINQUIE'ME ET DERNIERE PARTIE.

Des Nombres de différens ordres, 320
Des Combinaiſons, 323
Des Combinaiſons ſimples, 324
Premier Cas, 327
Second Cas, 332
Troiſiéme Cas, 335
Des Permutations, 339
Premier Cas, ibid.
Second Cas, 347
Troiſiéme Cas, 349
Des nombres Polygones, 352
Des Polygones centraux, 360
De l'Arithmétique des Infinis, 366
Des Logarithmes, 380
Des Fractions Décimales, 411

APPROBATION.

J'Ai lû, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un Manuſcrit qui a pour titre: *L'Arithmétique des Géométres*, dont on peut permettre l'impreſſion; le grand nombre de Livres ſur cette matiere n'empêchera pas que celui-ci n'ait ſon utilité. Fait à Paris ce 29. Juillet 1737. MONTCARVILLE.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS par la grace de Dieu Roi de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conſeillers, les gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra: Salut. Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT notre Libraire ordinaire pour notre Artillerie & le Génie, & Libraire à Paris, nous aïant fait remontrer qu'il ſouhaiteroit faire imprimer & donner au Public *l'Arithmétique des Géométres & le parfait Ingénieur François*, s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilége ſur ce néceſſaires; offrant pour cet effet de faire imprimer leſdits Ouvrages ci-deſſus expoſés, en bon papier & beaux caractéres, ſuivant la feüille imprimée & attachée pour modéle ſous le contreſcel des Préſentes. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Expoſant, nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer leſdits Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés, en un ou pluſieurs volumes, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Roïaume pendant le tems de ſix années conſécutives, à compter du jour de l'expiration du précédent Privilége. Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéïſſance; comme auſſi à tous Libraires-Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire leſdits Ouvrages ci-deſſus expoſés, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, ſans la permiſſion ex-

preſſe & par écrit dudit Expoſant, ou de ceux qui auront droit de lui ; à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant ; & de tous dépens, dommages & intérêts : A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Roïaume, & non ailleurs ; & que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril mil ſept cent vingt-cinq, & qu'avant que de les expoſer en vente, les manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Livres, ſeront remis dans le même état où les Approbations auront été données, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur Dagueſſau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur Dagueſſeau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres ; le tout à peine de nullité des Préſentes. Du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Expoſant ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie deſdites Préſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenuë pour duëment ſignifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent, de faire pour l'éxécution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris le vingt-troiſiéme jour du mois d'Août, l'an de grace mil ſept cent trente-ſept, & de notre Régne le vingt-deuxiéme. Par le Roi en ſon Conſeil. SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre IX. de la Chambre Roïale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, Num. 518. Fol. 484. conformément aux anciens Reglemens, confirmés par celui du vingt-huit Février mil ſept cent vingt-trois. A Paris le trente-uniéme Août mil ſept cent trente-ſept. *Signé*, LANGLOIS, *Syndic.*

CORRECTION,

Pour la page 175.

M'ETANT apperçû dans le courant de l'impreſſion de cette troiſiéme Partie, que ce que j'ai dit touchant la Régle que Monſieur Deſcartes donne pour connoître le nombre des Racines poſitives & négatives d'une Equation, n'étoit pas ſuffiſant pour la bien établir, & paroiſſoit même la rendre ſuſceptible d'exception, voici ce qu'on doit lire *page* 175, au lieu du diſcours compris entre les lignes 14 & 31, qui commence par ces mots: *Cependant comme il eſt rare*, & finit par ceux-ci: *Qui aïent le même ſigne moins.*

Cependant de quelque maniere que les choſes arrivent, on doit toujours prendre pour régle générale qu'*il y a dans toute Equation autant de Racines négatives qu'il s'y trouve d'interruptions dans l'ordre alternatif des ſignes plus & moins*; car ſi la ſomme des deux négatives eſt plus grande que la poſitive, le ſecond terme aura le ſigne plus, le troiſiéme pourra avoir le ſigne plus ou moins & le quatriéme aura toujours le ſigne moins; ſi le troiſiéme terme a le ſigne plus, le premier & le ſecond aïant le même ſigne, il y aura donc trois fois de ſuite le ſigne plus, & par conſéquent deux interruptions dans l'ordre alternatif; & ſi le troiſiéme terme a le ſigne moins, le premier & le ſecond aïant le ſigne plus, & le troiſiéme & quatriéme le ſigne moins, il y aura deux interruptions: donc, &c.

Si la ſomme des négatives eſt moindre que la poſitive, le ſecond terme aura le ſigne moins, le troiſiéme aura toujours le ſigne moins, parce que le produit des deux négatives, par la poſitive, ſera plus grand que le produit des deux négatives: donc l'Equation aura trois fois de ſuite le ſigne moins, & par conſéquent il y aura deux interruptions dans l'ordre alternatif des ſignes: donc, &c.

Lorſque l'Equation a deux Racines poſitives & une négative, on trouvera, par les mêmes raiſonnemens, qu'il n'y aura jamais qu'une interruption dans l'ordre des ſignes; ce qu'on comprendra aiſément en ſe faiſant des Exemples de ce qui vient d'être dit, en mettant des chiffres au lieu des lettres *a*, *b*, *c*, &c.

L'ARITHMETIQUE DES GÉOMÉTRES.

TROISIE'ME PARTIE.

Qui contient une introduction à l'Algebre & à l'Analyſe, avec la réſolution des Equations du ſecond & du troiſiéme degré.

I. L'ALGEBRE eſt l'Art de calculer en emploïant les lettres de l'Alphabet à la place des chiffres dont on ſe ſert dans l'Arithmetique.

Ceux d'entre les Anciens qui ont écrit ſur l'Algebre, en ont parlé d'une maniere ſi peu utile pour faire des découvertes, & en même-tems ſi remplie d'obſcurité, qu'ils ont donné lieu au proverbe, *c'eſt de l'Algebre*, pour exprimer quelque choſe qu'il n'eſt pas poſſible de concevoir. Mais depuis que M. Deſcartes a exercé ſon heureux génie ſur cette matiere, qui certainement n'étoit pas indigne de lui, tout a changé de face; les obſcurités ont diſparu, & l'on pourroit dire aujourd'hui, *c'eſt de l'Algebre*, quand on parle de quelque choſe où l'on trouve beaucoup de clarté. C'eſt ce qu'ont éprouvé juſqu'ici ceux qui ſe ſont adonnés à ce genre de calcul, & ce qu'éprouveroient de même toutes les perſonnes, qui aïant peine à ſe défaire des vieux préjugés, regardent

cette Science comme inacceſſible au commun des eſprits, quoiqu'il n'y aïe point de connoiſſance plus facile à acquerir que celle-ci, & qui ſoit d'une plus grande utilité pour applanir les voïes dans les recherches, & pour procurer l'eſprit d'invention. Il eſt vrai qu'on a d'abord quelque peine à ſe faire à un calcul littéral, où l'imagination ne ſaiſit rien ; mais un peu de travail en donne bien-tôt l'uſage, & l'on en eſt dédommagé en peu de tems par la ſatisfaction que l'on goûte à réſoudre en quatre coups de plume des queſtions qui paroiſſent au premier aſpect auſſi indiſſolubles que le nœud Gordien. Après tout, pourquoi s'éfraïer tant quand on veut repréſenter une telle grandeur ou un tel nombre par la lettre *a*, ou par la lettre *b* ; ne fait-on pas à peu près la même choſe tous les jours dans les converſations les plus ordinaires ? Si l'on parle de la rondeur de la terre & des révolutions que le Soleil fait autour d'elle, ne repréſente-on pas cette rondeur par une boule qu'on trouvera par hazard devant ſoi, ou par une pomme qui ſera ſur une table ? Si on veut faire entendre quelque choſe qu'on n'a pas actuellement devant les yeux, que dit-on communément ? *Figurez-vous que cette tabatiere, cet éventail, ce fauteüil, cette chaiſe, &c. ſoit la choſe même dont nous parlons* ; après quoi on continuë ſon diſcours. Et loin que ce diſcours ſoit regardé comme fort difficile à entendre, tout le monde le goûte, tout le monde s'en ſert, parce qu'en effet on ſupplée par-là à l'abſence des objets. Qu'on faſſe donc de même à l'égard de l'Algebre, & il n'y aura plus de difficulté. Figurez-vous que vous avez une converſation avec le Livre que vous liſez, & que les lettres de l'Alphabet qu'il vous propoſe repréſentent les choſes dont il s'agit, & que vous n'avez pas devant les yeux : ne vous effarouchez point mal à propos pour une ſuppoſition ſi naturelle, tout le reſte ne vous coûtera preſque plus rien ; les principes ſont clairs & aiſés, & les conſéquences auſſi. Il ne s'agit que de convenir que ſi de deux choſes égales, on retranche des choſes égales, les reſtes ſeront égaux ; que ſi on leur ajoute des choſes égales, les ſommes ſeront auſſi égales ; & que ſi on les multiplie ou les diviſe par des choſes égales, les produits ou les quotiens ſeront encore égaux. S'il ſe trouve quelquefois d'autres principes qui demandent plus d'attention que ceux-ci, c'eſt que les queſtions propoſées dépendent de ces principes, & alors l'Algebre les emprunte des autres Sciences, & c'eſt à ceux qui veulent s'appliquer à ces queſtions à ſavoir auparavant ce qui eſt néceſſaire

pour emploïer avec fruit les régles du calcul. D'ailleurs il eſt bien des queſtions dont les expreſſions algebriques vous font découvrir les principes plus briévement & avec plus de facilité, qu'on ne feroit par tout autre moïen. Au reſte, j'eſpére que ceux qui ſe donneront la peine de lire ce petit Traité, conviendront aiſément de ce que je viens d'avancer. J'ai tâché d'y mettre par tout l'ordre & la netteté qui peuvent le faire concevoir avec moins de peine; & quoique ce ne ſoit qu'une Introduction, je m'y ſuis aſſez étendu pour mettre les Commençans en état de lire, ſans le ſecours d'aucun Maître, les Ouvrages les plus profonds qui ont paru au jour.

Des ſignes Algebriques.

II. Les chiffres dont on uſe dans l'Arithmetique aïant par eux-mêmes une valeur déterminée, ſi on veut en ajouter deux enſemble ou retrancher l'un de l'autre, ou multiplier ou diviſer l'un par l'autre, on peut trouver d'autres chiffres qui repréſentent leur ſomme ou leur reſte, ou leur produit, ou leur quotient; mais il n'en eſt pas de même des lettres de l'Alphabet; car comme on peut ſuppoſer que la lettre *a* ou *b* repréſente un nombre tantôt plus grand, tantôt plus petit, ſelon les différentes queſtions qu'on a à réſoudre, on ne ſauroit dire qu'une troiſiéme lettre *c* ou *d* ſoit leur ſomme ou leur reſte, &c. ſans faire de nouvelles ſuppoſitions qui deviendroient extrémement embarraſſantes, ſurtout lorſque les queſtions à réſoudre demanderoient un calcul un peu long; c'eſt pourquoi on a trouvé des ſignes, qui d'un côté préviennent ces embarras, & qui de l'autre mettent tant de netteté dans les opérations, qu'après avoir réſolu la queſtion, on voit d'un coup d'œil, & le point d'où l'on eſt parti, & tous les pas qu'on a fait pour y parvenir. Ces ſignes ſont les ſuivans.

Le ſigne + marque l'addition, ainſi $a+b$ marque qu'on a ajouté la grandeur ſignifiée par *a* avec la grandeur ſignifiée par *b*.

Le ſigne — marque la ſouſtraction; $a-b$ c'eſt la grandeur *b* retranchée de la grandeur *a*.

Le ſigne × marque la multiplication; $a \times b$ c'eſt la grandeur *a* multipliée par la grandeur *b*; mais ordinairement on retranche ce ſigne, à moins qu'il n'y aïe des raiſons qui obligent de le mettre, & l'on ſe contente de joindre les deux lettres enſemble pour marquer la multiplication; ainſi *ab* ſignifie que *a* eſt multiplié par *b*.

Lorſqu'on écrit une ou pluſieurs lettres au-deſſus du ſigne —, & une ou pluſieurs en-deſſous, c'eſt marque que celles de deſſus ſont diviſées par celles de deſſous; ainſi $\frac{a}{b}$ ſignifie que la grandeur a eſt diviſée par la grandeur b; $\frac{ab}{cd}$ ſignifie que le produit de la grandeur a par la grandeur b, eſt diviſé par le produit de la grandeur c par la grandeur d, & ainſi des autres; de ſorte que ſi a ſignifie 4, & b ſignifie 5, $\frac{a}{b}$ eſt la même choſe que $\frac{4}{5}$; & ſi a ſignifie 4, b ſignifie 5; c, 6; & d, 7; le produit ab vaudra 20, le produit cd vaudra 42, & l'expreſſion $\frac{ab}{cd}$ vaudra $\frac{20}{42}$.

Le ſigne =, marque qu'il y a égalité entre les grandeurs qui ſont à gauche de ce ſigne, & celles qui ſont à droite; $a=x$ ſignifie que la grandeur a eſt égale à la grandeur x; de même $a+b=cy$ ſignifie que la grandeur a ajoutée à la grandeur b, eſt égale à la grandeur c, multipliée par la grandeur y, & ainſi des autres. Il y en a qui expriment ces égalités par le ſigne $\backsim$, & d'autres par le ſigne $\propto$; mais je me ſervirai toujours du ſigne = dans ce Traité, & je ne parle ici des deux autres qu'afin qu'on ne ſoit pas ſurpris en liſant les Livres où ils ſe trouvent.

Le ſigne $>$ marque que la grandeur écrite à gauche de ce ſigne, eſt plus grande que celle qui eſt écrite à droite; $a>b$ ſignifie que a eſt plus grand que b; & le ſigne $<$ marque que la grandeur à gauche eſt moindre que la grandeur à droite; $a<b$, c'eſt a moindre que b.

Voilà, à peu près, les ſignes les plus uſités dans l'Algebre, & s'il s'en trouve d'autres, nous les expliquerons en leur lieu.

Mais à quoi, me dira-t-on, peut ſervir ce calcul & ces ſignes, ſi après avoir réſolu une queſtion, il faut néceſſairement mettre à la place des lettres les nombres qu'elles repréſentent, pour ſavoir quel en eſt le réſultat? Je répondrai en peu de mots à cette demande, en attendant que la lecture de ce Traité puiſſe en faire juger mieux. 1°. Le calcul Algebrique fait découvrir aiſément, & à peu de frais, ce que l'Arithmetique ne peut faire connoître qu'en tâtonnant. 2°. Les réſolutions trouvées par ce calcul deviennent des formules générales pour tous les cas poſſibles de même eſpéce; de ſorte qu'on découvre toujours beaucoup plus par leur moïen, que la queſtion ne demandoit. 3°. Enfin, il eſt bien des queſtions qu'on ne pourroit abſolument réſoudre par l'Arithmetique, & dont on vient à bout par le calcul littéral. Tout ce

Traité, & le reſte même de cet Ouvrage, ſeront pleins d'exemples qui ſeront autant de preuves de ce que je viens de dire : mais pour animer les Commençans, j'en vais mettre ici un qui leur fera voir d'avance ſi j'ai tort de leur en promettre tant.

On demande quel eſt le nombre, qui multiplié par 3, eſt le $\frac{1}{9}$ de ſon quarré ? Cette queſtion, aſſez facile par elle-même, ne peut ſe réſoudre par l'Arithmetique qu'en tâtonnant, c'eſt-à-dire, en faiſant pluſieurs ſuppoſitions, juſqu'à ce qu'on ait trouvé un nombre qui ait les conditions qu'on demande. Ainſi pour aller par cette voïe, je ſuppoſe que le nombre inconnu eſt 4, je dis : 3 fois 4 font 12, & 12 n'étant pas le $\frac{1}{9}$ du quarré 16, ma ſuppoſition eſt fauſſe. Je prens donc 5, & je dis : 3 fois 5 font 15 ; mais comme 15 n'eſt pas le $\frac{1}{9}$ du quarré 25, j'ai encore ſuppoſé faux. Je prens 6, & je dis : 3 fois 6 font 18 ; mais 18 n'eſt pas encore le $\frac{1}{9}$ du quarré 36. Je continuë de même, en faiſant toujours de nouvelles ſuppoſitions, juſqu'à ce que je trouve le nombre 27, qui multiplié par 3, fait 81, & 81 eſt en effet le $\frac{1}{9}$ du quarré 729. Or combien de ſuppoſitions ne faut-il pas que je faſſe pour en venir juſques-là, & par conſéquent combien de calcul inutile & perdu ? D'ailleurs cette réſolution trouvée ne m'en fait pas trouver d'autres, & ſi l'on vient à me faire une queſtion de cette même nature, en changeant le multiplicateur du nombre inconnu, & le dénominateur de la fraction, c'eſt-à-dire, ſi l'on me demande quel eſt le nombre, qui multiplié par 4 eſt le $\frac{1}{11}$ de ſon quarré, je ſuis tout auſſi peu avancé que ſi je n'avois rien fait, & je me vois obligé à recommencer toutes mes ſuppoſitions.

Venons préſentement au calcul Algebrique. Je ſuppoſe que le nombre inconnu eſt x, ſon quarré ſera par conſéquent xx, puiſque x multiplié par x fait xx, ainſi qu'on vient de voir. Or 3 fois le nombre inconnu ou $3x$ eſt égal au neuviéme du quarré xx, ou au quarré xx diviſé par 9, ce qui s'exprime ainſi : $\frac{xx}{9}$, donc j'ai cette premiere égalité $3x = \frac{xx}{9}$, qui ſignifie que $3x$ eſt égal au quarré de x diviſé par 9.

Or je conſidére que puiſque $\frac{xx}{9}$ eſt le quarré de la grandeur inconnuë diviſé par 9, ſi je multiplie par 9, le quotient ſera le quarré xx, attendu que la multiplication fait le contraire de la divi-

$3x = \frac{xx}{9}$ premiere égalité.

ſion ; & d'un autre côté je ſais que ſi je multiplie des grandeurs égales par un même nombre, les produits ſeront égaux ; donc multipliant $3x = \frac{xx}{9}$ par 9, j'aurai d'une part $27x$, & de l'autre xx qui ſeront encore égaux ; car $3x$ multiplié par 9, fait 9 fois $3x$ ou $27x$; ainſi j'ai la ſeconde égalité.

Mais $27x$ eſt 27 multiplié par le nombre inconnu x, de même que xx eſt le nombre inconnu multiplié par lui-même : donc ſi je diviſe de part & d'autre par x, j'aurai $27 = x$, & la queſtion ſera réſoluë, puiſque le nombre inconnu étant égal à 27 me devient connu.

$27x = xx$ ſeconde égalité.

Et pour montrer que c'eſt le véritable nombre que je cherchois, je multiplie 27 par 3, ce qui me donne 81 ; & de l'autre 27 par 27, ce qui fait 729, & diviſant 729 par 81, je trouve en effet qu'il y eſt neuf fois ; de ſorte que 27 a toutes les conditions que le problême demande.

$27 = x$ troiſiéme égalité.

27	27
3	27
81	189
	54
	729

81 | 729 | 9

00

On voit aiſément combien cette réſolution l'emporte, & pour la briéveté & pour la clarté, ſur celle qu'on trouveroit par l'Arithmetique ; mais ce n'eſt pas tout, & pour peu que je conſidére les trois égalités que je viens de former, je vois par la premiere qu'il faut mettre d'un côté le nombre inconnu multiplié par le multiplicateur que la queſtion propoſe, & de l'autre le quarré du même nombre inconnu diviſé par le dénominateur de la fraction propoſée ; & par la ſeconde & troiſiéme égalité, je m'apperçois que le multiplicateur, multiplié par le dénominateur, eſt égal au nombre inconnu. Ainſi voilà une régle générale pour tous les cas imaginables de la même eſpéce ; & de quelque maniere qu'on me propoſe la queſtion à l'avenir, en changeant le multiplicateur ou le dénominateur comme on voudra, le produit de ces deux nombres m'en donnera toujours la ſolution, parce que je pourrai toujours faire des égalités de la même façon. Qu'on me demande, par exemple, quel eſt le nombre qui multiplié par 8 donne la dixié-

me partie de ſon quarré, le produit 80 de 8 par 10 ſera le nombre cherché; de même ſi on veut ſavoir quel eſt le nombre qui multiplié par 20 donne le $\frac{1}{3}$ de ſon quarré, le produit 60 de 20 par 3 réſoudra la queſtion, & ainſi des autres à l'infini. Par où l'on voit que l'Algebre fait toujours beaucoup plus découvrir de choſes qu'il n'eſt propoſé d'en trouver.

Les égalités, telles que nous les avons définies ci-deſſus & que nous venons de faire, s'appellent auſſi *équations*, & c'eſt ſous ce nom-ci qu'on les connoît plus communément, celui d'*égalité* étant réſervé pour certaines queſtions dont nous parlerons dans la ſuite; les grandeurs qui ſont à gauche du ſigne d'égalité, s'appellent *premier membre de l'équation*, & celles qui ſont à droite *ſecond membre*.

Des grandeurs complexes & incomplexes, poſitives & négatives.

III. Par le mot de *grandeur* en général, on entend tout ce qui peut être augmenté ou diminué, & qui par conſéquent a des parties. On en diſtingue de deux ſortes, l'une qu'on appelle *ſucceſſive*, parce que ſes parties ſe ſuccedent les unes aux autres, ſans être jamais toutes à la fois, comme le tems & le mouvement; & l'autre qu'on appelle *permanente*, parce que ſes parties ſubſiſtent en même-tems. Celle-ci ſe diviſe encore en grandeur ou quantité *diſcrete*, c'eſt-à-dire dont les parties ne ſont pas liées, telles que ſont les nombres & les aſſemblages, où la continuité & la liaiſon des parties ne ſont pas néceſſaires; & en grandeur *continuë*, c'eſt-à-dire, dont les parties ſont infiniment liées enſemble, telles que ſont toutes les choſes matérielles.

Comme l'Algebre peut emploïer également ſon calcul ſur ces différentes eſpéces de grandeur, on donne le nom de *grandeur* en général aux lettres dont elle ſe ſert pour les repréſenter.

Ces grandeurs ſont *complexes* ou *incomplexes*, ou *poſitives* ou *négatives*.

Une grandeur complexe eſt une grandeur compoſée de deux ou de pluſieurs autres grandeurs jointes enſemble, avec le ſigne + ou le ſigne —; $a+b$ eſt une grandeur complexe, & de même $a+b-c$ ou $a-d+e-f$, & ainſi des autres.

Une grandeur incomplexe eſt une grandeur que l'on conſidére comme n'étant compoſée d'aucune autre grandeur; ainſi a, ou b, ou c, priſes chacune à part, ſont des grandeurs incomplexes.

Une grandeur *poſitive* ou *réelle*, eſt une grandeur qui a le ſigne +, ou qui n'en a point du tout; car alors on doit la regarder comme aïant ce ſigne, parce que ſi elle devoit avoir le ſigne —, on n'auroit pas manqué de le mettre. Ordinairement le caractére qui commence une expreſſion Algebrique n'en a point; ainſi on écrit $a+b$, au lieu de $+a+b$; & ce n'eſt que lorſque ce premier caractére eſt négatif qu'on met le ſigne —, parce qu'en n'en mettant point du tout, on le regarde toujours comme poſitif.

Une grandeur négative ou fauſſe, eſt une grandeur qui a le ſigne —, & qu'on devroit plutôt appeller un défaut de grandeur qu'une grandeur. Bien des perſonnes s'élevent contre ces grandeurs négatives, comme ſi c'étoient des êtres bien difficiles à concevoir, & cependant il n'eſt rien de plus ſimple ni de plus naturel en même-tems. Qu'un homme qui n'a rien doive dix écus, ſon état eſt ſans doute au-deſſous du rien, puiſqu'il s'en faut de dix écus qu'on puiſſe dire que ſon bien eſt égal à zero; ainſi ces dix écus ſont une grandeur négative, un défaut, qui loin de lui donner quelque choſe de poſitif, rendroit le poſitif même égal à rien; car dix écus qu'on lui donneroit pour païer ſa dette ne lui ſerviroient qu'à pouvoir dire qu'il eſt préciſément vis-à-vis de rien. De même, qu'une grandeur de 60 toiſes ſoit comparée à une grandeur de 70, on peut dire qu'elle égale 70 moins 10, & ces moins 10 ſont pour elle une grandeur négative, un défaut qui la rabaiſſent, & qui font que 70 a 10 plus qu'elle. Au reſte cette façon de parler n'eſt pas particuliere à l'Algebre, & les moins que cette ſcience emploïe dans ſon calcul, ne doivent pas paroître plus étranges que ceux que l'on admet tous les jours dans les converſations, lorſqu'on dit, par exemple, que quelqu'un a cent moins dix ſols, qu'un homme eſt âgé de cinquante ans moins trois mois, &c.

De l'Addition des grandeurs littérales.

IV. Pour ajouter enſemble pluſieurs grandeurs incomplexes a, b, c, d, on les écrit les unes après les autres, mettant entr'elles le ſigne +; ainſi $a+b+c+d$ marque que ces quatre grandeurs ſont ajoutées enſemble.

Ceci ne doit s'entendre que des grandeurs poſitives ou qui ont le ſigne +; car ſi parmi les grandeurs qu'on veut ajouter il s'en trouve quelqu'une qui ait le ſigne moins, il faut l'écrire avec les

les autres ; mais au lieu du ſigne plus, il faut lui conſerver le ſigne moins, & alors cette addition eſt une vraïe ſouſtraction, puiſqu'on ne peut donner un défaut ſans ôter quelque choſe de poſitif qui faiſoit qu'on n'avoit pas ce défaut. Ainſi pour ajouter a, b, c, d, avec la grandeur $-f$, il faut écrire $a+b+c+d-f$, & ce moins f eſt une véritable ſouſtraction ; car pour faire que la grandeur $a+b+c+d$ manque de la quantité f, il faut auparavant la lui retrancher.

Lorſqu'en faiſant l'addition des grandeurs littérales, il s'en trouve une ou pluſieurs qui ſont les mêmes, on peut abréger l'expreſſion & la rendre plus nette, en n'écrivant qu'une ſeule des lettres égales, & mettant devant elle, c'eſt-à-dire à gauche, un chiffre qui marque combien il y en a d'égales ; ainſi pour ajouter a, a, a, b, b, c, c, au lieu d'écrire $a+a+a+b+b+c+c$, on écrira $3a+2b+2c$. De même au lieu de $a+a+b+b+b+b+c+d+d$, on mettra $2a+4b+c+2d$.

Comme le ſigne + & le ſigne — s'entredétruiſent, & que plus une grandeur, moins la même grandeur, ne donne rien, s'il ſe trouve que parmi les grandeurs marquées de la même lettre, les unes aïent le ſigne plus & les autres le ſigne moins, on retranchera de celles qui ont le ſigne plus, celles qui ont le ſigne moins, & on écrira le reſte. Ainſi au lieu d'écrire $3a-2a$, on écrira ſimplement a, parce que dans $3a$ il y a deux a qui ſont détruits par $-2a$. De même au lieu de $4a-a+3b-b+6c-3c$, on écrira $3a+2b+3c$, & au lieu de $2a-4a+2b-3b+c-4c$, on écrira $-2a-b-3c$, parce que $2a$ étant détruits par $-2a$, qui ſont dans $-4a$, il reſtera encore $-2a$; & de même $2b$ étant détruits par $-2b$, qui ſont dans $3b$, il reſte encore $-b$; & c étant détruit par $-c$, qui eſt dans $-4c$, il reſte encore $-3c$.

Il faut avoir grand ſoin de faire ces ſortes de corrections dans les expreſſions Algebriques, parce que la netteté des expreſſions partage moins l'attention de l'eſprit & contribuë à la netteté des idées.

L'addition des grandeurs complexes ſe fait de la même façon que celles des incomplexes ; pour ajouter $a+b$ avec $c+f$, on écrit $a+b+c+f$; de même pour ajouter $a+b+d$ avec $a+2b+c$, on écrit $2a+3b+d+c$. Et s'il s'en trouve quelques-

Premier exemple.

$$\begin{array}{r} a+b+2c+d \\ 3a+4b+3c+2d+f \\ \hline 4a+5b+5c+3d+f \end{array}$$

Second exemple.

$$\begin{array}{r} 5a+6b+4c+d+3f \\ 3a+2b+2c+d+f \\ \hline 8a+8b+6c+2d+4f \end{array}$$

unes qui ſoient les mêmes, ou qui aïent des ſignes différens, on obſervera les régles que nous venons de donner, obſervant toujours de rendre les expreſſions nettes autant qu'on le peut, comme on voit dans les exemples ſuivans, dont il ſeroit inutile que je donnaſſe une plus ample explication.

Troiſiéme exemple.

$$\begin{array}{r} 4a-2b+3c-d \\ 2a+3b-c+4d \\ \hline 6a+b+2c+3d \end{array}$$

Quatriéme exemple.

$$\begin{array}{r} 3a-5b+2c+d-f \\ 5a-3b-4c-3d \\ \hline 8a-8b-2c-2d-f \end{array}$$

De la Souſtraction des grandeurs littérales.

V. Lorſqu'il s'agit de ſouſtraire une grandeur d'une autre grandeur, il peut arriver, 1°. ou que toutes les deux aïent le ſigne plus; 2°. que toutes deux aïent le ſigne moins; 3°. que la grandeur à ſouſtraire ait le ſigne plus; 4°. enfin, que la grandeur à ſouſtraire ait le ſigne moins; & dans tous ces cas, la régle générale eſt de changer le ſigne de la grandeur à ſouſtraire, en donnant moins au reſte de la ſouſtraction, ſi elle a le ſigne plus, & plus ſi elle a le ſigne contraire.

Ainſi pour retrancher $+a$ de $+b$, il faut écrire $a-b$; car ſi j'ai, par exemple, 10 écus, & qu'on m'en retranche 4, je n'en ai plus que 10 moins 4.

Pour ſouſtraire $-a$ de $-b$, il faut écrire $-b+a$; car ſi je dois d'un côté 10 écus, & que d'un autre on me retranche une dette de 4, ce qu'on ne peut faire qu'en païant 4 pour moi, ma dette 10 diminuëra, & l'on ne pourra pas dire que j'aïe un défaut qui ſoit -10, mais ſeulement un défaut qui ſera $-10+4$, c'eſt-à-dire -10, dont 4 ſont païés, ce qui ſe réduit à -6 en ſe ſervant des chiffres; mais en ſe ſervant des lettres, on ne peut faire autrement que d'écrire $-b+a$.

Pour retrancher $+a$ de $-b$, il faut écrire $-b-a$; car ſi je dois 10 écus, & que je m'endette encore de 4, ou qu'on m'en ôte encore 4, au lieu d'un défaut que j'avois, j'en aurai deux, qui ſeront $-10-4$.

Enfin, pour ſouſtraire $-a$ de $+b$, il faut écrire $+b+a$; car ſi j'ai 10 écus, & que quelqu'un m'en donne 4 pour païer une dette de 4, j'aurai 10 écus $+4$ écus.

Quand l'une & l'autre grandeur ſont marquées de la même

lettre, au lieu d'écrire dans le premier cas $+a-a$, on n'écrira rien, parce que le plus détruit le moins, & il en ſera de même dans le ſecond cas qui donne $-a+a$; dans le troiſiéme, au lieu de $-a-a$, on écrira $-2a$, & dans le quatriéme, au lieu de $+a+a$, on écrira $+2a$.

Et ſi la grandeur ſur laquelle on doit faire la ſouſtraction avoit un chiffre à gauche, & la grandeur à ſouſtraire un autre ou plus grand, ou plus petit, on ſuivroit toujours les mêmes régles, en obſervant ce que nous avons dit pour la netteté des expreſſions; ainſi pour ſouſtraire $+2a$ de $+3a$, au lieu d'écrire $3a-2a$, on écriroit $+a$, parce que 3 moins 2, font 1: pour ſouſtraire $-4a$ de $+3a$, au lieu d'écrire $+3a+4a$, on écriroit $7a$: pour ſouſtraire $+5a$ de $-6a$, au lieu d'écrire $-6a-5a$, on écriroit $-11a$; & pour ſouſtraire $-2a$ de $-7a$, au lieu d'écrire $-7a+2a$, on écriroit $-5a$.

La ſouſtraction des grandeurs complexes ſe fait de la même maniere, comme on peut voir dans les exemples ci-joints.

Premier exemple.

$3a+3b+c$
$2a+2b$

$a+b+c$

Second exemple.

$5a-7b+3c-6d$
$2a-2b+2c+4d$

$3a-9b+c-10d$

Troiſiéme exemple.

$8a-6b-4c-5d$
$7a+6b+3c+8d$

$a-12b-7c-13d$

Quatriéme exemple.

$5a-4b-2c-3d$
$a+4b+3c+6d$

$4a-8b-5c-9d$

De la multiplication des grandeurs littérales.

VI. Il peut arriver à l'égard de la multiplication, les mêmes cas que nous avons obſervés à l'égard de la ſouſtraction, c'eſt-à-dire, ou que la grandeur à multiplier & le multiplicateur aïent l'un & l'autre le ſigne plus, ou l'un & l'autre le ſigne moins, ou que le premier aïant le ſigne plus, le ſecond ait le ſigne moins, ou que le premier aïant le ſigne moins, l'autre ait le ſigne plus; & pour cela on donne deux régles que l'on exprime ordinairement ainſi: *Plus par plus*, ou *moins par moins*, *donne plus*, & *plus par moins*, ou *moins par plus*, *donne moins*; ce qui ſignifie que

lorſque les grandeurs à multiplier ont le même ſigne, le produit doit avoir le ſigne plus; & lorſque leurs ſignes ſont différens, le produit doit avoir le ſigne moins. Ces régles ſont fondées ſur la nature même de la multiplication, ainſi que nous allons le démontrer.

Nous avons dit ailleurs que la multiplication étoit une opération, par laquelle on prend la grandeur à multiplier autant de fois que le multiplicateur contient d'unités : donc ſi le multiplicateur contient trois unités 4, 5, 6, &c. il faut prendre la grandeur à multiplier 3 fois, 4 fois, &c. & ſi le multiplicateur n'a point d'unités, il ne faut point prendre du tout la grandeur à multiplier; & par la même raiſon, ſi le multiplicateur au lieu d'avoir 2, 3, 4 unités, &c. en a moins 2, moins 3, moins 4, &c. il faut prendre la grandeur à multiplier moins 2 fois, moins 3, moins 4, &c. d'où il ſuit qu'en ſuppoſant que la grandeur à multiplier ſoit poſitive ou qu'elle ait le ſigne plus, il eſt vrai de dire que plus, multiplié par plus, doit donner plus, & plus multiplié par moins, doit donner moins.

De même ſi nous ſuppoſons que la grandeur à multiplier ait le ſigne moins, & que le multiplicateur ſoit poſitif, enſorte qu'il contienne 2, 3, 4 unités, &c. il eſt ſûr qu'il faut prendre la grandeur à multiplier 2, 3, 4 fois, &c. & comme cette grandeur eſt un défaut, le produit ſera donç ce défaut pris 2, 3, 4, fois, &c. & aura par conſéquent le ſigne moins; ainſi moins par plus doit donner moins.

Enfin, ſi nous ſuppoſons que la grandeur à multiplier ait le ſigne moins, & que le multiplicateur ſoit négatif, enſorte qu'au lieu de contenir 2, 3, 4 unités, &c. il en contienne moins 2, moins 3, moins 4, &c. il faudra prendre la grandeur à multiplier qui eſt un défaut, non pas 2, 3, 4 fois, &c. mais moins 2, moins 3, moins 4 fois, &c. Or comme on ne peut avoir moins un défaut qu'en aïant le contraire de ce défaut, il s'enſuit que pour prendre moins 2, moins 3, moins 4 fois, &c. la grandeur à multiplier qui eſt un défaut, il faudra prendre 2, 3, 4 fois ſon contraire, & par conſéquent mettre plus au produit; car le contraire de moins eſt plus, donc moins par moins doit donner plus.

Ces deux régles paroiſſoient autrefois ſi difficiles, qu'on leur avoit donné le nom de *Pont aux ânes.* On peut juger, par l'explication que je viens d'en faire, ſi cette difficulté provenoit du fonds même des régles, ou de la mauvaiſe maniere dont on les enſeignoit.

Pour multiplier donc $+a$ par $+b$, on écrira $+ab$, ou $a \times b$, ainſi que nous avons dit en expliquant les ſignes de l'Algebre.

Pour multiplier $-a$ par $-b$, on écrira encore $+ab$, mais pour multiplier $+a$ par $-b$, ou $-a$ par $+b$, on écrira $-ab$.

La multiplication des grandeurs cõplexes ſe fait à peu près comme la multiplication par chiffres, c'eſt-à-dire, en multipliant tous les termes du nombre à multiplier par le premier terme du multiplicateur, puis par le ſecond, puis par le troiſiéme, &c. obſervant toujours ce que nous venons de dire à l'égard des ſignes plus & moins.

Ainſi pour muliplier $a+b$ par $a-b$, je multiplie les

Premier exemple.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab \\ \quad -bb \\ \hline aa \quad -bb \end{array}$$

Second exemple.

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ a-b-c-d \\ \hline aa+ab-ac \\ \quad -ab \quad -bb+bc \\ \quad\quad -ac \quad -bc+cc \\ \quad\quad\quad\quad -ad-bd+cd \\ \hline aa \quad -2ac-bb \quad +cc-ad-bd+cd \end{array}$$

Troiſiéme exemple.

$$\begin{array}{r} a+b-c+d \\ a-b+c-d \\ \hline aa+ab-ac+ad \\ \quad -ab \quad\quad -bb+bc-bd \\ \quad\quad +ac \quad\quad +bc \quad -cc+cd \\ \quad\quad\quad -ad \quad\quad -bd \quad +cd-dd \\ \hline aa \;*\;*\;* \quad -bb+2bc-2bd-cc+2cd-dd \end{array}$$

Quatriéme exemple.

$$\begin{array}{r} a-b-c-d \\ -a+b+c+d \\ \hline -aa+ab+ac+ad \\ \quad +ab \quad\quad -bb-bc-bd \\ \quad\quad +ac \quad\quad -bc \quad -cc-cd \\ \quad\quad\quad -ad \quad\quad -bd \quad -cd-dd \\ \hline -aa+2ab+2ac+2ad-bb-2bc-2bd-cc-2cd-dd \end{array}$$

deux termes *a* & *b* du nombre à multiplier par le premier terme *a* du multiplicateur, en disant : +*a* par +*a* donne +*aa* ; +*a* par +*b*, donne +*ab* ; cela fait je multiplie de nouveau les deux termes *a* & *b* par −*b*, en disant : +*a* par −*b*, donne −*ab*, que j'écris sous le terme plus *ab*, à cause que l'un & l'autre ont les mêmes lettres. +*b* par −*b*, donne −*bb* ; ensuite je corrige l'expression, en ne mettant rien à la place de +*ab*−*ab* qui s'entredétruisent, & je trouve que le produit est *aa*−*bb*.

On fera de même, pour les exemples ci-joints, mettant toujours les produits qui ont les mêmes lettres les uns sous les autres, afin de pouvoir ensuite corriger l'expression, soit en ajoutant ensemble les grandeurs qui auront les mêmes signes, soit en ne mettant rien ou une étoile à la place de ceux qui s'entredétruisent.

Il est bon d'observer ici qu'à l'égard des expressions Algebriques, les lettres conservent toujours leur valeur, quelque place qu'elles occupent les unes à l'égard des autres ; ainsi *ab* est la même chose que *ba*, car si *a* vaut 2, & *b* vaut 4, deux fois 4 ou 4 fois 2 sont la même chose ; de même *a*−*b* & −*b*+*a* sont la même chose, car 2 moins 4 n'est pas différent de moins 4 plus 2 ; de même *aa*−*bb* ou −*bb*+*aa* ne différent point, car 4 moins 16, ou moins 16+4 reviennent au même, c'est pourquoi il est indifférent de commencer la multiplication par la droite ou par la gauche ; au lieu que dans l'Arithmetique ce n'est pas la même chose, parce que les caractéres de l'Arithmetique changent de valeur selon les différentes places qu'ils occupent ; desorte que 12 & 21 ne sont pas la même chose, à cause que dans 12 le caractére 1 vaut une dixaine, & 2 ne vaut que deux unités, & au contraire dans 21, 2 vaut deux dixaines, & 1 ne vaut qu'une unité, & par conséquent une dixaine & deux unités n'est pas le même chose que deux dixaines & une unité.

De la Division des grandeurs littérales.

VII. Il en est des signes + & − à l'égard de la division, de même qu'à l'égard de la multiplication, c'est-à-dire que plus par plus ou moins par moins doivent donner plus, & plus par moins ou moins par plus doivent donner moins ; & pour nous en mieux convaincre, supposons que le dividende soit 6 & le diviseur 2, 1°. si l'un & l'autre ont le signe plus, il est évident que 6 contien-

dra positivement trois fois 2, & par conséquent que le quotient doit être plus 3. 2°. Si l'un & l'autre a le signe moins, il est encore visible que le défaut 6 contiendra trois fois le défaut 2, & qu'ainsi le quotient doit encore être plus 3 ; donc plus par plus & moins par moins donnent également plus. 3°. Si le dividende a le signe plus & le diviseur le signe moins, en ce cas 6 ne contiendra pas trois fois le défaut 2, mais trois fois le contraire de ce défaut, ou moins trois fois ce défaut, car moins trois fois un défaut c'est plus trois fois son contraire, ainsi le quotient sera $+3$. 4°. Si le dividende a le signe moins, & le diviseur le signe plus, il est encore sûr que le défaut 6 ne contiendra pas trois fois 2, mais le contraire de trois fois 2, c'est-à-dire moins trois fois 2, & qu'ainsi le quotient sera moins 3 : donc moins par plus, ou plus par moins doivent donner moins.

Pour diviser donc $+a$ par plus b, ou $-a$ par $-b$, on écrira $\frac{a}{b}$ ou $+\frac{a}{b}$, & pour diviser $+a$ par $-b$, ou $-a$ par $+b$, on écrira $-\frac{a}{b}$.

Et si le dividende & le diviseur sont marqués par une même lettre a, au lieu d'écrire $+$ ou $-\frac{a}{a}$, on écrira $+$ ou -1, parce que a contient une fois a ; de même si le dividende étoit $-3a$ & le diviseur $-a$, au lieu d'écrire $+\frac{3a}{a}$, on écriroit $+3$, parce que $3a$ contiennent a trois fois ; & si le dividende étoit $+ab$ & le diviseur $-a$, au lieu d'écrire $-\frac{ab}{a}$, on écriroit $-b$, parce que ab étant le produit de a par b, si on divise par a le quotient doit être b, de même que si on divisoit par b le quotient seroit a. De même, au lieu de $\frac{abc}{ab}$, on doit écrire simplement c ; au lieu de $\frac{aabb}{ab}$, on doit écrire ab, parce que $aabb$ étant le produit de ab par ab, si on divise par ab, le quotient doit être ab. De même encore, au lieu de $\frac{abc}{abd}$, on doit écrire $\frac{c}{d}$, parce que le numérateur abc étant le produit de c par ab, & le dénominateur abd étant le produit de d par le même nombre ab, si on les divise l'un & l'autre par ab, les quotiens c & d seront encore en même raison ; par où l'on voit que lorsqu'il se trouve des grandeurs marquées par les mêmes lettres au dividende & au diviseur, il faut en effacer autant d'un côté que de l'autre, & le reste est le quotient, ce qu'il faut bien observer ; car il arrive souvent que

l'expreſſion devient par-là beaucoup plus claire & moins embarraſſante, comme on peut voir dans celle-ci, $\frac{aabbcdef}{abbcde}$ qui ſe réduit à af, en obſervant ce que nous venons d'enſeigner.

La diviſion des grandeurs complexes ſe fait à peu près comme la diviſion ordinaire. Ainſi pour diviſer $aa+2ab+bb$ par $a+b$, j'écris le diviſeur $a+b$ ſous le dividende, & je dis : $+aa$ diviſé par $+a$, donne $+a$, que j'écris au quotient ; enſuite je dis : $+a$ par $+a$, fait $+aa$, & de $+aa$ ôtez $+aa$, reſte 0 ; $+a$ par $+b$ fait $+ab$, & plus $2ab$ retranchez $+ab$, reſte plus ab ; enſuite j'abaiſſe le troiſiéme terme $+bb$ à côté du reſte $+ab$, & écrivant le diviſeur pardeſſous, je dis : $+ab$ diviſé par $+a$, donne $+b$, que j'écris au quotient ; $+b$ par $+a$ fait $+ab$, & de $+ab$ ôtez $+ab$, reſte 0 ; $+b$ par $+b$ fait $+bb$, & de $+bb$ ôtez $+bb$, reſte zero, ainſi le quotient eſt $a+b$.

Premier exemple.

$$\begin{array}{l|l} aa+2ab+bb & a+b \\ \hline a+b & \\ \hline 0+ab+bb & \\ \quad a+b & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Second exemple.

$$\begin{array}{l|l} aa-2ab+bb & a-b \\ \hline a-b & \\ \hline 0-ab+bb & \\ \quad a-b & \\ \hline 0\ \ 0 & \end{array}$$

Troiſiéme exemple.

$$\begin{array}{l|l} aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc & a+b+c \\ \hline a+b+c & \\ \hline 0+ab+bb+ac+2bc & \\ \quad a+b+c & \\ \hline 0\ \ 0\ \ +ac+bc+cc & \\ \quad a+b+c & \\ \hline 0\ \ 0\ \ 0 & \end{array}$$

Je n'explique point le ſecond exemple, parce qu'il ne différe du premier que par les ſignes plus ou moins. Quant au troiſiéme, j'écris le diviſeur $a+b+c$ ſous le dividende, obſervant de mettre chaque lettre

ſous

ſous les termes qui en ont d'égales, c'eſt-à-dire b ſous $2ab$, & c ſous $2ac$; enſuite je dis : aa diviſé par a, donne $+a$ que j'écris au quotient ; $+a$ par $+a$, fait $+aa$, & de $+aa$, ôtez $+aa$, reſte o ; $+a$ par $+b$, donne $+ab$, & de $+2ab$, ôtez $+ab$, reſte $+ab$; $+a$ par $+c$, donne $+ac$, & de $+2ac$, ôtez $+ac$, reſte $+ac$. Enſuite j'abaiſſe le terme $+bb$ & le terme plus $2bc$, & écrivant par-deſſous le reſte le diviſeur $a+b+c$, je dis : ab diviſé par $+a$, donne b, que j'écris au quotient ; $+b$ par $+a$, fait $+ab$, & de $+ab$, ôtez $+ab$, reſte o ; $+b$ par $+b$, fait $+bb$; & de $+bb$, ôtez $+bb$, reſte o ; $+b$ par $+c$, fait $+bc$; & de $+2bc$, ôtez bc, reſte $+bc$. J'abaiſſe le dernier terme cc du dividende, & le terme ac ſur lequel je n'ai point opéré ; puis écrivant le diviſeur $a+b+c$ ſous le reſte, je dis : $+ac$ diviſé par a, donne $+c$, que j'écris au quotient ; plus c par $+a$, fait $+ac$, & de plus ac, ôtez $+ac$, reſte zero ; plus c par $+b$, fait $+bc$, & de $+bc$, ôtez $+bc$, reſte zero ; $+c$ par $+c$, fait $+cc$, & de $+cc$, ôtez $+cc$, reſte rien ; ainſi le quotient eſt $+a+b+c$.

Le quatriéme exemple n'a pas beſoin d'explication. Quant au cinquiéme, après avoir écrit $a-f$, en mettant $-af$ ſous le terme $-af$, je dis : aa diviſé par a, donne $+a$, que j'écris au quotient ; $+a$ par $+a$, fait $+aa$, & de plus aa, ôtez $+aa$, reſte rien. $+a$ par $-f$, fait $-af$, & de $-af$, ôtez $-af$, reſte rien ; car $-af$ & $+af$ qu'il faudroit écrire, à cauſe que le nombre à ſouſtraire a le ſigne moins, ſe détruiſent l'un & l'autre, & par conſéquent il ne reſte rien. J'abaiſſe les termes $+ab-fb$, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je dis : $+ab$ diviſé par $+a$, donne $+b$, que j'écris au quotient ; $+b$ par $+a$, fait $+ab$, & de $+ab$, ôtez $+ab$, reſte rien ; $+ab$ par $-f$, fait $-fb$, & de $-fb$, ôtez $-fb$, il ne reſte rien ; ainſi le quotient eſt $a+b$.

Quatriéme exemple.

$ac+cb+ad+db$	$c+d$
$a+b$	
o o $a+b$	
o o	

Cinquiéme exemple.

$aa+ab-af-fb$	$a+b$
$a \quad -f$	
$o+ab \quad o-fb$	
$a- \quad -f$	
o o	

Il arrive ſouvent qu'on eſt arrêté tout court dans ces diviſions, parce qu'en multipliant le quotient par quelques-unes des lettres du diviſeur, on ne trouve point de termes dans le dividende de qui on puiſſe retrancher ce quotient; mais voici comment il faut faire en pareil cas.

Prenons le produit $aa-bb$ du premier exemple que nous avons donné pour la multiplication des grandeurs complexes, & diviſons-le par $a+b$ qui étoit le nombre à multiplier, le quotient doit être le multiplicateur $a-b$; voïons donc comment nous pouvons le trouver. J'écris $a+b$ ſous le dividende, & je dis: aa diviſé par $+a$, donne $+a$, que j'écris au quotient; $+a$ par $+a$, fait aa, & de aa retranchez aa, reſte rien. $+a$ par $+b$, fait $+ab$; mais il n'y a point de termes au dividende de qui je puiſſe retrancher $+ab$, c'eſt pourquoi je ſuppoſe que le dividende contient $+ab$, & je dis: De $+ab$, retranchez $+ab$, reſte rien. Or en ſuppoſant que le dividende contenoit plus ab, je l'ai agrandi d'autant, ainſi il faut que je le diminuë de la même quantité, & pour cela je lui donne $-ab$, que j'écris en-deſſous comme un reſte. J'abaiſſe enſuite le dernier terme $-bb$, & écrivant le diviſeur $a+b$ par-deſſous, je dis: $-ab$ diviſé par $+a$, donne $-b$, que j'écris au quotient; $-b$ par $+a$, fait $-ab$, & de $-ab$, ôtez $-ab$, reſte rien: $-b$ par $+b$, fait $-bb$, & de $-bb$, ôtez $-bb$, reſte rien; ainſi le quotient eſt $a-b$, tel qu'il doit être effectivement.

$aa-bb$	$a-b$
$a+b$	
$0-ab-bb$	
$a+b$	
0 0	

Prenons de même le ſecond exemple, dont le produit étoit $aa-2ac-bb+cc-ad-bd+cd$, & diviſons-le par $a-b-c-d$ qui en étoit le multiplicateur; je mets $-c$ avant moins b, parce que je m'apperçois que le ſecond terme du dividende eſt

$aa-2ac-bb+cc-ad-bd+cd$	$a-c+b$
$a-c-b-d$	
$0-ac+ab+cc \quad 0+cd$	
$a \quad -c-b-d$	
$0 \quad 0 \quad 0$	
$+ab \quad -bc-bb-bd$	
$a \quad -c-b-d$	
0 0 0	

$-2ax$, & je dis : aa diviſé par a, donne a, que j'écris au quotient ; a par a, fait aa, & de aa, ôtez aa, reſte zero ; $+a$ par $-c$, fait moins ac, & de moins $2ac$, ôtez $-ac$, reſte $-ac$. Il eſt à propos de mettre un point ſur les termes ſur leſquels on opére, afin de les diſtinguer de ceux ſur leſquels on n'a pas encore opéré ; $+a$ par $-b$, fait $-ab$, & comme le dividende ne contient point de termes de qui je puiſſe ſouſtraire $-ab$, je ſuppoſe qu'il a $-ab$, & de $-ab$, ôtez $-ab$, reſte rien ; mais comme par cette ſuppoſition j'ai diminué le dividende de la quantité $-ab$, je lui donne $+ab$, afin de faire compenſation, & j'écris $+ab$ avec le reſte ; $+a$ par $-d$, fait $-ad$, & de $-ad$, ôtez $-ad$, reſte rien. J'abaiſſe les termes $+cc$ & $+cd$, parce que je m'apperçois que la diviſion de $-ac$ par a va me donner $-c$ au quotient, & écrivant le diviſeur par-deſſous, j'écris $-c$ au quotient ; $-c$ par $+a$, fait $-ac$, & de $-ac$, ôtez $-ac$, reſte rien ; $-c$ par $-c$, fait $+cc$, & de plus cc, ôtez $+cc$, reſte rien ; $-c$ par $-d$, fait $+cd$, & de plus cd, ôtez $+cd$, reſte rien ; $-c$ par $-b$, fait plus cb, & comme il n'y a point de termes au dividende de qui je puiſſe ôter $+cb$, je ſuppoſe que le dividende a $+cb$, & de $+cb$, ôtez $+cb$, reſte rien ; mais comme j'ai agrandi le dividende de la quantité cb, je la lui retranche en écrivant $-cb$ comme un reſte, & j'abaiſſe le terme $+ab$ du reſte précédent, & les termes $-bb$ & $-bd$ du dividende ſur leſquels je n'ai point encore opéré, j'écris le diviſeur par-deſſous, & trouvant que $+ab$ diviſé par $+a$ donne b, j'écris b au quotient ; $+b$ par $+a$, fait $+ab$, & de plus ab, ôtez $+ab$, reſte rien ; $+b$ par $-c$, fait $-bc$, & de $-bc$, ôtez $-bc$, reſte rien ; $+b$ par $-b$, fait $-bb$, & de $-bb$, ôtez $-bb$, reſte rien ; enfin, $+b$ par $-d$, fait $-bd$, & de $-bd$, ôtez $-bd$, reſte rien ; ainſi le quotient eſt $a-c+b$, qui eſt le nombre à multiplier de ce ſecond exemple ; ſi ce n'eſt que $-c$ ſe trouve avant $+b$, ce qui ne fait rien, parce que la tranſpoſition des lettres ne leur fait point perdre leur valeur.

Prenons encore le troiſiéme exemple, dont le produit étoit $aa-bb+2bc-2bd-cc+2cd-dd$, & diviſons-le par $a-b+c-d$ qui en étoit le multiplicateur.

Je dis aa diviſé par a, donne a, que j'écris au quotient ; a par a, fait aa, & de aa, ôtez aa, reſte rien ; $+a$ par $-b$, fait $-ab$, & de $-ab$ que je ſuppoſe, ôtez $-ab$, reſte rien ; & j'écris par-deſſous $+ab$, à cauſe que ma ſuppoſition avoit retranché ab au dividende ; $+a$ par $+c$, fait $+ac$, & de $+ac$ que je ſuppoſe,

reſte rien, & j'écris $-ac$ par-deſſous pour la même raiſon; $+c$ par $-d$, fait $-ad$, & de $-ad$ que je ſuppoſe, ôtez $-ad$, reſte rien, & j'écris $+ad$ par-deſſous. J'avertis de nouveau qu'il faut mettre des points ſur les termes ſur leſquels on opére, tant ſur ceux du dividende, que ſur ceux des reſtes, parce que ſans cela il ſeroit facile de ſe tromper.

J'abaiſſe les termes $-bb+2bc-2bd$, parce que je m'apperçois que la diviſion va me donner $+b$ au quotient, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je dis: $+b$ par a, fait ab, & de ab, ôtez ab, reſte rien; $+b$ par $-b$, fait $-bb$, & de $-bb$, ôtez $+bb$, reſte rien; $+b$ par $+c$, fait plus bc, & de $+2bc$, ôtez $+bc$, reſte $+bc$; $+b$ par $-d$, fait $-bd$, & de $-2bd$, ôtez $-bd$, reſte $-bd$.

aa	$-bb$	$+2bc$	$-2bd$	$-cc$	$+2cd$	$-dd$	$a+b-c+d$	
a	$-b$	$+c$	$-d$					
0	$+ab$	$-ac$	$+ad$	$-bb$	$+2bc$	$-2bd$		
	a			$-b$	$+c$	$-d$		
	0	$-ac$		0	$+bc$	$-bd$	$-cc$	$+2cd$
		a			$-b$		$+c$	$-d$
		0	$+ad$		0	$-bd$	0	$+cd$ $-dd$
			a			$-b$		$+c$ $-d$
			0			0		0 0

J'abaiſſe le terme $-ac$ du premier reſte, & parce que la diviſion me donnera $-c$ au quotient, j'abaiſſe les termes $-cc+2cd$ du dividende, à cauſe que la lettre c ſe trouve dans chacun d'eux; j'écris le diviſeur par-deſſous & $-c$ au quotient; $-c$ par $+a$, fait $-ac$, & de $-ac$, ôtez $-ac$, reſte rien; $-c$ par $-b$, fait $+cb$, & de $+cb$, ôtez $+cb$, reſte rien; $-c$ par $+c$, fait $-cc$, & de $-cc$, ôtez $-cc$, reſte rien; $-c$ par $-d$, fait $+cd$, & de $+2cd$, ôtez $+cd$, reſte $+cd$.

J'abaiſſe le terme $+ad$ du premier reſte, le terme $-bd$ du ſecond reſte, & le terme $-dd$ du dividende, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je trouve que le quotient eſt $+d$; ainſi je dis: $+d$ par $+a$, fait $+ad$, & de $+ad$, ôtez $+ad$, reſte rien; $+d$ par $-b$, fait $-bd$, & de $-bd$, ôtez $-bd$, reſte rien; $+d$ par $+c$, fait $+cd$, & de $+cd$, ôtez $+cd$, reſte rien. Enfin, $+d$ par $-d$, fait $-dd$, qui retranché de $-dd$, ne laiſſe rien; ainſi le quotient eſt $a+b-c+d$, qui étoit effectivement le nombre à multiplier de ce troiſiéme exemple.

Il ſera à propos que ceux qui liront ceci le liſent la plume à la main, & faſſent eux-mêmes les opérations, en marquant les points de la maniere que j'ai dit ; ils en concevront mieux les raiſons, & ils en apprendront en même-tems la pratique.

On peut venir à bout de bien de diviſions, en opérant comme je viens d'enſeigner ; & quand cela ne ſe peut pas, il arrive qu'après quelques opérations le dividende ni ſes reſtes ne contiennent plus de termes qui aïent la même lettre que le premier terme du diviſeur, ce qui fait connoître que l'opération ne ſçauroit ſe faire exactement : en voici un ou deux exemples.

Suppoſons $aa-2ab+3ac+4bb$ à diviſer par $a+b+c$, après avoir écrit a au quotient, je dis : a par a, fait aa, & de aa, ôtez aa, reſte zero ; $+a$ par plus b, fait $+ab$, & de $-2ab$, ôtez $+ab$, reſte $-3ab$; $+a$ par $+c$, fait $+ac$, & de plus $3ac$, ôtez $+ac$, reſte $+2ac$. J'abaiſſe le dernier terme $+4bb$ du dividende, & écrivant le diviſeur ſous le reſte, je trouve $-3b$ au quotient ; $-3b$ par $+a$, fait $-3ab$, & de $-3ab$, ôtez $-3ab$, reſte zero ; $-3b$ par $+b$, fait $-3bb$, & de $+4bb$, ôtez $-3bb$, reſte $+7bb$; moins $3b$ par $+c$, fait $-3bc$, & de $-3bc$ que je ſuppoſe reſte rien, & j'écris $+3bc$ pour corriger ma ſuppoſition. J'abaiſſe le terme $+2ac$ du premier reſte, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je trouve $+2c$ pour le quotient ; $+2c$ par $+a$, fait $+2ac$, & de plus $2ac$, ôtez $+2ac$, reſte rien ; $+2c$ par $+c$, fait $+2cc$, & de plus $2cc$ que je ſuppoſe, ôtez $+2cc$, reſte rien, & j'écris $-2cc$ pour corriger ma ſuppoſition ; $+2c$ par $+b$, fait $+2bc$, & de $+3bc$, reſte $+bc$. J'abaiſſe le terme $+7bb$ du ſecond reſte, & je ne trouve plus de terme dans le reſte $-2cc+bc+7bb$ qui puiſſe être diviſé par le premier terme a du diviſeur, ce qui me fait connoître que la diviſion ne peut ſe faire exactement. Il eſt vrai que la tranſpoſition des lettres ne gâtant rien, je pourrois mettre pour diviſeur $b+a+c$, au lieu de $a+b+c$, & qu'alors le premier terme b pourroit diviſer le reſte, & de même ſi je mettois pour diviſeur $c+b+a$,

$aa-2ab+3ac+4bb$	$a-3b+2c$
$a \quad +b \quad +c$	
$0 \quad -3ab+2ac+4bb$	
$\quad a \quad + \quad b+c$	
$0 \quad +2ac+7bb+3bc$	
$\quad a \quad +b \quad +c$	
$0 \quad +7bb+bc-2cc$	

mais je n'avancerois rien ; car après quelques opérations, il ne se trouveroit plus de termes qui puſſent être diviſés par *b* ou par *c*, & il s'en trouveroit au contraire de nouveaux qui pourroient être diviſés par *a*, ce qui ne finiroit point, & ne ſauroit être d'aucune utilité.

Suppoſons encore $aa-bb+cc$ à diviſer par $a+b-c$, après avoir écrit le diviſeur au-deſſous & trouvé le quotient *a*, je dis : $+a$ par $+a$, fait aa, & de aa, ôtez aa, reſte zero ; $+a$ par $+b$, fait $+ab$, & de plus ab que je ſuppoſe, ôtez $+ab$, reſte rien, & j'écris $-ab$ pour corriger ma ſuppoſition : $+a$ par $-c$, fait $-ac$, & de $-ac$ que je ſuppoſe, ôtez $-ac$, reſte rien, & j'écris $+ac$ pour corriger ma ſuppoſition. J'abaiſſe le terme $-bb$ du dividende, parce que je vois que la diviſion va me donner $-b$, & aïant écrit le diviſeur par-deſſous le reſte & le quotient $-b$, je dis : $-b$ par $+a$, fait $-ab$, & de $-ab$, ôtez $-ab$, reſte rien, $-b$ par $+b$, fait $-bb$, & de $-bb$, ôtez $-bb$, reſte rien ; $-b$ par $-c$, fait $+bc$, & de $+bc$ que je ſuppoſe, ôtez $+bc$, reſte rien, & j'écris $-bc$ pour corriger ma ſuppoſition. J'abaiſſe le terme $+ac$ du premier reſte, & le terme $+cc$ du dividende, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je trouve $+c$ au quotient ; $+c$ par $+a$, fait $+ac$, & de plus ac, ôtez $+ac$, reſte rien ; $+c$ par $+b$, fait $+bc$, & de $-bc$, ôtez $+bc$, reſte $-2bc$; Enfin, $+c$ par $-c$, fait $-cc$, & de $+cc$, ôtez $-cc$, reſte $+2cc$; ainſi le quotient eſt $a-b+c$, & il reſte $-2bc+2cc$ qui ne peuvent ſe diviſer par le premier terme *a* du diviſeur, ce qui me fait voir que la diviſion ne ſauroit être exacte ; car ſi je veux tranſpoſer les termes du diviſeur, en mettant $b-c+a$, au lieu de $a+b-c$, je n'avancerai pas davantage, ainſi qu'il eſt aiſé de voir en l'éprouvant.

$$\begin{array}{l|l}
aa-bb+cc & a-b+c \\
\hline
a+b-c & \\
\hline
0\ -ab+ac-bb & \\
\quad\ a\quad +b\ -c & \\
\hline
0\ +ac\ 0\ -bc+cc & \\
\quad\ a\quad\ +b\ -c & \\
\hline
0\quad -2bc+2cc &
\end{array}$$

Prenons donc le reſte $-2bc+2cc$, & diviſons-le par $+b-c+a$, le premier quotient ſera $-2c$, je dis donc $-2c$ par $+b$, fait $-2bc$, & de $-2bc$, ôtez $-2bc$, reſte rien ; $-2c$ par $-c$, fait $+2cc$, & de $+2cc$, ôtez $+2cc$, reſte rien ; $-2c$ par $+a$, fait $-2ca$, & de $-2ca$ que je ſuppoſe, ôtez $-2ca$, reſte rien, & j'écris $+2ca$ pour corriger ma ſuppoſition ; il reſte donc $+2ca$ qui

ne peut plus se diviſer par $+b-c+a$, mais en mettant de nouveau pour diviſeur $a+b-c$, je trouve au quotient $+2c$, je dis donc : $+2c$ par a, fait $+2ca$, & de $+2ca$, ôtez $+2ca$, reſte rien ; $+2c$ par $+b$, fait $+2bc$, & de $+2bc$ que je ſuppoſe, ôtez $+2bc$, reſte rien, & j'écris $-2bc$ pour corriger ma ſuppoſition ; $+2c$ par $-c$, fait $-2cc$, & de $-2cc$ que je ſuppoſe, ôtez $-2cc$, reſte rien, & j'écris $+2cc$ pour corriger ma ſuppoſition ; j'ai donc au quotient $-2c+2c$ & un reſte $-2bc+2cc$, qui eſt préciſément le même reſte que ci-deſſus, ainſi je n'en ſuis pas plus avancé ; car $-2c+2c$ qui ſont venus au quotient ſont égaux à zero, & le reſte étant le même, ce ſeroit un travail inutile & perdu que de recommencer.

$-2bc+2cc$	$-2c+2c$
$+b-c+a$	
$0\ 0\ +2ca$	
$a+b-c$	
$0\ -2bc+2cc$	

Des puiſſances, des grandeurs littérales incomplexes & de leur calcul.

VIII. On appelle *puiſſance* d'une grandeur les différens dégrés par leſquels elle s'éleve, en ſe multipliant elle-même pluſieurs fois ſucceſſivement. Les Anciens appelloient premiere puiſſance d'une grandeur, la premiere multiplication de cette grandeur par elle-même, c'eſt-à-dire ſon quarré ; mais aujourd'hui on appelle premiere puiſſance la grandeur elle-même, parce qu'elle eſt pour ainſi dire le premier pas qu'elle fait pour s'éloigner de l'unité ; ainſi ſi nous ſuppoſons que la grandeur ſoit a, ſa premiere puiſſance eſt a ; multipliant a par a, le produit aa eſt ſa ſeconde puiſſance ou ſon quarré ; multipliant aa par a, le produit aaa eſt ſa troiſiéme puiſſance ou ſon cube ; multipliant encore aaa par a, le produit $aaaa$ eſt ſa quatriéme puiſſance, & ainſi de ſuite ; deſorte que $aaaaa$ eſt la cinquiéme puiſſance ; $aaaaaa$ la ſixiéme ; $aaaaaaa$ la ſeptiéme, &c. ce que l'on peut continuer à l'infini.

Quelques Auteurs, à l'exemple des Anciens, appellent la quatriéme puiſſance *quarré de quarré* ; la cinquiéme *ſurſolide* ; la ſixiéme *quarré cube*, &c. mais on ſe paſſe communément de ces termes, & l'on ſe contente de dire quatriéme, cinquiéme, ſixiéme puiſſance, &c.

Pour abréger l'expreſſion de ces puiſſances, on n'écrit qu'une fois la lettre a avec un petit chiffre à droite, un peu plus élevé

que la lettre, lequel marque combien de fois la lettre devroit être écrite.

Par exemple, au lieu de aa, aaa, $aaaa$, $aaaaa$, &c. on écrit a^2, a^3, a^4, a^5, &c. ces chiffres s'appellent *exposans* des puissances, parce qu'ils marquent la puissance de la lettre à laquelle ils sont joints, & comme les puissances ne vont en augmentant les unes à l'égard des autres que d'une lettre, aussi ces exposans n'augmentent entr'eux que d'une unité, desorte que leur suite est la suite même des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Toutes les puissances de a, en commençant par la premiere qui est 1, font donc la suite a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, &c. qu'on pourroit continuer à l'infini. La puissance infinie se marque de ce signe $a\infty$. Ce que nous disons ici des puissances de a, doit s'entendre également des puissances de b, de c, & de telle autre grandeur que ce soit, de quelque maniere qu'elle soit exprimée.

Il ne faut pas confondre ces chiffres, qui sont les exposans des puissances, avec ceux qu'on met à gauche des lettres, & dont nous avons parlé ci-dessus; ceux-là ne marquent que l'addition réïtérée d'une grandeur, au lieu que ceux-ci en marquent les puissances, & par conséquent la multiplication. $3a$ marque que a est pris trois fois, & a^3 au contraire marque le cube de a, qui se fait par la multiplication réïtérée de a par lui-même, ce qui est bien différent; car si a vaut 4, $3a$ ne vaudra que 12, au lieu que a^3 vaudra 64, puisque quatre fois 4 font 16, & quatre fois 16 font 64. En un mot, tous les chiffres qu'on joint aux lettres, & qui n'en sont pas les exposans, s'écrivent toujours à gauche de ces lettres & de même niveau, & les exposans sont les seuls qu'on écrit à droite & un peu plus haut que les lettres, ce qu'il est important de bien observer pour ne pas tomber dans l'erreur.

Ces abréviations des puissances par le moïen des chiffres, ont donné lieu à un calcul très-commode, concernant la multiplication & la division des puissances d'une même grandeur les unes par les autres, & leur élévation à de plus hauts dégrés, de même que l'extraction de leurs racines: en voici les régles en peu de mots.

1°. Pour multiplier une puissance de a par une autre puissance de a, il faut ajouter ensemble les exposans de la puissance multipliante & de la puissance multipliée, & leur somme sera l'exposant du produit. Pour multiplier a^3 par a^5, on ajoutera ensemble les exposans 3 & 5, & leur somme 8 sera l'exposant du produit, qui

qui par conſéquent ſera a^8 ; car puiſque a^3 eſt la même choſe que aaa, & a^5 la même choſe que $aaaaa$, le produit de a^3 par a^5 doit être le même que le produit de aaa par $aaaaa$; or ce produit eſt $aaaaaaaa$, puiſque ſelon les régles de la multiplication, il faut écrire tout de ſuite le multiplicateur $aaaaa$; & le nombre à multiplier aaa, & $aaaaaaaa$ eſt la même choſe que a^8 ; donc la ſomme des deux expoſans 3 & 5 donne le véritable produit ; de même pour multiplier a^2 par a^9, il faut faire la ſomme 11 des deux expoſans 2 & 9, & le produit ſera a^{11}, & ainſi des autres.

2°. Pour diviſer une puiſſance de a par une autre puiſſance de a, il faut retrancher l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende, & le reſte ſera l'expoſant du quotient ; pour diviſer a^5 par a^2, on retranchera l'expoſant 2 de l'expoſant 5, & le reſte 3 ſera l'expoſant du quotient qui ſera par conſéquent a^3 ; car puiſque le dividende a^5 eſt la même choſe que $aaaaa$, & le diviſeur a^2 la même choſe que aa, & que pour diviſer $aaaaa$ par aa il faut retrancher deux a de part & d'autre, il eſt évident que le quotient aaa ſera le même que le quotient a^3 ; ainſi pour diviſer a^9 par a^3, on retranchera 3 de 9, & on écrira pour quotient a^6 ; de même pour diviſer a^1 par a^1, on retranchera l'expoſant 1 de l'expoſant 1, & le reſte $1-1$ ou zero ſera l'expoſant du quotient, qui par conſéquent ſera a^0 ; & a^0 vaudra 1, car a diviſé par a, donne 1, puiſque a eſt contenu une fois dans a : il faut bien prendre garde à cette expreſſion.

Delà il ſuit que ſi l'on diviſe a^0 par a^1, l'expoſant ſera -1, & le quotient a^{-1} ; car de 0 retranchez 1, le reſte eſt -1 ; de même, ſi l'on diviſe a^{-1} par a^1, l'expoſant ſera -2, & le quotient a^{-2} ; car de -1 retranchez un, le reſte eſt -2 ; & ſi l'on diviſe encore a^{-2} par a^1, l'expoſant ſera -3, & le quotient a^{-3} ; & continuant toujours de la même façon, on auroit une nouvelle ſuite de puiſſances, dont tous les expoſans ſeroient la ſuite négative des nombres naturels. Cette ſuite ſeroit donc a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, &c. & ainſi de ſuite juſqu'a l'infini, où la puiſſance ſeroit $a^{-\infty}$.

Cette ſuite pourroit s'exprimer d'une autre façon ; car puiſque a^0 eſt égal à 1, ſi l'on met 1 au lieu de a^0, & qu'on diviſe par a^1, on aura $\frac{1}{a^1}$ égal à a^{-1} ; & de même, ſi l'on diviſe $\frac{1}{a^1}$ par a^1, on aura $\frac{1}{a^2}$ égal à a^{-2} ; & ſi l'on diviſe $\frac{1}{a^2}$ par a^1, on aura $\frac{1}{a^3}$ égal à a^{-3}, & ainſi de ſuite à l'infini ; deſorte que la ſuite a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, &c. ſeroit la même que la ſuite $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$, &c.

Or ſi l'on conſidére bien ces deux ſuites, on verra que pour transformer la premiere en la ſeconde, il faut rendre ſes expoſans poſitifs, & mettre chacun de ſes termes au dénominateur d'une fraction, dont le numérateur doit être toujours 1; & de même pour transformer la ſeconde en la premiere, il faut effacer le numérateur de chacun de ſes termes, & rendre ſes expoſans négatifs.

a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{-0}, a^{-1}, a^{-2}, &c.

$\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^0}$, $\frac{1}{a^1}$, $\frac{1}{a^2}$, &c.

Mais que ſignifient ces ſuites? Le voici. Suppoſons que a ſoit 4, $\frac{1}{a^1}$ ſera par conſéquent $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{a^2}$ ſera $\frac{1}{16}$, & $\frac{1}{a^3}$ vaudra $\frac{1}{64}$; & ainſi l'une ou l'autre de ces ſuites ſeront une ſerie deſcendante de fraction, dont les dénominateurs ſeront les puiſſances de 4; & joignant cette ſerie avec la ſerie des puiſſances, on aura la ſuite infinie des puiſſances de 4, ſoit en montant, ſoit en deſcendant.

$a^{-\infty}$, &c. a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, &c. a^{∞}

$\frac{1}{256}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64, 256, &c.

Où l'on voit que les valeurs de a^0, a^1, a^2, &c. allant en augmentant, a^{∞} ſera par conſéquent d'une valeur infinie; au lieu que a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. allant en diminuant, $a^{-\infty}$ ſera d'une valeur infiniment petite, puiſque ce ſera 1 diviſé par l'infini, ce qui certainement doit donner un quotient infiniment petit, attendu que les quotiens diminuent à proportion de l'augmentation du diviſeur.

3°. Pour élever une puiſſance de a au quarré, au cube, ou à telle autre puiſſance qu'on voudra, on prendra l'expoſant de cette puiſſance autant de fois que l'expoſant de la puiſſance à laquelle elle devra être élevée contient d'unités, & la ſomme ſera l'expoſant de la puiſſance élevée. Pour élever a^2 à la troiſiéme puiſſance, on prendra trois fois l'expoſant 2, c'eſt-à-dire, on le triplera à cauſe que l'expoſant de la troiſiéme puiſſance eſt 3, & le triple de 2 étant 6, on écrira a^6, qui ſera a^2 élevé à la troiſiéme puiſſance, car a^2 eſt la même choſe que aa; or pour élever aa à la troiſiéme puiſſance, il faut d'abord multiplier aa par aa, ce qui fait $aaaa$; puis multiplier $aaaa$ encore par aa, ce qui fait $aaaaaa$, & $aaaaaa$ eſt la même choſe que a^6. De même pour élever a^3 à la quatriéme puiſſance, on prendra 3 quatre fois, parce que l'expoſant de la quatriéme puiſſance eſt 4, & comme 3 pris quatre fois fait 12, on écrira a^{12}.

4°. Pour extraire la racine quarrée, cubique, quatriéme, cinquiéme, &c. d'une puiſſance de a, on prendra le $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{4}$, le $\frac{1}{5}$, &c. de l'expoſant de cette puiſſance. Pour extraire la racine troiſiéme de a^{12}, on prendra le $\frac{1}{3}$ de 12, qui eſt 4, & l'on écrira a^4, qui ſera la racine cherchée. Cette régle eſt une ſuite de la précédente; car ſi pour élever a^4 à la troiſiéme puiſſance, on triple ſon expoſant 4 pour avoir a^{12}, il s'enſuit que pour tirer la racine troiſiéme de a^{12}, il faut prendre le $\frac{1}{3}$ de 12. De même pour extraire la racine cinquiéme de a^{10}, on prendra le $\frac{1}{5}$ de 10 qui eſt 2, & l'on aura a^2; pour extraire la racine quarrée ou ſeconde de a^1, on prendra la moitié de 1, & l'on aura $a^{\frac{1}{2}}$; & pour extraire la racine quatriéme de la même puiſſance a^1, on prendra le $\frac{1}{4}$ de 1, & l'on aura $a^{\frac{1}{4}}$; & pour extraire la racine troiſiéme de $a^{\frac{1}{2}}$, on prendra le $\frac{1}{3}$ d'une moitié qui eſt $\frac{1}{6}$, & l'on aura $a^{\frac{1}{6}}$, &c.

Ce calcul a cela de commode, qu'on peut par ſon moïen ſe paſſer des ſignes radicaux dont nous parlerons bientôt, & qui ſont extrémement embarraſſans.

Au reſte, ce que nous diſons ici de ce calcul, par rapport à la multiplication & à la diviſion, ne doit s'entendre que des puiſſances d'une même grandeur; car s'il falloit multiplier une puiſſance de a, comme, par exemple, a^2 par une puiſſance de b, telle que ſeroit b^3, il faudroit bien ſe garder d'écrire a^2b, ou ab^3, mais il faudroit écrire a^2b^3, parce que a & b aïant des valeurs inégales, il n'eſt pas vrai qu'une puiſſance de a multipliant une puiſſance de b, l'éleve à une autre puiſſance, ni qu'une puiſſance de a ſoit élevée à une autre puiſſance par une puiſſance de b. De même auſſi, & par la même raiſon, s'il falloit diviſer a^4 par b^2, il faudroit écrire $\frac{a^4}{b^2}$, & non pas a^2b; ceci demande qu'on y faſſe attention; & pour le faire mieux ſentir que a ſoit 4, & b ſoit 2; par conſéquent a^2 ſera 16 & b^3 ſera 8: or en multipliant a^2 par b^3, il n'eſt pas vrai qu'on puiſſe avoir a^2b, car a^2b feroit 2048, puiſque a^5 vaut 1024, & b vaut 2, au lieu que a^2b^3 ne vaut que 128. Je conviens que ab^3 vaut 128 de même que a^2b^3, mais cela n'arrive ici que par accident, & l'on peut s'en convaincre en donnant d'autres valeurs aux lettres a, b; car alors cela n'arrivera pas.

Des puiſſances des grandeurs complexes.

IX. Les grandeurs complexes prennent différens noms ſelon les différens nombres de termes dont elles ſont compoſées : on les appelle *binomes*, lorſqu'elles ont deux termes ; *trinomes*, quand elles en ont trois ; *quadrinomes*, quand elles en ont quatre, &c. & en général *multinomes*. $a+b$ ou $c+g$ ſont des binomes ; $a+b+c$ ou $d+g+f$ ſont des trinomes ; $a+b+c+d$ ou $f+g+h+i$ ſont des quadrinomes, & ainſi des autres.

De même qu'on peut élever les grandeurs incomplexes à la puiſſance ſeconde, troiſiéme, quatriéme, &c. on peut auſſi élever les complexes aux mêmes puiſſances, & ces grandeurs venant à ſe multiplier, donnent des produits qui ont toujours plus de termes qu'elles-mêmes, & dont il eſt très-utile de connoître la formation.

Pour cela prenons un binome, faiſons-en ſucceſſivement les puiſſances, & ce qui arrivera à ſes termes par ces différentes multiplications, nous fera aiſément juger de ce qui doit arriver aux termes des trinomes, quadrinomes, & en général de tous les multinomes.

Soit donc le binome $a+b$; multipliant $a+b$ par lui-même, nous avons ſa ſeconde puiſſance ou ſon quarré, & ce quarré eſt $aa+2ab+bb$. Or ce quarré contient, 1°. le terme aa, qui eſt le quarré du premier terme a du binome ; 2°. le terme $2ab$ qui eſt deux fois le premier terme a, multiplié par le terme b ; 3°. le terme bb qui eſt le quarré du terme b. D'où il ſuit que *tout quarré d'un binome contient le quarré de ſon premier terme, le double du premier multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond.*

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ \quad +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb \text{ quarré} \end{array}$$

Or comme la multiplication ſe fait toujours de la même maniere, je juge aiſément par-là que ſi je faiſois le quarré d'un trinome, ce quarré contiendroit non-ſeulement les quatre termes dont nous venons de parler, mais encore le double des deux premiers multiplié par le troiſiéme, & le quarré du troiſiéme ; & en effet, ſuppoſant que ce trinome eſt $a+b+c$, il eſt viſible qu'outre le quarré de aa, le double de a par b, & le quarré de b, il y aura encore

deux produits de a par c, deux de b par c, & le quarré de c; or deux produits de a par c, & deux produits de b par c, ſont les doubles des deux premiers.

Et ſi l'on faiſoit le quarré d'un quadrinome, on trouveroit, outre ces produits, le double des trois premiers termes par le quatriéme, & le quarré du quatriéme, & ainſi des autres; ce qui ne ſauroit jamais arriver autrement, parce que la multiplication ſe faiſant toujours de la même façon, comme nous venons de dire; ce qui arrive à l'égard des deux premiers termes, doit arriver à l'égard de tous les autres à l'infini.

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a+b+c \\ \hline aa+ab+ac \\ \quad +ab \quad +bb+bc \\ \quad \quad +ac \quad +bc+cc \\ \hline aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \end{array}$$

Préſentement élevons le binome $a+b$ au cube, ce qui ſe fait en multipliant ſon quarré $aa+2ab+bb$ par $a+b$, le produit ſera $a^3+3aab+3abb+b^3$, & ce produit contient, 1°. le terme a^3, qui eſt le cube du premier terme a; 2° $3aab$, c'eſt-à-dire, trois quarrés du premier terme multiplié par le ſecond; 3°. $3abb$, ou trois fois le premier multiplié par le quarré du ſecond; 4°. enfin b^3, ou le cube du ſecond. D'où il ſuit que *tout cube d'un binome contient le cube de ſon premier terme, le triple du quarré du premier terme multiplié par le ſecond, le triple du premier terme multiplié par le quarré du ſecond, & le cube du ſecond.*

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ \quad +aab+2abb+b^3 \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3 \text{ cube.} \end{array}$$

Donc ſi on faiſoit le cube d'un trinome, nous trouverions outre cela le triple du quarré des deux premiers termes multiplié par le troiſiéme, le triple des deux premiers multiplié par le troiſiéme, & le cube du troiſiéme. Donc encore ſi on faiſoit le cube d'un quadrinome, on trouveroit outre cela le triple du quarré des trois premiers multiplié par le quatriéme, le triple des trois premiers multiplié par le quatriéme & le cube du quatriéme; & ainſi de même pour les autres multinomes à l'infini.

Venons à la quatriéme puiſſance du binome $a+b$, ce qui ſe fait en multipliant ſon cube $a^3+3aab+3abb+b^3$ par $a+b$, le

produit ſera $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$; & ce produit contient, 1°. a^4 ou la quatriéme puiſſance du premier terme a ; 2°. $4a^3b$ ou quatre cubes du premier terme multipliés par le ſecond ; 3°. $6aabb$ ou ſix quarrés du premier terme multipliés par le quarré du ſecond ; 4°. $4ab^3$ ou quatre fois le premier multiplié par le cube du ſecond ; 5°. enfin la quatriéme puiſſance du ſecond. D'où il ſuit que *toute quatriéme puiſſance d'un binome contient la quatriéme puiſſance de ſon premier terme, le quadruple du cube de ſon premier terme multiplié par le ſecond, le ſextuple du quarré de ſon premier terme multiplié par le quarré du ſecond, le quadruple du premier terme multiplié par le cube du ſecond, & la quatriéme puiſſance du ſecond.*

$$\begin{array}{l} a^3+3aab+3abb+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3aabb+ab^3 \\ \quad +a^3b+3aabb+3ab^3+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4 \end{array}$$

Donc ſi on élevoit un trinome à la quatriéme puiſſance, on trouveroit outre cela le quadruple du cube des deux premiers termes multiplié par le troiſiéme, le ſextuple du quarré des deux premiers multiplié par le quarré du troiſiéme, le quadruple des deux premiers multiplié par le cube du troiſiéme, & la quatriéme puiſſance du troiſiéme.

Donc encore, ſi on élevoit un quadrinome à la quatriéme puiſſance, on trouveroit outre cela le quadruple du cube des trois premiers termes multiplié par le quatriéme, le ſextuple du quarré des trois premiers multiplié par le quarré du quatriéme, le quadruple des trois premiers multiplié par le cube du quatriéme, & la quatriéme puiſſance du quatriéme ; & ainſi de même pour les autres multinomes.

Que ſi nous continuons à élever le binome $a+b$ à la puiſſance cinquiéme, ſixiéme, ſeptiéme, &c. nous trouverons non-ſeulement ce qui arrivera à ſes termes, mais encore ce qui arriveroit aux termes de tous les autres multinomes à l'infini, ſi on vouloit les élever aux mêmes puiſſances.

C'eſt en emploïant la voïe dont nous venons de nous ſervir, qu'on a calculé la Table appellée Table des puiſſances, qui contient les puiſſances du binome $a+b$, depuis la premiere juſqu'à la dixiéme, ainſi qu'on peut voir dans la ſeconde Planche à la fin de ce Volume.

Cette Table a deux ſortes de rangs, les uns qui vont de droite

à gauche, & qui contiennent chacun une puiſſance de $a+b$, je les appellerai rangs paralléles ; & les autres qui vont de haut en bas, & que j'appellerai rangs perpendiculaires. Les uns & les autres de ces rangs ſont compoſés de petits quarrés ou cellules, qui contiennent différens produits que nous allons examiner.

Premierement, ces produits ſont compoſés de lettres & de chiffres mis avant les lettres ; car je ne parle point de ceux qui ſervent d'expoſans. Ces chiffres mis avant les lettres s'appellent *coefficiens* des lettres devant qui ils ſont mis.

Secondement, ne faiſant attention qu'aux chiffres qui ſervent de coefficiens, nous trouverons que le premier rang perpendiculaire à gauche ne contient dans chacune de ſes cellules que l'unité. Que le rang perpendiculaire qui vient après contient dans ſes cellules les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. qui viennent de l'addition ſucceſſive des unités. Que le troiſiéme rang contient les nombres 1, 3, 6, 10, 15, &c. qui viennent de l'addition ſucceſſive des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Que le quatriéme contient les nombres 1, 4, 10, 20, 35, &c. qui viennent de l'addition ſucceſſive des précédens 1, 3, 6, 10, &c. Que le cinquiéme contient les nombres 1, 5, 15, 35, &c. qui viennent de l'addition ſucceſſive des nombres du rang précédent 1, 4, 10, 20, &c. Que le ſixiéme contient les nombres 1, 6, 21, 56, &c. qui viennent de l'addition ſucceſſive de ceux du rang précédent 1, 5, 15, 35, &c. & ainſi de même des autres rangs. D'où il ſuit que le coefficient d'une cellule, comme, par exemple, le coefficient 20 de la quatriéme cellule du quatriéme rang eſt toujours égal à la ſomme des coefficiens 1, 3, 6, 10, qui ſe trouvent dans les cellules ſupérieures du rang précédent, ou pour abréger, que ce coefficient eſt égal au coefficient 10 de la cellule qui lui eſt ſupérieure dans le même rang, joint au coefficient 10 de la cellule qui eſt à gauche de celle-ci, ce qu'il eſt aiſé de comprendre en jettant les yeux ſur cette Table ; car puiſque le coefficient 10 de la troiſiéme cellule du quatriéme rang eſt égal à la ſomme des coefficiens 1, 3, 6, du rang précédent, & que le coefficient 20 eſt égal à la ſomme des coefficiens 1, 3, 6, 10, il s'enſuit que le coefficient 20 eſt égal au coefficient 10, qui vaut les trois premiers 1, 3, 6, auquel il faut ajouter le quatriéme coefficient 10, ce qui fait en effet 20.

Troiſiémement, ſi nous faiſons abſtraction des chiffres, & que nous n'aïions égard qu'aux lettres, nous trouverons que le pre-

mier rang perpendiculaire eſt le ſeul qui ne contienne que le premier terme a du binome, & que les cellules de ce rang contiennent les puiſſances de a, depuis la premiere juſqu'à la dixiéme. Paſſons préſentement à la conſidération des rangs paralléles, faiſant toujours abſtraction des coefficiens.

Quatriémement, dans les cellules de chaque rang paralléle, en allant de gauche à droite les puiſſances de a vont en diminuant juſqu'à la derniere, où a n'eſt point du tout; & au contraire les puiſſances de b vont en augmentant depuis la ſeconde cellule, où la premiere puiſſance commence, juſqu'à la derniere où b ſe trouve ſeul & eſt élevé à la même puiſſance que a dans la premiere cellule.

Cela ſuppoſé, on peut continuer facilement cette Table tant que l'on voudra; car ſi je veux, par exemple, la onziéme puiſſance, je ferai un onziéme rang paralléle, dans les cellules duquel je mettrai a^{11}, a^{10}, a^{9}, a^{8}, &c. juſqu'à la premiere puiſſance; enſuite je mettrai dans la ſeconde cellule & dans les ſuivantes, b, bb, b^3, b^4, &c. juſqu'à b^{11}, cela me donnera déja tous les produits littéraux de cette puiſſance; & pour les coefficiens, je prendrai les coefficiens de la premiere & ſeconde cellule de la dixiéme puiſſance, & la ſomme 11 ſera le coefficient de mon ſecond terme; de même je prendrai les coefficiens de la ſeconde & troiſiéme cellule de la dixiéme puiſſance, & la ſomme 55 ſera le coefficient de mon troiſiéme terme; je prendrai enſuite les coefficiens de la troiſiéme & de la quatriéme cellule de la dixiéme puiſſance, & la ſomme 165 ſera le coefficient de mon quatriéme terme; & faiſant la même choſe pour les autres coefficiens, je trouverai que la onziéme puiſſance eſt:

$$a^{11}+11a^{10}b+55a^{9}bb+165a^{8}b^{3}+330a^{7}b^{4}+462a^{6}b^{5}+462a^{5}b^{6}+330a^{4}b^{7}+165a^{3}b^{8}+55a^{2}b^{9}+11ab^{10}+b^{11},$$

& je trouverois de la même façon les puiſſances douziéme, treiziéme, quatorziéme, &c. du binome $a+b$.

La Table des puiſſances eſt utile, non-ſeulement pour l'extraction des racines dont nous parlerons bien-tôt, mais encore pour élever facilement un multinome à telle puiſſance qu'on voudra. Pour élever, par exemple, le binome $d+f$ à la troiſiéme puiſſance, je prens dans la Table le troiſiéme rang paralléle qui contient la troiſiéme puiſſance de $a+b$, & mettant au lieu de a la lettre d, & au lieu de b la lettre f, j'ai $d^3+3ddf+3dff+f^3$, qui eſt la troiſiéme puiſſance du binome propoſé.

De

De même, pour élever le binome $bg+cf$ à la quatriéme puiſſance, je prens dans la Table le quatriéme rang paralléle qui contient la quatriéme puiſſance de $a+b$; & au lieu de a^4, qui eſt dans la premiere cellule, j'écris b^4g^4, c'eſt-à-dire, la quatriéme puiſſance du premier terme bg du binome propoſé; au lieu de $4a^3b$, je mets $4b^3g^3cf$, c'eſt-à-dire, le quadruple du cube de bg multiplié par le ſecond terme cf; au lieu de $6aabb$, je mets $6b^2g^2ccff$, c'eſt-à-dire, le ſextuple du quarré de bg multiplié par le quarré de cf; au lieu de $4ab^3$, je mets $4bgc^3f^3$, c'eſt-à-dire, le quadruple du premier terme par le cube du ſecond; enfin, au lieu de b^4, je mets c^4f^4, ou la quatriéme puiſſance du ſecond terme, & j'ai: $b^4g^4+4b^3g^3cf+6bbg^2ccf^2+4bgc^3f^3+c^4f^4$, qui eſt la quatriéme puiſſance de $bg+cf$.

De même encore, pour élever le trinome $c+d+f$ à la troiſiéme puiſſance, je prens dans la Table le troiſiéme rang paralléle qui contient la troiſiéme puiſſance du binome $a+b$, & mettant au lieu de a & de b, les termes c & d du trinome propoſé, j'ai: $c^3+3ccd+3cd^2+d^3$ qui ſeroit le cube du binome $c+d$; mais comme le binome a encore un terme f, je fais le quarré des deux premiers $c+d$ qui eſt $c^2+2cd+dd$, je le multiplie par 3, ce qui fait $3c^2+6cd+3dd$, qui eſt le triple du quarré des deux premiers termes, & je multiplie ce terme par f, ce qui fait $3c^2f+6cdf+3ddf$; je prens auſſi le triple $3c+3d$ des deux premiers termes, que je multiplie par le quarré ff du troiſiéme, & j'ai $3cff+3dff$; enfin je prens le cube f^3 du troiſiéme terme, & ajoutant tous ces produits au cube déja trouvé des deux premiers termes, j'ai le cube demandé:

$$c^3+3ccd+3cdd+d^3+3ccf+6cdf+3ddf+3cff+3dff+f^3.$$

Et en effet j'aurois eu la même expreſſion ſi j'avois d'abord multiplié le trinome $c+d+f$ par lui-même pour avoir ſon quarré, & enſuite le quarré par $c+d+f$, ce qui m'auroit donné le cube, comme on voit ci-après, où toute la différence ne conſiſte que dans l'arrangement différent des termes, ce qui ne gâte rien, comme nous avons déja dit, parce que les termes conſervent toujours leur valeur, quelque place qu'ils occupent.

$$\begin{array}{l} c+d+f \\ c+d+f \\ \hline cc+cd+cf \\ \quad +cd \quad +dd+df \\ \quad\quad +cf \quad\quad +df+ff \\ \hline cc+2cd+2cf+dd+2df+ff \text{ quarré} \\ c+d+f \\ \hline c^3+2ccd+2ccf+cdd+2dcf+cff \\ \quad +ccd \quad\quad +2cdd+2dcf \quad\quad +d^3+2ddf+dff \\ \quad\quad +ccf \quad\quad\quad +2dcf+2cff \quad\quad +ddf+2dff+f^3 \\ \hline c^3+3ccd+3ccf+3cdd+6dcf+3cff+ddd+3ddf+3dff+f^3. \end{array}$$

Quelquefois, pour s'épargner la peine d'élever un multinome à la puiſſance requiſe, on écrit ce multinome avec une ligne par-deſſus, & un petit chiffre à droite qui marque la puiſſance à laquelle il devroit être élevé; ainſi au lieu de faire le cube du binome précédent $c+d+f$, on écrit : $\overline{c+d+f}^{3}$; de même, au lieu d'élever le quadrinome $bg+cd+ef+mp$ à la ſixiéme puiſſance, on écrit : $\overline{bg+cd+ef+mp}^{6}$, & ainſi des autres, ce qui abrége beaucoup le calcul, lorſque la queſtion ſur laquelle on travaille peut le permettre.

Or en exprimant ainſi les puiſſances des multinomes, on peut également emploïer le calcul des expoſans à leur égard, de même qu'à l'égard des puiſſances des grandeurs incomplexes. Ainſi pour multiplier la troiſiéme puiſſance du binome $c+d$ par ſa quatriéme puiſſance, on ajoutera l'expoſant 3 de la troiſiéme puiſſance avec l'expoſant 4 de la quatriéme, & la ſomme 7 ſera l'expoſant du produit, qui ſera par conſéquent $\overline{c+d}^{7}$; de même, pour élever la troiſiéme puiſſance du trinome $g+h+l$ à ſa quatriéme puiſſance, on prendra le quadruple 12 de l'expoſant 3, & ce quadruple 12 ſera l'expoſant de la troiſiéme puiſſance élevée à ſa quatriéme puiſſance, & l'on aura $\overline{g+h+l}^{12}$.

De même pour diviſer la ſixiéme puiſſance du quadrinome $a+b+c+d$ par la troiſiéme, on retranchera de l'expoſant 6 l'expoſant 3, & le reſte 3 ſera l'expoſant du quotient, qui ſera par conſéquent $\overline{a+b+c+d}^{3}$; de même pour tirer la racine troiſiéme de

la puiſſance neuviéme du trinome $a+b+c$, on prendra le $\frac{1}{3}$ de l'expoſant 9 qui eſt 3, & 3 ſera l'expoſant de la racine cherchée $\overline{a+b+c}^{3}$; de même encore pour tirer la racine quatriéme du binome $a+d$, on prendra le $\frac{1}{4}$ de l'expoſant 1 du binome, & l'on aura $\overline{a+d}^{\frac{1}{4}}$, & ainſi des autres.

Il eſt bon d'obſerver que dans ce calcul ce qu'il faudroit faire par multiplication & par diviſion, ſe fait par addition & par ſouſtraction; car pour multiplier, par exemple, la ſeconde puiſſance par la troiſiéme, on ajoute l'expoſant 2 à l'expoſant 3, & pour diviſer la ſixiéme par la quatriéme, on retranche 4 de 6; & qu'à l'égard de l'élévation des puiſſances, on multiplie l'expoſant de la puiſſance qu'on éleve par celui de la puiſſance à laquelle on veut l'élever; de même qu'à l'égard de l'extraction des racines, on diviſe l'expoſant de la puiſſance dont on veut extraire la racine, par l'expoſant de la racine; ainſi pour élever la puiſſance deux à ſa quatriéme puiſſance, on multiplie deux par quatre, ce qui eſt la même choſe que de prendre le quadruple de deux; & de même pour extraire la racine troiſiéme de la douziéme puiſſance, on diviſe douze par trois, ce qui eſt la même choſe que de prendre le tiers de douze, comme nous avons enſeigné ci-deſſus.

Au reſte, j'avertis encore une fois que ce calcul des expoſans ne doit être emploïé, par rapport à la multiplication & la diviſion, que lorſqu'il s'agit des puiſſances d'une même grandeur, ſoit complexe, ſoit incomplexe; car ſi l'on faiſoit autrement, l'on ſe jetteroit dans de grandes erreurs, ainſi que je l'ai fait voir plus haut.

Il faut encore obſerver que ſi après avoir marqué la puiſſance d'un multinome, par l'expreſſion abrégée dont je viens de parler, il étoit queſtion de la multiplier par une grandeur, ſoit complexe, ſoit incomplexe, il ne faudroit pas multiplier les termes du binome par les termes du multiplicateur, mais ſimplement écrire le binome tout de ſuite, & après ou avant lui le multiplicateur avec le ſigne × qui marqueroit la multiplication; ainſi pour multiplier $\overline{b+c+d}^{2}$ par a, on écriroit $\overline{b+c+d}^{2}\times a$; la raiſon de ceci eſt, que ſi on multiplioit $b+c+d$ par a, à la façon ordinaire, en écrivant $\overline{ba+ca+da}^{2}$, il ſe trouveroit qu'au lieu de multiplier le quarré de $b+c+d$ par a, on auroit multiplié ſa racine par a; deſorte que ſi on venoit à en faire réellement le quarré, au lieu

de l'expreſſion abrégée, on feroit en même-tems le quarré du multiplicateur a, & par conſéquent le quarré du binome ſe trouveroit multiplié par le quarré aa, au lieu qu'il ne devroit être multiplié que par la grandeur a.

Et pour multiplier $\overline{a+b+d}^{4}$ par $a+b$, on écrira $\overline{a+b+d}^{4} \times \overline{a+b}$, mettant une ligne qui s'étende ſur a & ſur b, pour indiquer qu'il faut multiplier par l'un & par l'autre; car ſi on ne mettoit pas cette ligne, le ſigne × ne tomberoit que ſur a, & l'expreſſion ſignifieroit que la puiſſance quatriéme du trinome devroit être multipliée par a, & qu'il faudroit enſuite ajouter b au produit, ce qui eſt bien différent.

Et pour multiplier $\overline{a+c+d}^{3}$ par $b+d+f$, on écrira $\overline{a+c+d}^{3} \times \overline{b+d+f}$, & ainſi des autres.

Il faut dire la même choſe de la diviſion. Ainſi pour diviſer $\overline{aa+2ab+bb}^{3}$ par $a+b$, il faut écrire $\frac{\overline{aa+2ab+bb}^{3}}{a+b}$, & non pas $\overline{a+b}^{3}$, parce que ſi on faiſoit la diviſion, comme elle peut ſe faire, ce ſeroit la racine de la troiſiéme puiſſance qui ſeroit diviſée par $a+b$, au lieu que ce ne doit être que la troiſiéme puiſſance qui doit être diviſée.

On ſe ſert auſſi quelquefois des mêmes abréviations par rapport à la multiplication; ainſi pour multiplier $a+b+d$ par $c+f+g$, on écrit $\overline{a+b+d} \times \overline{c+f+g}$, & ainſi des autres; & en ce cas, ſi l'on venoit à multiplier de nouveau par une autre grandeur, comme, par exemple, par $g+h$, il faudroit écrire $\overline{a+b+d} \times \overline{c+f+h} \times \overline{g+h}$, & non pas multiplier les termes de $a+b+d$ & ceux de $c+f+g$ par $g+h$, parce que ces ſortes d'abréviations ne faiſant qu'indiquer les multiplications qu'il faudroit faire, ſi on venoit enſuite à les faire réellement, il ſe trouveroit que la grandeur $a+b+d$ & la grandeur $c+f+g$ aïant été multipliées l'une & l'autre par $g+h$, on feroit le quarré de $g+h$ lorſqu'on viendroit à les multiplier enſemble, & leur produit ſeroit par conſéquent multiplié par ce quarré, au lieu qu'il ne doit être multiplié que par $g+h$; ceci demande qu'on y faſſe attention.

De l'extraction des Racines des puiſſances multinomes.

X. Dès qu'on a bien connu la formation des puiſſances, il eſt

facile d'en extraire les racines par le moïen de la Table que nous avons donnée dans l'Article précédent. Ainſi pour extraire la racine quarrée de $bb+2bc+cc$, je vois dans le ſecond rang paralléle de la Table, qui contient le quarré de $a+b$, que ce quarré eſt compoſé du quarré du premier terme, du double de ce terme multiplié par le ſecond, & du quarré du ſecond; c'eſt pourquoi je tire la racine du quarré bb, qui eſt b, & j'écris cette racine b ſous le quarré & à la place du premier terme de la racine que je cherche; puis multipliant b par b, ce qui fait bb, & retranchant bb de bb, il ne reſte rien; je double b, ce qui fait $2b$, que j'écris ſous $2bc$, & diviſant l'un par l'autre, je trouve que le ſecond terme de la racine eſt c, que j'écris après b avec le ſigne $+$, parce que $2bc$ a le ſigne $+$; j'écris auſſi c ſous cc, puis je multiplie $2b$ par c, ce qui fait $2bc$, & de $2bc$, ôtez $2bc$, reſte rien; de même c par c, fait cc, & de cc, ôtez cc, reſte rien; ainſi la racine eſt $b+c$.

$$\begin{array}{l|l} bb+2bc+cc & b+c \\ \hline b \quad 2b+c & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Pour extraire la racine troiſiéme de $a^3b^3+3a^2b^2cf+3abc^2f^2+c^3f^3$, je vois par le troiſiéme rang paralléle de la Table, que ce cube doit contenir d'abord le cube du premier terme de ſa racine, ainſi je tire la racine cubique de a^3b^3, qui eſt ab, & ab eſt le premier terme que je cherche, je retranche a^3b^3 de a^3b^3, & il ne reſte rien; je prens le quarré de ab, que je multiplie par 3, parce que le rang de la Table me fait voir que le cube contient le triple du quarré du premier terme multiplié par le ſecond, & ce triple eſt $3a^2b^2$, que je mets ſous $3a^2b^2f$, & faiſant la diviſion de l'un par l'autre, je trouve que cf eſt le ſecond terme de la racine; c'eſt pourquoi je multiplie $3a^2bf$ par cf, & retranchant le produit $3a^2b^2cf$ de $3a^2b^2cf$, il ne reſte rien; je prens enſuite le triple $3ab$ du premier terme, que je multiplie par le quarré c^2f^2 du ſecond, parce que le rang de la Table me fait connoître que le cube doit avoir ce produit; & $3ab$ par c^2f^2, fait $3abc^2f^2$, qui retranché de $3abc^2f^2$ ne laiſſe rien. Enfin je fais le cube c^3f^3 du ſecond terme, parce que le rang de la Table me l'indique, & retranchant c^3f^3 de c^3f^3, il ne reſte rien; ainſi la racine eſt $ab+cf$.

$$\begin{array}{l|l} a^3b^3+3a^2b^2cf+3abc^2f^2+c^3f^3 & ab+cf \\ \hline a^3b^3+3a^2b^2cf+3abc^2f^2+c^3f^3 & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Et pour tirer la racine quarrée de $bb-2bd+dd+2bc-2dc+cc$, où il y a des signes $+$ & $-$, je tire la racine du premier terme qui est b, & retranchant son quarré bb de bb, reste zero; je double b, & j'écris $+2b$ sous $-2bd$, & divisant l'un par l'autre, je trouve que le second terme de la racine est $-d$; multipliant $+2b$ par $-d$, le produit est $-2bd$, qui retranché de $-2bd$, ne laisse rien; je fais le quarré de $-d$, qui est $+dd$, & de $+dd$, ôtez $+dd$, reste zero; je double les deux premiers termes $b-d$, ce qui fait $+2b-2d$, que j'écris sous $+2bc-2dc$, & divisant $+2bc-2dc$ par $+2b-2d$, je trouve que le troisiéme terme de la racine est $+c$; ainsi $+c$ par $+2b$, fait $+2bc$, & de $+2bc$, ôtez $+2bc$, reste zero; $+c$ par $-2d$, fait $-2dc$, & de $-2dc$, ôtez $-2dc$, reste zero; enfin, je fais le quarré de $+c$, qui est $+cc$, lequel retranché de $+cc$, ne laisse rien; la racine cherchée est donc $+b-d+c$. J'ai distingué ici les diviseurs afin qu'on conçoive mieux l'opération.

$bb-2bd+dd+2bc-2dc+cc$	$b-d+c$
$bb+2b$	$+2b$ $-2d$
$0-2bd+dd+2bc-2dc+cc$	
0 0 0 0 0	

Pour tirer la racine cubique de $b^3-3bbd+3bbc+3bdd-6bdc+3bcc-d^3+3ddc-3dcc+c^3$, je vois par le troisiéme rang de la Table des puissances que le premier terme de la racine doit être b, j'écris donc b, & retranchant b^3 de b^3, le reste est o; je prens $3bb$, triple du quarré de b, que j'écris sous $-3bbd$, & faisant la division, je trouve $-d$ pour le second terme de la racine; je multiplie $+3bb$ par $-d$, & retranchant le produit $-3bbd$, de $3bbd$, le reste est zero; je prens le triple du premier terme qui est $3b$, que je multiplie par le quarré dd du second, & retranchant le produit $3bdd$ de $3bdd$, le reste est zero; je fais le cube de $-d$, qui est $-d^3$, & de $-d^3$, ôtez $-d^3$, reste zero; je fais le quarré $bb-2bd+dd$ des deux premiers termes $b-d$, & après l'avoir triplé, j'écris $3bb-6bd+3dd$, sous $3bbc-6bdc+3ddc$, & faisant la division, je trouve que le troisiéme terme de la racine est $+c$; multipliant $3bb-6bd+3dd$ par $+c$, & retranchant le produit $3bbc-6bdc+3ddc$, de $3bbc-6bdc+3ddc$, le reste est zero; je prens le triple $3b-3d$ des deux premiers termes, je le multiplie par le quarré cc du troisiéme, & retranchant le produit $3bcc-3dcc$, de $3bcc-3dcc$, le reste est zero; enfin, faisant le

cube c^3 du terme c, & retranchant c^3 de c^3, le reſte eſt zero; ainſi la racine cherchée eſt $b-d+c$.

$$\begin{array}{l|l} b^3-3bbd+3bbc+3bdd-6bcd+3bcc-d^3+3ddc-3dcc+c^3 & b-d+c \\ \hline b^3+3bb\ \ +3bb\ \ -6bcd\ \ +3dd & \\ \hline 0-3bbd+3bbc+3bdd-6bcd+3bcc-d^3+3ddc-3dcc+c^3 & \\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0 & \end{array}$$

Pour tirer la racine cinquiéme de $c^5+5c^4d+10c^3dd+10c^2d^3+5cd^4+d^5$, je vois par le cinquiéme rang de la Table des puiſſances que le premier terme de la racine doit être c; j'écris donc c, & retranchant c^5 de c^5, le reſte eſt zero; je vois enſuite qu'il faut prendre cinq fois la quatriéme puiſſance de c, qui eſt $5c^4$, & que diviſant le ſecond terme $5c^4d$ par $5c^4$, j'aurai le ſecond terme de la racine; faiſant donc la diviſion, je trouve que le ſecond terme de la racine eſt d; ainſi je multiplie $5c^4$ par $+d$, & retranchant le produit $5c^4d$ de $5c^4d$, le reſte eſt 0; je vois encore qu'il faut prendre dix cubes du premier terme de la racine, multipliés par le quarré du ſecond; dix quarrés du premier terme, multipliés par le cube du ſecond; cinq fois le premier terme, multiplié par la quatriéme puiſſance du ſecond; & enfin, la quatriéme puiſſance du ſecond, & faiſant tous ces produits, je trouve $10c^3dd+10c^2d^3+5cd^4+d^5$, leſquels retranchés de $10c^3dd+10c^2d^3+5cd^4+d^5$, ne laiſſent rien; ainſi la racine cherchée eſt $c+d$.

$$\begin{array}{l|l} c^5+5c^4d+10c^3dd+10c^2d^3+5cd^4+d^5 & c+d \\ \hline c^5+5c^4 & \\ \hline 0\quad 5c^4d+10c^3dd+10c^2d^3+5cd^4+d^5 & \\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0 & \end{array}$$

Il arrive quelquefois que tous les termes de la puiſſance, dont on veut extraire la racine, ont des coefficiens, & alors comme la tranſpoſition des termes n'altére pas leur valeur, il faut choiſir pour le premier celui dont la racine eſt la plus aiſée à tirer, & achever le reſte de même que ci-deſſus. Soit, par exemple, la grandeur $169bb+286bd+78bc+121dd+66dc+9cc$, dont on deman-

de la racine quarrée ; je vois dans cette expreſſion trois termes qui peuvent également être pris pour le premier $169bb$, $121dd$, $9cc$; car dans le premier bb eſt un quarré parfait, de même que dd dans le ſecond & cc dans le troiſiéme, ce qui me fait juger qu'il y aura trois termes à la racine ; je prens donc $9cc$ pour le premier, parce qu'il eſt plus aiſé de tirer la racine du coefficient 9 que celle du coefficient 169, ou celle du coefficient 121 ; je tire la racine de $9cc$, qui eſt $3c$, j'écris cette racine à la place du premier terme de celle que je cherche, & retranchant $9cc$ de $9cc$, le reſte eſt zero ; je prens le double $6c$ de $3c$, & l'écrivant ſous $66dc$, je trouve, en faiſant la diviſion, que le ſecond terme de la racine doit être $11d$; j'écris donc $11d$, & multipliant $6c$ par $11d$, je retranche le produit $66dc$ de $66dc$, & le reſte eſt zero ; je fais le quarré de $11d$, qui eſt $121dd$, & le retranchant de $121dd$, le reſte eſt zero ; je double les deux premiers termes $3c+11d$, & écrivant ce double $6c+22d$ ſous $78bc+286bd$, je trouve par la diviſion que le troiſiéme terme de la racine eſt $13b$; multipliant donc $6c+22d$ par $13b$, & retranchant le produit $78bc+286bd$ de $78bc+286bd$, le reſte eſt zero ; enfin, faiſant le quarré de $13b$, & le retranchant de $169bb$, le reſte eſt zero ; ainſi la racine cherchée eſt $3c+11d-13b$.

$9cc+66dc+121dd+78bc+286bd+169bb$	$3c+11d+13b$
$9cc \quad 6c -$	$6c+22d$
$0\ 66dc+121dd+78bc+286bd+169bb$	
$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$	

Pour tirer la racine cubique de $216a^3+324a^2d+216aac+162add+216adc+72acc+27d^3+54ddc+36dcc+8c^3$, je trouve trois termes dans cette grandeur, qui peuvent être pris pour le premier $216a^3$, $27d^3$, $8c^3$; car a^3, d^3, c^3, ſont des cubes parfaits, & comme la racine $8c^3$ eſt plus aiſée à tirer que la racine des deux autres, j'écris $8c^3$ au premier terme ; je prens la racine $2c$ pour le premier terme de la racine que je cherche, & retranchant $8c^3$ de $8c^3$, le reſte eſt zero ; je prens $12cc$, triple du quarré de $2cc$, & l'écrivant ſous $36dcc$, je trouve par la diviſion que le ſecond terme de la racine eſt $3d$; multipliant donc $12cc$ par $3d$, & retranchant le produit $36ccd$ de $36ccd$, le reſte eſt zero ; prenant de même $27dd$, triple du

du quarré de $3d$, je le multiplie par $2c$, & retranchant le produit $54ddc$ de $54ddc$, le reſte eſt 0; je fais le cube $27d^3$ du ſecond terme, & de $27d^3$, ôtez $27d^3$, reſte rien; je fais le quarré $4cc+12cd+9dd$ des deux premiers termes de la racine, & après l'avoir triplé, j'écris $12cc+36cd+27dd$ ſous $72acc+216adc+162add$, & faiſant la diviſion, je trouve que le troiſiéme terme de la racine eſt $6a$; multipliant donc $12cc+36cd+27dd$ par $6a$, & retranchant le produit de $72acc+216adc+162add$, le reſte eſt zero; je prens le triple $6c+9d$ des deux premiers termes, je le multiplie par le quarré $36aa$ du troiſiéme terme, & retranchant le produit $216aac+324aad$ de $216aac+324aad$, le reſte eſt zero; enfin, je retranche $216a^3$ cube du dernier terme de $216a^3$, & le reſte eſt zero; ainſi la racine eſt $2c+3d+6a$.

$8c^3+36dcc+54ddc+27d^3+72acc+216adc+162add+216aac+324a^2d+216a^3$	$2c+3d+6a$
$8c^3$ $12cc$	$12cc+36cd+27dd$
0 $36cd+54ddc+27d^3+72acc+216adc+162add+216aac+324a^2d+216a^3$	
0 0 0 0 0 0 0 0 0	

On pourroit abréger le calcul, en prenant la racine cubique de $8c^3$, qui eſt $2c$, celle de $27d^3$ qui eſt $3d$, & celle $216a^3$ qui eſt $6a$, & faiſant le cube de $2c+3d+6a$, on trouveroit ſi la grandeur propoſée eſt conforme à ce cube, ou ſi elle ne l'eſt pas; de même, dans l'exemple précédent, ſi on prenoit la racine quarrée de $9cc$ qui eſt $3c$, celle de $121dd$ qui eſt $11d$, & celle de $169bb$ qui eſt $13b$, & qu'on fît le quarré de $3c+11d+13b$, on découvriroit aiſément ſi la grandeur propoſée eſt un quarré, ou ſi elle ne l'eſt pas. Au reſte, avec un peu d'uſage, les racines des expreſſions littérales ſe tirent beaucoup plus aiſément que celles des grandeurs numériques, & la plupart du tems l'expreſſion ſeule vous fait trouver les racines, ſans avoir beſoin d'emploïer le calcul. Je découvrirai, par exemple, aiſément que $b^3+3bbc+3bcc+c^3$ eſt un cube, dont la racine eſt $b+c$; car je vois b^3 & c^3 qui ſont les cubes des deux termes de la racine, & $3bbc+3bcc$ qui ſont les deux produits néceſſaires ſelon la formation des puiſſances pour faire le cube de $b+c$; de même ſi on me propoſe $c^3+4ccd+5cdd+d^3$, je découvrirai, avec un peu d'attention, que cette grandeur n'eſt

pas cube ; car quoiqu'il y ait c^3 & d^3, je vois qu'au lieu de $3ccd$ & $3cdd$, pour faire le cube de $c+d$, il y a $4ccd+5cdd$, & qu'ainſi cette grandeur ſurpaſſe le cube de $c+d$ de la quantité $ccd+2cdd$; & en effet, retranchez $ccd+2cdd$ de $c^3+4ccd+5cdd+d^3$, le reſte ſera $c^3+3ccd+3cdd+d^3$, qui eſt le cube de $c+d$; d'où l'on voit de plus en plus combien le calcul littéral l'emporte ſur le calcul numérique.

Nous n'avons parlé dans notre Arithmetique que de l'extraction de la racine quarrée & de la racine cubique, parce que ce ſont les ſeules dont l'uſage ſoit un peu fréquent ; mais comme il y a bien des queſtions de Géométrie où l'extraction des racines plus élevées eſt quelquefois néceſſaire, ſurtout lorſqu'on emploïe la voïe du calcul pour réſoudre les problêmes, il eſt à propos d'enſeigner ici de quelle maniere on peut faire ces extractions ſur les grandeurs numériques.

Quand l'expoſant de la racine qu'on veut extraire eſt pair, c'eſt-à-dire, quand il eſt 4, 6, 8, 10, 12, &c. on peut tirer ces racines de deux façons ; la premiere en ſuivant les indications que la Table des puiſſances donne, ainſi que nous avons fait pour les grandeurs littérales, ce qui eſt un travail extrémement long lorſqu'il s'agit des nombres ; & la ſeconde en abaiſſant la puiſſance dont on veut extraire la racine à des puiſſances plus baſſes, ſoit en tirant la racine quarrée pluſieurs fois ſucceſſivement, ſoit en tirant la racine cubique, puis la quarrée, ſelon qu'il en eſt beſoin. Ainſi pour tirer la racine quatriéme d'une grandeur, on peut tirer d'abord la racine quarrée, ce qui réduit la grandeur au ſecond degré, & enſuite la racine quarrée de ce degré, ce qui donnera la racine quatriéme qu'on demande ; de même pour tirer la racine ſixiéme d'une grandeur, on en tirera la racine quarrée, ce qui réduira cette grandeur au troiſiéme degré ; & enſuite on tirera la racine cubique de ce degré, ce qui donnera la racine ſixiéme demandée.

Pour tirer la racine huitiéme, on tirera la racine quarrée trois fois ſucceſſivement ; car par la premiere extraction la puiſſance ſera réduite au quatriéme degré, par la ſeconde elle deſcendra au ſecond, & par la troiſiéme on aura le premier degré ou la racine huitiéme. Pour tirer la racine dixiéme, on tirera la racine quarrée, & la grandeur ſera abaiſſée à la cinquiéme puiſſance, dont on ne pourra extraire la racine que par le moïen de la Table, à cauſe que l'expoſant cinq étant impair ne ſauroit s'abaiſſer par une autre voïe ; de même pour tirer la racine douziéme, on tirera la racine quarrée deux fois ſucceſſivement, puis la racine cubique ;

car en tirant la premiere racine quarrée, la grandeur ſera réduite au ſixiéme degré, & en la tirant encore, elle deſcendra au troiſiéme, d'où elle s'abaiſſera au premier en tirant la racine cubique; & ainſi de même des autres racines dont l'expoſant eſt pair, ou du moins dont l'expoſant eſt neuf & quinze, parce que cet expoſant étant diviſible par trois, on peut réduire la neuviéme puiſſance en tirant deux fois la racine cubique, & on peut abaiſſer la quinziéme à la cinquiéme, en tirant une fois la racine cubique.

Mais quand l'expoſant eſt impair & non diviſible par trois, comme 5, 7, 11, &c. alors il faut néceſſairement agir ſuivant les indications de la Table des puiſſances, & ſurmonter la longueur & l'ennui du calcul. Avant d'en venir aux exemples, nous mettrons ici une Table qui contient les puiſſances des neuf premiers caractéres, depuis le quarré juſqu'à la ſeptiéme puiſſance.

Racines.	Quarrés.	Cubes.	Quatrime puiſſance.	Cinquiéme puiſſance.	Sixiéme puiſſance	Septiéme puiſſance.
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969

Le premier rang perpendiculaire à gauche contient les nombres 1, 2, 3, 4, &c. juſqu'à 9; le ſecond contient leurs quarrés; le troiſiéme leur cube; le quatriéme leur quatriéme puiſſance, & ainſi de ſuite juſqu'au ſeptiéme qui contient leur ſeptiéme puiſſance: on pourroit pouſſer cette Table plus loin ſi on vouloit, mais on peut s'en paſſer, du moins juſqu'à la onziéme puiſſance; car la huitiéme, la neuviéme & la dixiéme peuvent ſe réſoudre par les moïens que nous avons enſeignées ci-deſſus; & quant à la onziéme, ſi on en avoit beſoin, on multiplieroit le cinquiéme rang par le ſixiéme, & l'on auroit le onziéme.

Préſentement, ſuppoſons qu'on nous demande la racine quatriéme du nombre 80102584576, je vois par la Table des puiſſances, qu'entre la quatriéme puiſſance du premiere caractére de la racine & la quatriéme puiſſance du ſecond caractére, il ſe trouve trois différens produits; c'eſt pourquoi je coupe ce nombre par tranches de quatre en quatre caractéres, & comme il y a trois tranches, je connois que la racine aura trois caractéres; ainſi pour trouver le premier, je cherche dans la Table précédente quelle eſt la plus grande quatriéme puiſſance qui ſoit contenuë dans 801, & je trouve 625, dont la racine eſt 5, j'écris 5 à la racine, & retranchant 625 de 801, il reſte 176; je mets un point après 176 pour marquer le lieu de la tranche, & j'abaiſſe les quatre caractéres 0258 contenus entre la troiſiéme & la ſeconde tranche; cela fait, je vois par la Table des puiſſances qu'après la quatriéme puiſſance du premier caractére, vient le quadruple du cube de ce caractére multiplié par le ſecond; je fais donc le cube de 5, qui eſt 125, je le multiplie par 4, ce qui fait 500, que j'écris ſous 1760, enſorte que le dernier zero de 500 tombe en-delà de la tranche; je trouve par la diviſion que le ſecond caractére eſt 3, que j'écris à la racine; je multiplie 500 par 3, & j'écris à part le produit 1500; enſuite ſuivant toujours les indications de la Table des puiſſances, je fais le quarré de 5, qui eſt 25, je le multiplie par 6, ce qui fait 150, puis par le quarré 9 du ſecond caractére, ce qui fait 1350, que j'écris à part ſous le produit 1500, en avançant d'un rang à droite; je prens encore le premier caractére 5, que je multiplie par 4, ce qui fait 20, puis par le cube 27 du ſecond caractére, ce qui me donne 540, que j'écris à part ſous le produit 1350, en avançant toujours d'un rang à droite; enfin je fais la quatriéme puiſſance 81 du premier caractére, que j'écris à part ſous 540 en avançant d'un degré, & faiſant la ſomme de ces quatre produits,

j'ai 1640481 que je transporte sous 1760258, effaçant le diviſeur 500 & faiſant la ſouſtraction, le reſte eſt 119777, devant qui je mets un point pour marquer la tranche, & j'abaiſſe les quatre caractéres 4576 qui ſont entre la ſeconde & la premiere tranche.

Pour trouver le troiſiéme caractére, je fais le cube des deux premiers caractéres 53, ce qui me donne 148877, que je multiplie par 4, & j'ai 595508, que j'écris ſous 1197774, enſorte que le dernier caractére 8 tombe en-delà de la tranche; & faiſant la diviſion, je trouve que le troiſiéme caractére de la racine eſt 2, j'écris donc 2 à la racine, & multipliant le diviſeur 595508 par 2, j'écris à part le produit 1191016; enſuite je fais le quarré 2809 des deux premiers caractéres, je le multiplie par 6, puis par le quarré 4 du troiſiéme caractére, & le produit eſt 67416, que j'écris à part ſous le produit précédent 1191016, en avançant d'un rang à droite; je multiplie encore les deux premiers 53 par 4, puis par le cube 8 du troiſiéme, & j'écris le produit 1696 ſous les deux autres; enfin j'écris auſſi à part la quatriéme puiſſance 16 du troiſiéme caractére; & faiſant une ſomme de ces quatre produits, je tranſporte cette ſomme 1197774576 ſous 1197774576, effaçant le diviſeur 595508, & faiſant la ſouſtraction, il ne reſte rien, ainſi la racine cherchée eſt 532.

801|0258|4576 | 532			$5=a$
			4
625	$125=a^3$	$25=aa$	20
	4	6	27
176.0258			
164 0481	500	150	140
	$3=b$	$9=bb$	40
11 9777.4576	$1500=4a^3b$	$1350=6aabb$	$540=4abb$
11 9777.4576			
0000			
148877 cube de 53	2809 quarré de 53		
4	6		1500
			1350
595508	16854		540
2 3e caractére	4 quarré du 3e caractére		$81=b^4$
1191016	67416		1640481

1191016
67416
1696
16

1197774576

53
4

16 quatriéme puiſſance du troiſiéme caractére

212
8 cube du troiſiéme caractére

1696

Pour abréger la longueur de ce calcul, on peut tirer d'abord la racine quarrée de 80102584576, & tirer enſuite la racine quarrée de la racine, & l'on trouvera de même 532.

8|01|02|58|45|76 | 283024

2

4·01
48

17.02
563

13.58
56 60

13 58.45
5 66 02

2 26 41.76
56 60 44

00 00 00

28|30|24 | 532 racine cherchée

5

3·30
1 03

21.24
10 62

00 00

Pour extraire la racine cinquiéme de 1090624225792 32, je vois, par la Table des puiſſances, qu'entre la puiſſance cinquiéme du premier caractére de la racine & celle du ſecond, il y aura quatre produits, c'eſt pourquoi je coupe le nombre propoſé par tranches de cinq en cinq caractéres, & je vois qu'il y aura trois caractéres à la racine; & ſuivant toujours les indications de la Table, je cherche dans la Table précédente la plus grande cinquiéme

puiſſance contenuë dans 10906, qui ſont les cinq premiers caractéres avant la derniere tranche, & je trouve que cette puiſſance eſt 7776, dont la racine eſt 6, j'écris 6 à la racine; & retranchant 7776 de 10906, le reſte eſt 3130, devant qui je mets un point, & j'abaiſſe les cinq caractéres ſuivans 24225; je prens dans la Table précédente la quatriéme puiſſance de 6, qui eſt 1296, je la multiplie par 5, ce qui fait 6480, que j'écris ſous 31302; de ſorte que le dernier caractére ſoit en-delà de la tranche, & faiſant la diviſion, je trouve que le ſecond caractére de la racine eſt 4; je multiplie donc le diviſeur 6480 par 4, & j'écris le produit 25920 à part; je prens la troiſiéme puiſſance du premier caractére 6, qui eſt 216, je la multiplie par 10, puis par le quarré 16 du ſecond caractére, & j'écris le produit 34560 à part ſous le produit précédent, en avançant d'un rang à droite; je prens de même le quarré 36 du premier caractére, & après l'avoir multiplié par 10, & puis par le cube 64 du ſecond, j'écris le produit 23040 à part ſous les précédens, en avançant toujours d'un degré; je prens encore le premier caractére 6, & après l'avoir multiplié par 5 & puis par la quatriéme puiſſance 256 du ſecond caractére, j'écris à part le produit 7680 ſous les précédens; & enfin j'écris la cinquiéme puiſſance 1024 du ſecond caractére, après quoi faiſant la ſomme 29614824 de ces produits, je la tranſporte ſous 31302425, & faiſant la ſouſtraction, le reſte eſt 16882401, après lequel je mets un point, & j'abaiſſe les 5 derniers caractéres 79232.

Enſuite je fais la quatriéme puiſſance des deux premiers caractéres 64, qui eſt 16777216, & après l'avoir multipliée par 5, je tranſporte le produit 83886080 ſous ce qui eſt reſté de l'extraction, & je trouve en diviſant que le troiſiéme caractére de la racine eſt 2; je multiplie donc 83386080 par 2, & j'écris à part le produit 167772160; je fais le cube de 64 que je multiplie par 10, & puis par le quarré 4 du troiſiéme caractére, & j'écris à part le produit 10485760 ſous le précédent; je fais le quarré de 64 que je multiplie par 10 & par le cube 8 du premier caractére, & j'écris à part le produit 327680 ſous les deux précédens; je prens 64 que je multiplie par 5, & puis par la quatriéme puiſſance 16 du troiſiéme caractére, & j'écris le produit 5120 ſous les 4 autres; enfin j'écris auſſi la cinquiéme puiſſance 32 du troiſiéme caractére, & faiſant la ſomme 16882401179232, je la tranſporte ſous ce qui eſt reſté de l'extraction, & retranchant l'un de l'autre, le reſte eſt zero; ainſi la racine eſt 642.

10906|24225|79232 | 642

7776

3130.24225
ϕ48 ϕ
2961 41824

168 82401.79232
8ϗ 88ϕϕ8 ϕ
168 82401 79232

0000

1296	2160	360	
5	16	64	256
			30
6480	12960	1440	
4	2160	2160	7680
25920	34560	23040	

64
64
256
384
4096 quarré
64
16384
24576
262144 cube
64
1048576
1572864
167772164e puiſſance
5
83886080
2
167772160

2621440
4
10485760

40960
8
327680

64
5
320
16
1920
320
5120

25920
34560
23040
7680
1024
296141824

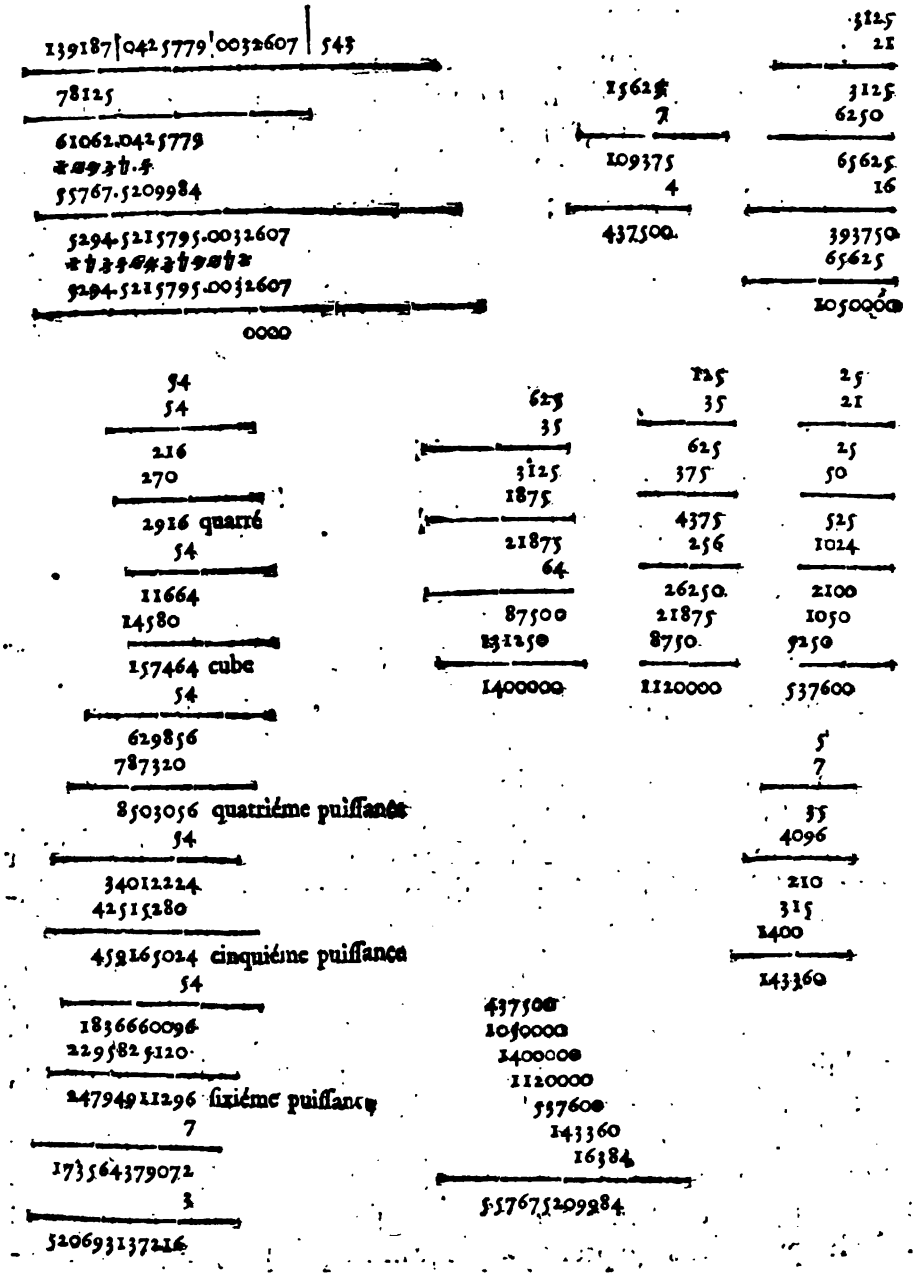
167772160
10485760
327680
5120
32
168824017923 2

Pour extraire la racine 7e du nombre 139187042577900321607, je vois par la Table des puiſſances qu'il y auroit 6 produits entre la ſeptiéme puiſſance du premier caractére de la racine & celle du ſecond, c'eſt pourquoi je coupe ce nombre par tranches de 7 en

7 caractéres, & je trouve qu'il y aura trois caractéres à la racine; je cherche dans la Table précédente quelle eſt la plus grande ſeptiéme puiſſance contenuë dans les ſix premiers caractéres, 139187, & je trouve 78125 dont la racine eſt 5, j'écris 5 à la racine; & faiſant la ſouſtraction, le reſte eſt 61062 devant lequel je mets un point, & j'abaiſſe les 7 caractéres ſuivans; je cherche dans la Table précédente la ſixiéme puiſſance du premier caractére 5, & après l'avoir multipliée par 7, je l'écris ſous ce qui eſt reſté de l'extraction, & je trouve en diviſant que le ſecond caractére eſt 4; je multiplie le diviſeur par 4, & j'écris à part le produit 437500; je prens la cinquiéme puiſſance de 5, & après l'avoir multipliée par 21 & par le quarré 16 du ſecond caractére, j'écris le produit 1050000 ſous le précédent; je prens la quatriéme puiſſance de 5 que je multiplie par 35 & par le cube 64 du ſecond caractére, & j'écris le produit 1400000 ſous les deux autres, je prens le cube de 5 que je multiplie par 35, & par la quatriéme puiſſance 256 du ſecond caractére, & j'écris le produit 1120000 ſous les autres; je prens le quarré de 5, que je multiplie par 21 & par la cinquiéme puiſſance 1024 du ſecond caractére, & j'écris le produit 537600 ſous les autres; je prens 5, & après l'avoir multiplié par 7 & par la ſixiéme puiſſance 4096 du ſecond caractére, j'écris le produit 143360 ſous les autres; enfin j'écris la ſeptiéme puiſſance 16384 du ſecond caractére, après quoi faiſant la ſomme, je la tranſporte ſous ce qui eſt reſté de l'extraction, & retranchant l'un de l'autre, le reſte eſt 5294521795 devant qui je mets un point, & j'abaiſſe les 7 derniers caractéres.

Pour trouver le troiſiéme caractére, j'éleve les deux premiers 54 à la premiere, ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme & ſixiéme puiſſance; je multiplie la ſixiéme par 7, & écrivant le produit ſous ce qui eſt reſté de l'extraction, je trouve par la diviſion que le troiſiéme caractére eſt 3; je multiplie donc le diviſeur par 3, & j'écris à part le produit 520693137216; je prens la cinquiéme puiſſance de 54 que je multiplie par 21 & par le quarré 9 du troiſiéme caractére, & j'écris le produit 86782189536 ſous le précédent; je prens la quatriéme puiſſance de 54, & après l'avoir multipliée par 35 & par le cube 27 du troiſiéme caractére, j'écris le produit 8035387920 ſous les deux autres; je prens le cube de 54, je le multiplie par 35 & par la quatriéme puiſſance 81 du troiſiéme caractére, & j'écris le produit 446410440 ſous les autres; je prens le quarré de 54 que je multiplie par 21 & par la cinquiéme puiſſance 243 du troiſiéme caractére, & j'écris le produit 14880348 ſous les précédens; je prens 54 que je multiplie par 7 & par la ſixié-

me puiſſance 729 du troiſiéme caractére, & j'écris le produit 27556 ſous les autres ; enfin j'écris la ſeptiéme puiſſance 2187 du troiſiéme caractére, & faiſant la ſomme 5294521579500326o7, je la tranſporte ſous le reſte de l'extraction, & retranchant l'un de l'autre, le reſte eſt zero ; ainſi la racine eſt 543.



459165024
21
459165024
918330048
9642465504
9
86782189536

8503056
35
42515280
25509168
297606960
27
208324872O
595213920
8035387920

157464
35
787320
472392
5511240
81
5511240
44089920
446410044

2916
21
2916
5832
61236
243
183708
244944
122472
14880348

54
7
378
729
3402
756
2646
275562

5206931372l6
86782189536
8035387920
446410440
14880348
275562
2187
52945215795003260 7

On pourroit tirer de la même façon les racines onziéme, treiziéme, &c. & ceci doit faire voir aux commençans de quelle utilité eſt la Science que nous traitons ici, puiſque par le moïen d'une Table qui ne coûte pas beaucoup à faire, ni à continuer tant qu'on voudra, on découvre d'un coup d'œil toutes les propriétés des puiſſances, de quelque grandeur qu'on veüille les ſuppoſer.

Du calcul des grandeurs ſourdes ou irrationnelles.

XI. Nous avons dit, dans notre Arithmétique, que ſi après avoir extrait la racine quarrée ou cubique d'un nombre, il reſte quelque choſe, c'eſt une marque certaine que ce nombre n'eſt point un quarré ou un cube, & que ſa racine ne peut s'exprimer par au-

cun nombre ni entier, ni rompu ; or ceci doit s'entendre de toutes les autres puiſſances qui laiſſent un reſte après l'extraction, & ce ſont ces racines à qui on a donné le nom de grandeurs *ſourdes*, *irrationnelles*, ou *incommenſurables*, parce qu'on ne peut exprimer leur rapport avec quelqu'autre nombre connu que ce ſoit ; & que par conſéquent il n'eſt point de nombre ni entier, ni rompu qui puiſſe les diviſer exactement, c'eſt-à-dire les meſurer ; car par le mot de *meſure* on n'entend autre choſe qu'une diviſion, attendu qu'en meſurant on cherche combien de fois la meſure eſt contenuë dans la choſe meſurée.

Pour exprimer les grandeurs incommenſurables, on ſe ſert ordinairement d'un ſigne qu'on appelle radical, & qui s'écrit ainſi $\surd$, en y ajoutant un chiffre par-deſſus qui marque la puiſſance dont on extrait la racine. $\surd a$ ou $\overset{2}{\surd} a$, ſignifie racine quarrée de a ; $\overset{3}{\surd} b$ ſignifie racine cubique de b ; $\overset{4}{\surd} c$ ſignifie racine quatriéme de c ; de même $\overset{5}{\surd} ab$ ſignifie racine cinquiéme de ab ; $\overset{7}{\surd} ab+bc$ ſignifie racine ſeptiéme de $ab+bc$; $\overset{8}{\surd} a+b+c$ ſignifie racine huitiéme de $a+b+c$, & ainſi des autres ; où l'on doit obſerver que le ſigne radical doit s'étendre ſur tous les termes de la grandeur dont on marque la racine, lorſque cette grandeur eſt complexe. Quant à la racine quarrée, il eſt indifférent d'écrire $\overset{2}{\surd}$, ou ſimplement $\surd$; mais par rapport aux racines des puiſſances plus élevées, il faut toujours marquer le chiffre qui en déſigne le degré.

Le calcul qu'on emploïe pour ces ſortes d'expreſſions, eſt fondé ſur quelques principes, dont la connoiſſance aidera beaucoup à réſoudre les difficultés qui peuvent ſe rencontrer dans les opérations.

PREMIER PRINCIPE.

Si l'on multiplie d'une part deux quarrés ou deux cubes, ou deux troiſiémes puiſſances, &c. & que de l'autre on multiplie leurs racines, le premier produit ſera encore un quarré ou un cube, ou une quatriéme puiſſance, & le ſecond ſera la racine du nouveau quarré ou du nouveau cube ; &c. Soit le quarré aa, dont la racine eſt a, & le quarré bb, dont la racine eſt b ; ſi l'on multiplie aa par bb, & la racine a par la racine b, on aura d'une part $aabb$, & de l'autre ab ; & le produit $aabb$ ſera un quarré dont le produit ab ſera la racine ; de même, ſoit le cube a^3 dont la racine eſt a, & le

cube c^3 dont la racine eſt c; ſi l'on multiplie a^3 par c^3, & la racine a par la racine c, on aura a^3c^3 d'une part, & ac de l'autre; il eſt viſible que ac eſt la racine cubique de a^3c^3, il en ſera de même à l'égard des autres puiſſances.

En nombres, ſoit le quarré 4 dont la racine eſt 2, & le quarré 9 dont la racine eſt 3, multipliez 4 par 9, & la racine 2 par la racine 3, vous aurez d'une part 36 & de l'autre 6, qui eſt la racine du quarré 36; de même, ſoit le cube 8, dont la racine eſt 2, & le cube 27, dont la racine eſt 3, multipliez 8 par 27, & la racine 2 par la racine 3, & vous aurez d'une part 216, & de l'autre 6, qui eſt la racine cubique de 216, & ainſi des autres.

SECOND PRINCIPE.

De même qu'on peut réduire un entier en fraction, ou une fraction en entier, on peut auſſi réduire une grandeur non radicale, c'eſt-à-dire, exprimée ſans ſigne radical, en grandeur radicale, & une grandeur radicale, ou une partie de cette grandeur, en grandeur irradicale.

Pour réduire le nombre 4 ſous un ſigne radical dont l'expoſant ſoit 2, je multiplie 4 par lui-même, ce qui fait 16, & j'écris $\sqrt{16}$ ou $\sqrt[2]{16}$; car le nombre 4 ſe multipliant par lui-même, produit un quarré dont il eſt la racine; & par conſéquent 4 eſt la même choſe que la racine de 16, ainſi $4=\sqrt{16}$. Il faut ſe ſouvenir que le ſigne $=$ ſignifie *eſt égal*, & que par conſéquent quand je dis: $4=\sqrt{16}$, c'eſt la même choſe que ſi je diſois: 4 eſt égal à $\sqrt{16}$. Il eſt bon qu'on ſe prévienne de ceci, parce que je me ſervirai toujours de cette expreſſion pour abréger le diſcours.

Pour réduire a ſous le ſigne radical $\sqrt[4]{}$, dont l'expoſant eſt 4, je mulplie a trois fois ſucceſſivement par lui-même, ce qui me donne a^4, & j'écris $\sqrt[4]{a^4}$, parce que a ſe multipliant ainſi, produit une quatriéme puiſſance dont il eſt la racine quatriéme, & qu'ainſi $a=\sqrt[4]{a^4}$.

De même, pour réduire $a+b$ ſous le ſigne radical $\sqrt[3]{}$, dont l'expoſant eſt 3, je multiplie $a+b$ deux fois ſucceſſivement par lui-même, ce qui me donne $a^3+3aab+3abb+b^3$, & j'écris: $\sqrt[3]{a^3+3aab}$

$+3abb+b^3$, parce que $a+b$ ſe multipliant ainſi produit une troiſiéme puiſſance dont il eſt la racine, & qu'ainſi $a+b=\sqrt[3]{a^3+3aab+3abb+b^3}$, & de même des autres; par où l'on voit qu'il faut élever la grandeur qu'on veut mettre ſous le ſigne radical, à la puiſſance exprimée par ce ſigne, c'eſt-à-dire, à la troiſiéme, ſi le ſigne radical eſt $\sqrt[3]{}$, à la quatriéme s'il eſt $\sqrt[4]{}$, &c.

Et pour réduire $a\sqrt[2]{b}$ dont une partie eſt hors du ſigne radical, je fais le quarré de a qui eſt aa, & j'écris $\sqrt[2]{aab}$; car puiſque a eſt la même choſe que $\sqrt[2]{aa}$, ainſi qu'on vient de voir; $a\sqrt[2]{b}$ ſera par conſéquent la même choſe que $\sqrt[2]{aab}$; de même pour réduire $4\sqrt[2]{2}$ ſous le ſigne radical, je fais le quarré de 4 qui eſt 16, & multipliant par 2, j'écris le produit 32 ſous le ſigne radical, & j'ai $\sqrt[2]{32}$; car 4 étant la même choſe que la racine de 16, $\sqrt{16}$ multipliée par $\sqrt{2}$ doit faire $\sqrt{32}$, ainſi qu'on a vû par le principe précédent. Et pour faire toucher la choſe au doigt, ſuppoſons $2\sqrt{9}$, je fais le quarré de 2, qui eſt 4, & le multipliant par 9, ce qui fait 36, j'écris $\sqrt{36}$, ce qui eſt viſible; car $\sqrt{9}$ étant la même choſe que 3, & $2\sqrt{9}$, la même choſe que 2 multiplié par 3, ce qui fait 6, ce produit eſt certainement la racine de 36, & par conſéquent $\sqrt{36}=2\sqrt{9}$, & ainſi des autres.

Préſentement pour tirer une grandeur du ſigne radical, j'examine quel eſt l'expoſant du ſigne, & ſi la grandeur eſt une puiſſance parfaite de ce degré; ſi elle l'eſt, je tire la racine, & j'écris cette racine ſans ſigne. Ainſi pour réduire $\sqrt[3]{8}$ en grandeur non radicale, je vois que l'expoſant du ſigne eſt 3, & par conſéquent je tire la racine troiſiéme de 8 qui eſt 2, & j'écris 2 ſans ſigne; car 2 ſe multipliant deux fois ſucceſſives produit le cube 8 dont il eſt la racine, ainſi $2=\sqrt[3]{8}$; de même pour réduire $\sqrt[4]{a^4b^4}$, je tire la racine quatriéme de a^4b^4, qui eſt ab, & j'écris ab ſans ſigne; car ab ſe multipliant ſucceſſivement trois fois, produit la quatriéme puiſſance a^4b^4 dont il eſt la racine, & par conſéquent $ab=\sqrt[4]{a^4b^4}$.

Et ſi la grandeur qui eſt ſous le ſigne n'eſt pas une puiſſance parfaite du degré marqué par le ſigne, mais qu'elle contienne une

puiſſance parfaite du même degré multipliée par une autre grandeur, je diviſe la grandeur entiere par le nombre qui multiplie la puiſſance parfaite qu'elle contient, & je mets la racine du quotient devant le ſigne radical, laiſſant le diviſeur ſous le ſigne radical. Pour réduire $\sqrt{18}$, je vois que 18 contient le quarré 9 multiplié par 2; je diviſe donc 18 par 2, le quotient eſt 9 & le reſte 2; je laiſſe 2 ſous le ſigne, & j'écris 3 qui eſt la racine de 9 avant le ſigne, ce qui fait $3\sqrt{2}$; car 3 eſt la même choſe que $\sqrt{9}$, & par conſéquent $3\sqrt{2}$ eſt la même choſe que $\sqrt{9}$ multipliée par $\sqrt{2}$; & comme par le premier principe deux racines de même nature ſe multipliant enſemble, produiſent la racine de la puiſſance que leurs puiſſances produiroient; $\sqrt{9}$ par $\sqrt{2}$ doivent produire racine $\sqrt{18}$, attendu que leur quarré 9 & 2 produiroient 18.

De même, pour réduire $\sqrt[3]{54}$, je vois que 54 contient le cube 27 deux fois; diviſant donc 54 par 2, & laiſſant le diviſeur 2 ſous le ſigne, j'écris la racine cubique de 27 qui eſt 3, devant le ſigne, & j'ai $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{54}$; car $3=\sqrt[3]{27}$ & $\sqrt[3]{27}$ par $\sqrt[3]{2}$, doivent produire $\sqrt[3]{54}$, puiſque leur cube 27 & 2 produiroient 54, & ainſi des autres.

Quand on tire ainſi les grandeurs hors des ſignes, ſoit qu'elles laiſſent un reſte, ſoit qu'elles n'en laiſſent point, cela s'appelle *réduire les grandeurs incommenſurables à leurs expoſans*, c'eſt-à-dire à leurs moindres termes, de même qu'on réduit une fraction à ſon moindre dénominateur. *L'expoſant* eſt donc ici l'expreſſion la plus ſimple d'une grandeur incommenſurable.

Il arrive quelquefois qu'en réduiſant deux ou pluſieurs grandeurs incommenſurables à leurs expoſans, les expreſſions qu'on trouve vous font connoître le rapport que ces grandeurs ont entr'elles, & que ce rapport eſt une grandeur commenſurable; ainſi ſi l'on propoſe $\sqrt{8}$ & $\sqrt{18}$, je vois que 8 contient le quarré 4 deux fois, de même que 18 contient le quarré 9 deux fois; c'eſt pourquoi j'écris $2\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{8}$, & $3\sqrt{2}$ au lieu de $\sqrt{18}$; & je m'apperçois que $2\sqrt{2}$ eſt les $\frac{2}{3}$ de $3\sqrt{2}$, puiſque le premier eſt 2 multiplié par $\sqrt{2}$, de même que le ſecond eſt 3 multiplié par la même racine $\sqrt{2}$, & que deux nombres étant multipliés par un même nombre, ſoit commenſurable, ſoit incommenſurable, ſont tou-

jours en même raiſon qu'ils étoient avant leur multiplication ; ſoit de même $\sqrt[3]{24}$ & $\sqrt[3]{81}$, je vois que 24 contient le cube 8 trois fois, & que 81 contient le cube 27 auſſi trois fois ; c'eſt pourquoi j'écris $2\sqrt[3]{3}$, au lieu de $\sqrt[3]{24}$, & $3\sqrt[3]{3}$, au lieu de $\sqrt[3]{81}$, & je découvre que $\sqrt[3]{24}$ eſt les deux tiers de $\sqrt[3]{81}$, & ainſi des autres. Quand cela arrive, les grandeurs incommenſurables s'appellent *communicantes* ou *commenſurables entr'elles*.

TROISIE'ME PRINCIPE.

De même qu'on peut réduire deux ou pluſieurs fractions en même dénomination, on peut auſſi réduire deux ou pluſieurs grandeurs incommenſurables à un même ſigne.

Pour réduire à un même ſigne $\sqrt{a}$ & $\sqrt[4]{b}$, je multiplie a, qui eſt ſous le premier ſigne par lui-même, & j'écris $\sqrt[4]{aa}$; car puiſque a eſt un quarré, donc la racine eſt $\sqrt{a}$; multipliant ce quarré par lui-même, il produira aa qui ſera la quatriéme puiſſance de cette racine ; tirant donc la racine quatriéme de aa, nous aurons $\sqrt[4]{aa}$, qui ſera par conſéquent égale à $\sqrt{a}$; car la racine quarrée du quarré d'une grandeur eſt égale à la racine quatriéme de la quatriéme puiſſance de cette même grandeur : donc $\sqrt{a} = \sqrt[4]{aa}$.

Pour réduire $\sqrt[3]{4}$ & $\sqrt[6]{8}$ à un même ſigne, je multiplie le cube 4 par lui-même, ce qui fait 16, & j'écris $\sqrt[6]{16}$; car 4 étant un cube dont $\sqrt[3]{4}$ eſt la racine, ce cube multiplié par lui-même produira 16, ou la ſixiéme puiſſance de $\sqrt[3]{4}$; & comme la racine ſixiéme de la ſixiéme puiſſance eſt la même que la racine troiſiéme de la troiſiéme puiſſance : donc $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{16}$.

De même, pour réduire $\sqrt{2}$ & $\sqrt[8]{5}$ à un même ſigne, je prens le quarré 2 dont la racine eſt $\sqrt{2}$, je multiplie ce quarré par lui-même, ce qui me donne 4 qui eſt la quatriéme puiſſance de $\sqrt{2}$; je multiplie encore cette quatriéme puiſſance par elle-même, ce qui me donne 16, ou la huitiéme puiſſance de $\sqrt{2}$; & comme $\sqrt[8]{16}$, ou la racine huitiéme de la huitiéme puiſſance, eſt la même choſe

que

que la racine quarrée de la ſeconde ; j'ai par conſéquent $\sqrt{2} = \sqrt[8]{16}$; ainſi j'écris $\sqrt[8]{16}$ & $\sqrt[8]{5}$.

Pour réduire $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$ & $\sqrt[12]{6}$ à un même ſigne, je prens le quarré 3 dont la racine eſt $\sqrt{3}$, je le multiplie par lui-même, ce qui me donne 9 qui eſt la quatriéme puiſſance de $\sqrt{3}$; je multiplie 9 par lui-même, ce qui me donne 81 qui eſt la huitiéme puiſſance de $\sqrt{3}$; je multiplie 81 par 9, ce qui fait 729 qui eſt la douziéme puiſſance de $\sqrt{3}$, & par conſéquent $\sqrt[12]{729} = \sqrt{3}$; voilà donc $\sqrt{3}$ & $\sqrt[12]{6}$ réduis à un même ſigne. Pour réduire de même $\sqrt[4]{5}$ au même ſigne, je prens 5 qui eſt la quatriéme puiſſance de $\sqrt[4]{5}$, je le multiplie par lui-même, ce qui fait 25 ou la huitiéme puiſſance de $\sqrt[4]{5}$; je multiplie encore 25 par 5, ce qui fait 125 qui eſt la douziéme puiſſance de $\sqrt[4]{5}$, & par conſéquent $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$; mes trois grandeurs réduites au même ſigne, ſont donc $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{215}$ & $\sqrt[12]{6}$.

On pourra toujours réduire de la même façon les grandeurs incommenſurables à un même ſigne, lorſque l'expoſant de la plus grande pourra être diviſé exactement par les expoſans des petites, ainſi qu'on a vû dans les exemples que nous venons de donner ; & la régle générale pour tous ces cas eſt d'examiner combien de fois il faut ajouter un petit expoſant à lui-même pour le rendre égal au grand, & de multiplier enſuite la grandeur qui eſt ſous ce ſigne le même nombre de fois par elle-même. Ainſi dans le dernier exemple, où nous avons réduit au même ſigne $\sqrt{3}$ & $\sqrt[12]{6}$, l'expoſant de $\sqrt{3}$ étant 2, il faut ajouter à 2 cinq fois 2 pour faire 12 ; c'eſt pourquoi il faut multiplier le quarré 3 qui eſt ſous le ſigne $\sqrt{}$ cinq fois ſucceſſivement par lui-même ; & pour réduire dans le même exemple $\sqrt[4]{5}$ & $\sqrt[12]{6}$ au même ſigne, l'expoſant de $\sqrt[4]{5}$ étant 4, il faut ajouter à 4 deux fois 4 pour faire 12 ; c'eſt pourquoi il faut multiplier la grandeur 5 qui eſt ſous le ſigne deux fois ſucceſſivement par elle-même, & ainſi des autres.

Mais ſi le grand expoſant ne peut être diviſé exactement par les petits, alors il faut chercher le plus petit nombre que ces expoſans puiſſent diviſer exactement, & élever les grandeurs qui ſont ſous les ſignes, autant qu'il le faut, pour que l'expoſant de leur ſigne ſoit ce nouveau nombre.

Pour réduire à un même ſigne $\sqrt[2]{7}$ & $\sqrt[3]{8}$, je cherche le plus petit nombre que les expoſans 2 & 3 puiſſent diviſer ; & ce nombre eſt 6, il faut donc que le ſigne commun ſoit $\sqrt[6]{}$; & pour cela, comme il faut ajouter deux fois 2 à l'expoſant 2 pour faire l'expoſant 6, je multiplie la grandeur 7 deux fois par elle-même, & j'ai 343 que je mets ſous le ſigne $\sqrt[6]{}$, en écrivant $\sqrt[6]{343}$; de même, comme il faut ajouter une fois 3 à l'expoſant 3 pour faire 6, je multiplie 8 une fois par lui-même, ce qui fait 64, & j'écris $\sqrt[6]{64}$; par conſéquent $\sqrt[2]{7}$ & $\sqrt[3]{8}$ ſe trouvent réduites à $\sqrt[6]{343}$ & $\sqrt[6]{64}$ qui ont le même ſigne.

De même, pour réduire $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ à un même ſigne, je prens le plus petit nombre que les expoſans 2, 5, 4 puiſſent diviſer, & ce nombre eſt 12, ainſi le nouvel expoſant doit être $\sqrt[12]{}$; & pour cela, comme il faut ajouter à l'expoſant 2, cinq fois 2 pour faire 12, je multiplie la grandeur 3 qui eſt ſous le ſigne $\sqrt[2]{}$, cinq fois ſucceſſivement par elle-même, ou, ce qui eſt la même choſe, je fais ſon quarré 9, puis je multiplie 9 deux fois ſucceſſivement par lui-même, & j'ai 729 que je mets ſous le ſigne $\sqrt[12]{}$, en écrivant $\sqrt[12]{729}$; de même, comme il faut ajouter à l'expoſant 3 trois fois 3, pour faire l'expoſant 12, je multiplie la grandeur 5 qui eſt ſous le ſigne $\sqrt[3]{}$, trois fois ſucceſſivement par elle-même, ou pour abréger, je fais ſon quarré 25, & multipliant 25 par lui-même, j'ai 625 que je mets ſous le ſigne $\sqrt[12]{}$, en écrivant $\sqrt[12]{625}$; enfin, comme il faut ajouter à l'expoſant 4 deux fois 4 pour avoir l'expoſant 12, je multiplie la grandeur 7 qui eſt ſous le ſigne $\sqrt[4]{}$, deux fois par elle-même, & j'ai 343 que je mets ſous le ſigne $\sqrt[12]{}$, en écrivant $\sqrt[12]{343}$; & les trois grandeurs $\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$ ſont réduites à $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[12]{625}$ & $\sqrt[12]{343}$, qui ont le même ſigne ; & ainſi des autres.

Nous dirons dans la ſuite comment il faut faire pour trouver le plus petit nombre qui puiſſe être diviſé par deux ou pluſieurs grandeurs.

De l'Addition des grandeurs incommenſurables.

XII. Pour ajouter enſemble deux ou pluſieurs grandeurs incommenſurables, on les réduit à leurs expoſans, & on les rappelle à un même ſigne; après quoi on les ajoute de même que les grandeurs commenſurables.

Pour ajouter $\sqrt{20}$ & $\sqrt[3]{24}$, je vois que $\sqrt{20}$ contient le quarré 4 multiplié par 5, c'eſt pourquoi je prens la racine quarrée de 4 qui eſt 2, & écrivant $2\sqrt{5}$, la grandeur $\sqrt{20}$ eſt réduite à ſon expoſant; de même, je vois que $\sqrt[3]{24}$ contient le cube 8 multiplié par 3, ainſi je prens la racine cubique de 8 qui eſt 2, & écrivant $2\sqrt[3]{3}$, la grandeur $\sqrt[3]{24}$ eſt réduite à ſon expoſant.

Cela fait, je prens le plus petit nombre que les expoſans 2 & 3 des ſignes puiſſent diviſer, & ce nombre eſt 6; & comme il faut ajouter à l'expoſant 2 du ſigne $\sqrt{}$, deux fois deux pour faire 6, je multiplie la grandeur 5 qui eſt ſous $\sqrt{}$, deux fois par elle-même, ce qui me donne 125, & j'écris $2\sqrt[6]{125}$; de même, comme il faut ajouter à l'expoſant 3 du ſigne $\sqrt[3]{}$, une fois 3 pour faire 6, je multiplie la grandeur 3 qui eſt ſous ce ſigne par elle-même, & j'écris $2\sqrt[6]{9}$; ainſi les deux grandeurs $\sqrt{20}$ & $\sqrt[3]{24}$ ſe trouvent réduites, par le moïen de ces deux préparations, à $2\sqrt[6]{125}$ & $2\sqrt[6]{9}$; après quoi, pour les ajouter enſemble, je les écris l'une après l'autre, mettant le ſigne + entre deux, & j'ai la ſomme $2\sqrt[6]{125}+2\sqrt[6]{9}$.

De même pour ajouter $\sqrt[2]{8}$ & $\sqrt[2]{72}$, je réduis la premiere à ſon expoſant $2\sqrt{2}$, & la ſeconde à ſon expoſant $6\sqrt{2}$; & comme ces grandeurs ſe trouvent *commenſurables entr'elles* ou *communicantes*, j'ajoute enſemble les deux grandeurs qui ſont hors du ſigne, ce qui fait 8, & j'écris $8\sqrt{2}$, qui eſt la ſomme de $2\sqrt{2}+6\sqrt{2}$.

On voit par-là que l'unique raiſon qui fait qu'on réduit les grandeurs incommenſurables à leurs expoſans, & à un même ſigne, c'eſt pour découvrir ſi elles ne ſont point communicantes, afin de pouvoir les ajouter enſemble, comme nous venons de faire.

De même, pour ajouter $\sqrt[3]{81}$ & $\sqrt[3]{192}$, je réduis la premiere à

ſon expoſant $3\sqrt[3]{3}$, & la ſeconde à ſon expoſant $4\sqrt[3]{3}$; & trouvant qu'elles ſont communicantes, j'ajoute les grandeurs 3 & 4 qui ſont hors des ſignes, & j'écris $7\sqrt[3]{3}$ qui eſt la ſomme de $3\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3}$.

Pour ajouter $\sqrt[3]{a^3b}$ & $\sqrt[3]{c^3b}$, je les réduis à leurs expoſans $a\sqrt[3]{b}$ & $c\sqrt[3]{b}$, & leur ſomme eſt $a\sqrt[3]{b}+c\sqrt[3]{b}$.

De même, pour ajouter $\sqrt{a+b}$ & $\sqrt[4]{c+d}$, je réduis la premiere au ſigne de la ſeconde, en écrivant $\sqrt[4]{aa+2ab+bb}$, & la ſomme eſt $\sqrt[4]{aa+2ab+bb}+\sqrt[4]{c+d}$, & ainſi des autres.

Souſtraire les grandeurs incommenſurables.

XIII. On les réduit à leurs expoſans & à un même ſigne ſi elles n'y ſont pas; après quoi, ſi elles ſont communicantes, on retranche ce qui eſt hors du ſigne de l'une, de ce qui eſt hors du ſigne de l'autre, & l'on écrit le reſte. Ainſi pour retrancher $+2\sqrt{3}$ de $+6\sqrt{3}$, on retranche 2 de 6, & l'on écrit $+4\sqrt{3}$. De même, pour retrancher $+5\sqrt{2}$ de $-4\sqrt{2}$, on écrit $-9\sqrt{2}$, parce que de -4 ôtez $+5$, le reſte eſt -9; & pour retrancher $+3\sqrt{5}$ de $+2\sqrt{5}$, on écrit $-\sqrt{5}$, parce que de $+2$ retranchez $+3$, reſte -1, & ainſi des autres.

Et ſi les grandeurs ne ſont pas communicantes, on fait la ſouſtraction de même que des grandeurs commenſurables; ainſi pour retrancher $+4\sqrt{2}$ de $6\sqrt{3}$, on écrit $6\sqrt{3}-4\sqrt{2}$; & pour ôter $+7\sqrt[3]{5}$ de $-3\sqrt[3]{3}$, on écrit $-3\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{5}$, & de même des autres.

Multiplier les grandeurs incommenſurables.

XIV. Après avoir fait les préparations ordinaires, qui conſiſtent à réduire les grandeurs à leurs expoſans & à leurs mêmes ſignes, ſi on trouve que la grandeur qui eſt ſous le ſigne ſoit la même, & que le ſigne ſoit $\sqrt{}$, on écrira ſimplement cette grandeur, & l'on effacera le ſigne; & ſi les grandeurs ſont différentes, ou que le ſigne ſoit $\sqrt[3]{}$, ou $\sqrt[4]{}$, ou $\sqrt[5]{}$, &c. on les multipliera l'une par l'autre, & on laiſſera ſubſiſter le ſigne; & s'il y a des grandeurs hors du ſigne, on les multipliera auſſi l'une par l'autre.

Pour multiplier $\sqrt[2]{2}$ par $\sqrt[2]{2}$, on écrira ſimplement 2 & l'on effacera le ſigne, parce qu'une racine ſe multipliant elle-même, produit ſon quarré; ainſi puiſque $\sqrt{2}$ eſt la racine du quarré 2, cette racine, en ſe multipliant, doit produire le quarré 2.

Mais pour multiplier $\sqrt[3]{8}$ par $\sqrt[3]{8}$, il faut multiplier 8 par 8, ce qui fait 64, & écrire $\sqrt[3]{64}$, parce qu'une racine cubique ſe multipliant elle-même, ne produit pas ſon cube, mais ſimplement une autre racine cubique, dont le cube ſeroit le premier cube multiplié par lui-même, ce qui ſe voit clairement dans cet exemple; car $\sqrt[3]{8}$ étant égale à 2, ſi vous multipliez 2 par 2, vous aurez 4, & ſi vous multipliez 8 par lui-même, vous aurez 64 qui eſt un cube, dont la racine eſt 4.

Pour multiplier $\sqrt[4]{a}$ par $\sqrt[4]{b}$, il faut écrire $\sqrt[4]{ab}$, parce que ſi on multiplie d'une part deux quatriémes puiſſances, & de l'autre leurs racines, le produit des puiſſances ſera une autre quatriéme puiſſance, dont le produit des racines ſera la quatriéme racine: c'eſt une ſuite du premier principe ci-deſſus.

Pour multiplier $2\sqrt{3}$ par $3\sqrt{4}$, on multipliera 2 par 3, ce qui ſera 6, & 3 par 4, ce qui ſera 12, & l'on écrira $6\sqrt{12}$; & ſi l'on veut réduire la grandeur 12, qui eſt ſous le ſigne, à ſon expoſant, on verra que 12 contient le quarré 4 multiplié par 3; ainſi on laiſſera 3 ſous le ſigne, & prenant la racine du quarré 4 qui eſt 2, on multipliera la grandeur 6 qui eſt hors du ſigne par 2, & l'on écrira $12\sqrt{3}$, parce que $\sqrt{3}$ étant déja multipliée par 6, & devant encore être multipliée par 2, doit être par conſéquent multipliée par 12.

Pour multiplier $3\sqrt{5}$ par $6\sqrt{5}$, on dira: 3 fois 6 font 18, & $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ fait 5; ainſi on multipliera 18 par 5, & l'on écrira le produit 90.

De même pour multiplier $a\sqrt{b}$ par $d\sqrt{b}$, on dira: a par d fait ad, & $\sqrt{b}$ par $\sqrt{b}$ fait b, lequel multiplié par ad fait adb.

Pour multiplier $6+3\sqrt{3}$ par

$$\begin{array}{r} 6+3\sqrt{3} \\ 3+2\sqrt{5} \\ \hline 18+9\sqrt{3}+12\sqrt{5}+6\sqrt{15} \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 6-6\sqrt{3} & \\ 2+2\sqrt{3} & \\ \hline 12-12\sqrt{3} & \\ +12\sqrt{3} & -36 \\ \hline & -24 \end{array}$$

$3+2\sqrt{5}$, qui ſont deux grandeurs complexes, on dira, comme dans la multiplication ordinaire des grandeurs complexes : 6 par 3 fait 18, $+3\sqrt{3}$ par $+3$ fait $+9\sqrt{3}$; enſuite 6 par $+2\sqrt{5}$ fait $+12\sqrt{5}$; & $+3\sqrt{5}$ par $+2\sqrt{5}$, fait $+6\sqrt{15}$.

Pour multiplier $6-6\sqrt{3}$ par $2+2\sqrt{3}$, je dis : 6 par 2 fait 12 ; $-6\sqrt{3}$ par $+2$ fait $-12\sqrt{3}$; $+6$ par $+2\sqrt{3}$ fait $+12\sqrt{3}$; $+2\sqrt{3}$ par $-6\sqrt{3}$ fait -36, parce que -6 par 2 fait 12, & $\sqrt{3}$ par racine 3 fait 3, le quel multiplié par -12 fait -36 ; & corrigeant l'expreſſion, en effaçant les grandeurs qui ſe détruiſent, le produit eſt -24.

On réſoudra de même les deux exemples par lettres que j'ai ajoutez ici, & tous les autres ſemblables ; où il eſt bon d'obſerver que ſouvent la multiplication fait évanoüir les grandeurs incommenſurables.

$$\begin{array}{l} ab+a\sqrt{b} \\ ab-a\sqrt{b} \\ \hline aabb+aab\sqrt{b} \\ \qquad -aab\sqrt{b}-aab \\ \hline aabb \qquad -aab \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b-c\sqrt{d} \\ a+b+c\sqrt{d} \\ \hline aa+ab-ac\sqrt{d} \\ \quad +ab \qquad +bb-bc\sqrt{d} \\ \qquad +ac\sqrt{d} \qquad +bc\sqrt{d}-cd \\ \hline aa+2ab \qquad +bb \qquad -cd \end{array}$$

Diviſer les grandeurs incommenſurables.

XV. On fera les préparations ordinaires, & ſurtout celle de réduire les grandeurs à un même ſigne ; car c'eſt principalement pour la multiplication & la diviſion que cette régle eſt faite, & la raiſon en eſt, que deux racines de même degré, quoiqu'appartenantes à différentes grandeurs, venant ou à ſe multiplier ou à ſe diviſer l'une par l'autre, donnent toujours pour produit ou pour quotient une racine de même degré, ainſi que nous avons déja dit ; au lieu que deux racines de deux degrés différens ne donnent point une autre racine, non plus que deux puiſſances appartenantes à différentes grandeurs ne donnent point une autre puiſſance : par exemple, le quarré 9 multiplié par le quarré 4, donne bien un autre quarré 36, dont la racine 6 eſt le produit des racines 2 & 3 ; de même que le quarré 36 diviſé par le quarré 4, donne un autre quarré 9, donc la racine 3 eſt le quotient de la racine 6 diviſée par la racine 2 ; mais ſi l'on multiplie le cube 8 par le quarré 9, on ne trouvera plus la même choſe, puiſque le pro-

duit 72 n'eſt pas une puiſſance, dont le produit 6 des racines 2 & 3 ſoit la racine; non plus que 72 diviſé par le cube 8 ne donne pas un quotient qui ſoit la racine de 72, diviſée par la racine 2.

Les préparations étant faites, ſi la grandeur qui eſt ſous le ſigne ſe trouve la même au dividende & au diviſeur, on écrira 1 au quotient & l'on effacera le ſigne. Si les grandeurs ſont différentes, on diviſera l'une par l'autre, & l'on écrira le quotient ſous le ſigne; & ſi la diviſion ne peut ſe faire ſans fraction, on ſe contentera d'écrire les deux grandeurs de même qu'on écrit les fractions. Enfin, s'il y a des grandeurs hors du ſigne, on les diviſera auſſi l'une par l'autre, ſi la diviſion peut ſe faire exactement, ſinon on laiſſera le tout en fraction.

Pour diviſer $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}$, on écrira 1 au quotient; de même pour diviſer $\sqrt[3]{5}$ par $\sqrt[3]{5}$, on écrira 1, & ainſi des autres, parce que toute racine, de quelque nature qu'elle ſoit, ne ſe contient elle-même qu'une fois.

Pour diviſer $\sqrt{6}$ par $\sqrt{3}$, on écrira $\sqrt{2}$, parce que 6 contient deux fois 3; & en effet, multipliant $\sqrt{3}$ par $\sqrt{2}$, on a $\sqrt{6}$.

Pour diviſer $8\sqrt{15}$ par $2\sqrt{5}$, on diviſera 8 par 2, ce qui fait 4, & 15 par 5, ce qui fait 3, & l'on écrira $4\sqrt{3}$; car $4\sqrt{3}$ multipliée par $2\sqrt{5}$ donne $8\sqrt{15}$.

Et pour diviſer $6\sqrt{3}$ par $3\sqrt{3}$, on diviſera 6 par 3, ce qui donne 2, & 3 par 3, ce qui fait 1, & l'on écrira 2, parce que 2 multiplié par 1 ne donne jamais que 2; & en effet, multipliez 2 par $3\sqrt{3}$, vous aurez $6\sqrt{3}$.

Mais pour diviſer $\sqrt{7}$ par $\sqrt{5}$, on écrira ſimplement $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$, parce que 7 ne peut être divisé par 5; & ſi l'on veut rendre l'expreſſion plus nette, on mettra $\sqrt{\frac{7}{5}}$ en faiſant enſorte que le ſigne radical de 7 embraſſe 5; car c'eſt la même choſe de dire: Tirez la racine de 7 & la racine de 5, & diviſez enſuite l'un par l'autre, ce que ſignifie la premiere expreſſion; & de dire: Tirez la racine de la fraction $\frac{7}{5}$, ce qui eſt ſignifié par la ſeconde, puiſqu'en tirant la racine d'une fraction, on tire ſéparément celle du numérateur & celle du dénominateur, après quoi on les écrit encore en fraction.

De même, pour diviſer $5\sqrt{3}$ par $7\sqrt{5}$, on écrira $\frac{5\sqrt{3}}{7\sqrt{5}}$, parce que 5 ne peut être diviſé par 7, non plus que 3 ne peut être diviſé par 5.

De même encore, pour diviſer $4\sqrt{3}$ par $2\sqrt{5}$, on pourra écrire $\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, parce que $\sqrt{3}$ ne peut ſe diviſer par 5, ou ſi l'on veut, rendre l'expreſſion plus nette, on écrira $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, à cauſe que 4 diviſé par 2 donne 2; & en effet, multipliez $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ par $2\sqrt{5}$, vous aurez $\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; & effaçant $\sqrt{5}$ de part & d'autre, vous aurez $4\sqrt{3}$; car une grandeur qui ſe trouve multipliée & enſuite diviſée par une même grandeur, eſt la même que ſi on n'avoit ni multiplié, ni diviſé.

Et pour diviſer $18+9\sqrt{3}+12\sqrt{5}+6\sqrt{15}$ par $3+2\sqrt{5}$, qui ſont des grandeurs complexes, j'écrirai le diviſeur ſous le dividende, enſorte que $2\sqrt{5}$ ſe trouve ſous un terme qui contienne $\sqrt{5}$; après quoi je dirai: 3 en 18 eſt 6, j'écrirai 6 au quotient; enſuite je dirai 3 fois 6 font 18, & de 18 ôtez 18, le reſte eſt zero; 6 par $+2\sqrt{5}$ fait $+12\sqrt{5}$, & de $+12\sqrt{5}$ ôtez $+12\sqrt{5}$, le reſte eſt zero; j'abaiſſerai les deux termes reſtans, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je dirai: $+9\sqrt{3}$ diviſé par 3, donne au quotient $+3\sqrt{3}$; ainſi $+3\sqrt{3}$ par 3 fait $9\sqrt{3}$, & de $9\sqrt{3}$ ôtez $9\sqrt{3}$, le reſte eſt zero; $+3\sqrt{3}$ par $+2\sqrt{5}$ fait $+6\sqrt{15}$, & de $+6\sqrt{15}$ ôtez $+6\sqrt{15}$, le reſte eſt zero; le quotient eſt donc $6+3\sqrt{3}$, & c'eſt la preuve du premier exemple que j'ai donné de la multiplication de ces grandeurs; car le nombre à multiplier eſt en effet $6+3\sqrt{3}$.

$$\begin{array}{l|l} 18+9\sqrt{3}+12\sqrt{5}+6\sqrt{15} & 6+3\sqrt{3} \\ \hline 3+\quad +2\sqrt{5} & \\ \hline 0+9\sqrt{3}\ \ 0\quad +6\sqrt{15} & \\ \quad 3\qquad\quad +2\sqrt{5} & \\ \hline 0 \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

De même, pour diviſer -24 par $6-6\sqrt{3}$, j'examine que ſi ce produit -24 vient de $-6\sqrt{3}$, multiplié par une autre grandeur, ſoit complexe ſoit incomplexe, il faut néceſſairement qu'on ait corrigé l'expreſſion en l'abrégeant, c'eſt pourquoi je tâche de la réduire en deux termes, de ſorte que le premier ſoit poſitif & puiſſe être diviſé par 6; & pour cela je prens 12 pour le premier, & par conſéquent l'autre doit être 36, parce que $12-36=-24$; j'écris donc $12-36$ pour dividende, & je mets le diviſeur par-deſſous;

deſſous; enſuite je dis: 12 diviſé par 6, donne 2, ainſi 2 par 6 fait 12, & de 12 ôtez 12, le reſte eſt zero; 2 par $-6\sqrt{3}$ fait $-12\sqrt{3}$, & de $-12\sqrt{3}$ que je ſuppoſe, ôtez $-12\sqrt{3}$, le reſte eſt zero, & j'écris $+12\sqrt{3}$ pour corriger ma ſuppoſition; j'abaiſſe le dernier terme -36, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je dis: $+12\sqrt{3}$ diviſé par $+6$, donne $+2\sqrt{3}$; ainſi $+2\sqrt{3}$ par $+6$ fait $+12\sqrt{3}$, & de $+12\sqrt{3}$ ôtez $+12\sqrt{3}$, le reſte eſt zero; $+2\sqrt{3}$ par $-6\sqrt{3}$ fait -12 multiplié par 3 ou -36, & de -36 ôtez -36, le reſte eſt zero; ainſi le quotient eſt $2+2\sqrt{3}$, & c'eſt la preuve du ſecond exemple de la multiplication. Au reſte, je n'ai donné cet exemple que pour faire voir comment, en cherchant un peu, on peut venir à bout de certaines diviſions qui paroiſſent preſque impoſſibles; mais j'avertis que ſi en pareil cas on ſe trouvoit trop embarraſſé à trouver les expreſſions convenables pour faire la diviſion, le plus court ſeroit d'écrire le dividende & le diviſeur en fraction, parce qu'après tout il n'eſt pas toujours sûr qu'on puiſſe trouver des expreſſions telles qu'il le faudroit, y aïant bien des cas où la diviſion exacte eſt effectivement impoſſible.

$12-36$	$2+2\sqrt{3}$
$6-6\sqrt{3}$	
$0+12\sqrt{3}-36$	
$6\quad -6\sqrt{3}$	
0 0	

Pour diviſer $aabb-aab$ par $ab+a\sqrt{b}$, j'écris le diviſeur ſous le dividende, & je dis: $aabb$ diviſé par ab donne ab; ainſi ab par ab, fait $aabb$, & de $aabb$ ôtez $aabb$, le reſte eſt zero; $+ab$ par $+a\sqrt{b}$, fait $+aab\sqrt{b}$, & de $+aab\sqrt{b}$ que je ſuppoſe, ôtez $+aab\sqrt{b}$, le reſte eſt zero, & j'écris $-aab\sqrt{b}$ pour corriger ma ſuppoſition; j'abaiſſe le ſecond terme $-aab$, & mettant le diviſeur par-deſſous, je dis: $-aab\sqrt{b}$ diviſé par ab, donne $-a\sqrt{b}$; ainſi $-a\sqrt{b}$ par $+ab$, fait $-aab\sqrt{b}$, & de $-aab\sqrt{b}$ ôtez $-aab\sqrt{b}$, le reſte eſt zero; $-a\sqrt{b}$ par $+a\sqrt{b}$, fait $-aa$ multiplié par b ou $-aab$, & de $-aab$ ôtez $-aab$, le reſte eſt zero; ainſi le quotient eſt $ab-a\sqrt{b}$, & c'eſt la preuve du troiſiéme exemple de la multiplication.

$aabb-aab$	$ab-a\sqrt{b}$
$ab+a\sqrt{b}$	
$0-aab\sqrt{b}-aab$	
$ab\quad +a\sqrt{b}$	
0 0	

De même, pour diviſer $aa+2ab+bb-ccd$ par $a+b-c\sqrt{d}$, j'écris le diviſeur ſous le dividende, & je dis: aa diviſé par a, don-

ne a que j'écris au quotient ; a par a fait aa, & de aa ôtez aa, le reſte eſt zero ; $+a$ par $+b$, fait $+ab$, & de $+2ab$ ôtez ab, reſte $+ab$; $+a$ par $-c\sqrt{d}$ fait $-ac\sqrt{d}$, & de $-ac\sqrt{d}$ que je ſuppoſe, ôtez $-ac\sqrt{d}$, le reſte eſt zero, mais j'écris $+ac\sqrt{d}$ pour corriger ma ſuppoſition ; j'abaiſſe le terme $+bb$, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je dis : $+ab$ diviſé par a, donne $+b$ que j'écris au quotient ; $+b$ par $+a$ fait $+ab$, & de $+ab$ ôtez $+ab$, le reſte eſt zero ; $+b$ par $+b$ fait $+bb$, & de $+bb$ ôtez $+bb$, le reſte eſt zero ; $+b$ par $-c\sqrt{d}$ fait $-bc\sqrt{d}$, & de $-bc\sqrt{d}$ que je ſuppoſe, ôtez $-bc\sqrt{d}$, le reſte eſt zero, mais j'écris $+bc\sqrt{d}$ pour corriger ma ſuppoſition ; j'abaiſſe le terme $+ac\sqrt{d}$ du premier reſte, & le terme $-ccd$ du dividende, & écrivant le diviſeur par-deſſous, je dis : $+ac\sqrt{d}$ diviſé par $+a$ donne $+c\sqrt{d}$, que j'écris au quotient ; $+c\sqrt{d}$ par $+a$, fait $+ac\sqrt{d}$, & de $+ac\sqrt{d}$ ôtez $+ac\sqrt{d}$, reſte rien ; $+c\sqrt{d}$ par $+b$ fait $+bc\sqrt{d}$, & de $+bc\sqrt{d}$ ôtez $+bc\sqrt{d}$, reſte rien ; $+c\sqrt{d}$ par $-c\sqrt{d}$ fait $-cc$ multiplié par d ou $-ccd$, & de $-ccd$ ôtez $-ccd$, le reſte eſt zero ; ainſi le quotient eſt $a+b+c\sqrt{d}$, & c'eſt la preuve du quarriéme exemple de la multiplication.

$aa+2ab+bb-ccd$	$\vert$	$a+b+c\sqrt{d}$		
$a+b-c\sqrt{d}$				
$0+ab+bb+ac\sqrt{d}$				
$a+b-c\sqrt{d}$				
$0\quad 0+ac\sqrt{d}+bc\sqrt{d}-ccd$				
$a+b-c\sqrt{d}$				
$0\quad 0\quad 0$				

De l'extraction des Racines des grandeurs incommenſurables.

XVI. Quand les incommenſurables ſont incomplexes, comme $\sqrt{a}$, ou $\sqrt{bc}$, ou $\sqrt{a+b}$, &c. il eſt évident qu'on n'en peut tirer la racine que par approximation, & alors il faut ſubſtituer à la place des lettres, leur valeur en chiffre, & tirer enſuite la racine, ainſi que nous l'avons dit ailleurs.

Mais quand ces grandeurs ſont compoſées de pluſieurs termes, il eſt sûr qu'elles peuvent avoir des racines, & la difficulté conſiſte à trouver des régles pour les tirer ; tout ce qu'on a pû découvrir juſqu'ici ſur cette matiere, ne regarde que les racines, dont les termes incommenſurables n'ont d'autres ſignes que $\sqrt{\ }$ ou $\sqrt[3]{\ }$,

quoiqu'on en trouve quelquefois d'autres par hazard; & de tous les Auteurs qui en ont écrit, je n'en vois point qui s'y soient plus attachés que le Pere Prestet, dans la seconde édition de ses Elémens de Mathématique; je vais rapporter les régles qu'il en donne, en y mettant les explications dont elles me paroîtront avoir besoin; & quant au surplus, ceux qui seront curieux d'en savoir davantage auront recours à l'Ouvrage de cet Auteur, où il avouë lui-même qu'il a approfondi ce sujet beaucoup plus qu'il n'est nécessaire pour les divers usages qu'on en peut faire dans les occasions.

Avant d'en venir à ces régles, il faut savoir qu'il n'en est pas des multinomes incommensurables comme des commensurables; dans ceux-ci, on compte autant de termes qu'ils ont de grandeurs avec les signes + ou −, ainsi $a+b+c$ est un trinome, $a+b+c+d$, est un quadrinome, & ainsi des autres; mais à l'égard des incommensurables, les termes se comptent autrement. $a+b+\sqrt{d}$, n'est qu'un binome, parce que les termes a & b étant commensurables n'en composent qu'un, attendu qu'en substituant leur valeur en chiffres, on pourroit effectivement n'en faire qu'un seul; de même, $a+b+d+c+\sqrt{g}$ n'est qu'un binome pour la même raison, $a+b+c\sqrt{d}+c\sqrt{d}$ n'est encore qu'un binome; car $a+b$ ne fait qu'un terme, & $c\sqrt{d}+c\sqrt{d}$ n'en font aussi qu'un, à cause que les grandeurs c & c étant toutes les deux multipliées par $\sqrt{d}$ ne feroient en effet qu'un terme, si on mettoit leur valeur en chiffres; de même, & pour la même raison; $ab+ce+df+g\sqrt{p}+h\sqrt{p}+m\sqrt{q}+n\sqrt{q}$ n'est qu'un trinome, parce que $ab+ce+df$ ne font qu'un terme, que $g\sqrt{p}+h\sqrt{p}$ n'en font aussi qu'un; de même que $m\sqrt{q}+n\sqrt{q}$, & ainsi des autres.

Pour mieux distinguer les termes des multinomes, lorsqu'ils sont ainsi composez, on met une ligne par-dessus qui s'étend sur toutes les parties d'un même terme; ainsi on écrit: $\overline{a+b+\sqrt{d}}$; $\overline{a+b+d+e+\sqrt{g}}$; $\overline{ab+ce+df+g\sqrt{p}+h\sqrt{p}+m\sqrt{q}+n\sqrt{q}}$; ce qu'on doit observer de même à l'égard de tous les autres pour éviter la confusion.

PREMIERE REGLE.

XVII. Prenons un binome $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dont les deux termes soient chacun sous le signe $\sqrt{}$; faisons-en le quarré $\overline{a+b+2\sqrt{ab}}$, ce quarré sera encore un binome dont le premier terme sera com-

menſurable, & ce terme ſera la ſomme des quarrés a & b des deux termes $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ de la racine.

Faiſons le quarré $aa+2ab+bb$ du terme commenſurable $\overline{a+b}$, & le quarré $4ab$ du terme incommenſurable $2\sqrt{ab}$, retranchons le ſecond du premier, le reſte $aa-2ab+bb$ ſera un quarré parfait, dont la racine $a-b$ ſera la différence des quarrés a & b.

Ajoutons cette racine $a-b$ à la ſomme $a+b$ des deux quarrés, nous aurons $2a$, c'eſt-à-dire, le double de a quarré de $\sqrt{a}$; & ôtant la même différence $a-b$ de la ſomme $a+b$, nous aurons $2b$, c'eſt-à-dire le double de b quarré de $\sqrt{b}$.

De-là il ſuit, que pour extraire la racine d'un binome quarré, dont le premier terme eſt commenſurable, il faut faire les quarrés de ſes deux termes, retrancher le ſecond du premier, tirer la racine quarrée du reſte; enſuite ajouter cette racine au premier terme, & tirer la racine quarrée de la moitié de la ſomme, ce qui donnera le premier terme $\sqrt{a}$ de la racine qu'on cherche; & pour avoir le ſecond, il faudra retrancher du premier terme cette même racine du reſte, & tirer la racine de la moitié du reſtant.

PREMIER EXEMPLE.

Soit le binome quarré $19+8\sqrt{3}$, dont le premier terme eſt commenſurable; je fais le quarré 361 de 19, & le quarré 192 de $8\sqrt{3}$, je retranche l'un de l'autre, & le reſte eſt 169; j'en tire la racine quarrée qui eſt 13; j'ajoute 13 à 19, & la ſomme eſt 32, dont la moitié eſt 16, & la racine de 16 eſt 4; ainſi 4 eſt le premier terme de la racine que je cherche.

Je retranche 13 de 19, le reſte eſt 6, dont la moitié eſt 3 & la racine de 3

19		$8\sqrt{3}$		
19		$8\sqrt{3}$		
171		64		
19		3		
361		192		
192				
169 reſte		1 | 69	13 racine du reſte	
		1		
19	19		23	
13	13		00	
32	6			
16	3			

$4+\sqrt{3}$ racine du binome

$4+\sqrt{3}$

$16+8\sqrt{3}+3=19+8\sqrt{3}$

est $\sqrt{3}$; ainſi $\sqrt{3}$ eſt le ſecond terme de la racine du binome, laquelle eſt par conſéquent $4+\sqrt{3}$; & en effet, multipliant cette racine par elle-même, on aura $19+8\sqrt{3}$ qui eſt le binome propoſé.

SECOND EXEMPLE.

Soit le binome quarré $27+10\sqrt{2}$; je fais le quarré 729 de 27, & le quarré 200 de $10\sqrt{2}$; je retranche l'un de l'autre, & le reſte eſt 529, dont la racine quarrée eſt 23 ; j'ajoute 23 à 27, & la ſomme eſt 50, dont la moitié eſt 25, & la racine de 25 eſt 5 ; ainſi 5 eſt le premier terme de la racine que je cherche ; je retranche 23 de 27, & le reſte eſt 4, dont la moitié eſt 2, & la racine de 2 eſt $\sqrt{2}$; ainſi $\sqrt{2}$ eſt l'autre terme de la racine du binome, laquelle par conſéquent eſt $5+\sqrt{2}$; & en effet, multipliant cette racine par elle-même, on aura $27+10\sqrt{2}$ qui eſt le binome propoſé.

27
27
189
54
729
200
529

$10\sqrt{2}$
$10\sqrt{2}$
100
2
200

5|29 | 23
2
1.29
43
00

27
23
50
25

27
23
4
2

$5+\sqrt{2}$ racine du binome
$5+\sqrt{2}$

$25+10\sqrt{2}+2=27+10\sqrt{2}$

TROISIE'ME EXEMPLE.

Soit le binome $369+108\sqrt{5}$, pour abréger je diviſe l'un & l'autre par 9, & j'ai le nouveau binome $41+12\sqrt{5}$; je fais le quarré 1681 de 41, & le quarré 720 de $12\sqrt{5}$, je retranche l'un de l'autre, & tirant la racine du reſte, cette racine eſt 31 ; j'ajoute 31 à 41, & la ſomme eſt 72, dont la moitié eſt 36, & ſa racine

6; ainſi 6 eſt la premiere partie de la racine du binome $41+12\sqrt{5}$; je retranche 31 de 41, & le reſte eſt 10, dont la moitié eſt 5, & la racine eſt 5; ainſi $\sqrt{5}$ eſt l'autre terme de la racine du binome $41+12\sqrt{5}$; mais comme pour avoir ce binome j'ai diviſé le binome propoſé par 9, dont la racine eſt 3, je multiplie $6+\sqrt{5}$ par 3, & le produit $18+3\sqrt{5}$ eſt la racine que je cherche; & en effet, multipliant cette racine par elle-même, on aura $369+108\sqrt{5}$, qui eſt le binome propoſé.

41	$12\sqrt{5}$		
41	$12\sqrt{5}$		
41	24		
164	12		
1681	144		
720	5		
961	720	9|61 | 31	
		3	
41	41	0.61	
31	31	61	
72	10	00	
36	5		
	$6+\sqrt{5}$		
	3		
	$18+3\sqrt{5}$ racine		
	$18+3\sqrt{5}$		
	$324+108\sqrt{5}+45=369+108\sqrt{5}$		

SECONDE REGLE.

XVIII. Toute puiſſance d'un binome $a+\sqrt{b}$, dont l'un des termes eſt commenſurable & l'autre a le ſigne $\sqrt{}$, eſt toujours un binome, dont un terme eſt commenſurable & l'autre ſous le ſigne; & ſi l'on fait le quarré du terme commenſurable & celui de l'incommenſurable, & qu'on retranche le ſecond du premier, le reſte ſera une puiſſance parfaite du même degré que celle du binome; & la racine de cette puiſſance ſera $aa-b$, qui eſt la différence des quarrés aa, b, des deux termes a, $\sqrt{b}$, du binome $a+\sqrt{b}$.

Pour le prouver, faites le quarré $aa+b+2a\sqrt{b}$ du binome $a+\sqrt{b}$, & enſuite les quarrés $a^4+2aab+bb$, & $4aab$ du terme commenſurable & de l'incommenſurable, retranchez le ſecond du premier, le reſte ſera $a^4-2aab+bb$, dont la racine quarrée eſt $aa-b$.

De même, faites le cube $\overline{a^3+3ab+3aa\sqrt{b}+b\sqrt{b}}$ du binome $a+\sqrt{b}$, & enſuite les quarrés $a^6+6a^4b+9aabb$, & $9a^4b+6aabb+bbb$ du terme commenſurable & de l'incommenſurable, ôtez le ſecond du premier, le reſte ſera $a^6-3a^4b+3aabb-b^3$ qui eſt un cube parfait, dont la racine eſt $aa-b$.

De même, faites la quatriéme puiſſance $\overline{a^4+6aab+bb+4a^3\sqrt{b}+4ab\sqrt{b}}$; & enſuite les quarrés $a^8+12a^6b+38a^4bb+12aab^3+b^4$, & $16a^6bb+32a^4bb+16aab^3$ du terme commenſurable & de l'incommenſurable; retranchez l'un de l'autre, & le reſte ſera $a^8-4a^6bb+6a^4bb-4aab^3+b^4$ qui eſt une quatriéme puiſſance parfaite, dont la racine eſt encore $aa-b$; & ainſi des autres puiſſances plus élevées.

D'où il ſuit que pour tirer telle racine qu'on voudra d'un binome, dont le premier membre eſt commenſurable, il faut quarrer les deux membres, puis retrancher l'un de l'autre; enſuite tirer la racine du reſte convenablement à la puiſſance du binome, & cette racine ſera la différence des quarrés des deux termes de la racine qu'on cherche.

Mais comme cette différence ſeule ne ſuffit pas pour faire connoître l'un & l'autre terme en particulier, le Pere Preſtet parvient à les découvrir par un principe qu'il eſt bon d'expliquer auparavant, pour faire comprendre le reſte de ſon calcul.

Il faut donc ſavoir que ſi l'on a une puiſſance quelconque, comme, par exemple, le cube $a^3+3aab+3abb+b^3$, & qu'on connoiſſe la différence $aa-bb$ des quarrés des deux termes de ſa racine, ſi l'on diviſe cette différence $aa-bb$ par la racine $a+b$, le quotient ſera $a-b$, & ajoutant ce quotient au diviſeur $a+b$, la ſomme eſt $2a$, c'eſt-à-dire, le double du premier terme de la racine, & par conſéquent le premier terme deviendroit connu par-là ſi on ne le connoiſſoit pas; & ſi on prend le quarré aa de ce premier terme, & qu'on en retranche la différence $aa-bb$, le reſte ſera bb, c'eſt-à-dire, le quarré du ſecond terme b de la racine, lequel deviendroit auſſi connu par-là ſi on ne le connoiſſoit pas d'ailleurs.

Cela ſuppoſé, après avoir trouvé la différence $aa-b$ des quarrés des deux termes de la racine qu'on cherche, il faut tirer une racine approchée du binome propoſé, diviſer la différence $aa-b$ par cette racine approchée; enſuite ajouter le quotient au diviſeur, & prendre la moitié de la ſomme, laquelle ſera la valeur

du premier terme de la racine; enſuite on prendra le quarré de ce premier terme, & retranchant la différence $aa-b$ de ce quarré, on aura le quarré du ſecond terme, & tirant la racine quarrée, cette racine ſera le ſecond terme.

PREMIER EXEMPLE.

Soit le binome cubique $45+29\sqrt{2}$ dont il faille extraire la racine cubique, je fais le quarré 2025 de la partie commenſurable, & le quarré 1682 de la partie incommenſurable; je retranche l'une de l'autre, & tirant la racine cubique du reſte, je trouve 7 qui eſt la différence des quarrés des deux termes de la racine que je cherche.

Je tire la racine cubique approchée du binome, en tirant d'abord la racine quarrée de 1682 qui eſt la partie incommenſurable, & cette racine eſt 41, laquelle ajoutée à la partie commenſurable 45, fait 86, & la racine cubique approchée de 86 eſt entre $4\frac{1}{3}$ & $4\frac{1}{2}$; mais je prens $4\frac{1}{2}$, parce que dès que l'excès n'eſt pas d'une moitié d'unité, cela ne fait rien; je diviſe donc 7 par $4\frac{1}{2}$, ce que je fais en réduiſant l'un & l'autre en moitié, & le quotient eſt $1\frac{1}{9}$; j'ajoute

45	$29\sqrt{2}=\sqrt{1682}$	ceci ſe fait en faiſant paſſer 29 ſous le ſigne $\sqrt{}$.
45	$29\sqrt{2}$	
225	261	
180	58	
2025	841	
1682	2	
343	1682	

16|82 | 41

4	45
81	86
01	

Racine cubique 7

Racine cubique du binome approchée $4\frac{1}{2}$.

9		
14	$1\frac{1}{9}$	
5		9
	$4\frac{1}{2}$	7
	$6\frac{1}{9}$	2
	3	

ce

ce quotient au diviſeur $4\frac{1}{2}$, la ſomme eſt environ $6\frac{1}{9}$, dont je prens la moitié ſans fraction, ce que je puis faire, parce que j'ai pris la racine $4\frac{1}{2}$ un peu au-deſſus de ſa juſte valeur, & c'eſt pour cela même qu'il faut toujours prendre cette racine un peu excédante. Or la moitié eſt 3, qui eſt le premier terme de la racine cubique que je cherche; je fais le quarré de 3 qui eſt 9, & le retranchant de 7, le reſte eſt 2, qui eſt le quarré du ſecond terme de la racine, & par conſéquent ce ſecond terme eſt $\sqrt{2}$, & la racine cubique du binome eſt $3+\sqrt{2}$; & en effet, faiſant le cube de $3+\sqrt{2}$, on trouve $45+29\sqrt{2}$, qui eſt le binome propoſé.

Juſte racine cubique du binome $3+\sqrt{2}$

$3+\sqrt{2}$

$9+3\sqrt{2}$
$+3\sqrt{2}+2$

$11+6\sqrt{2}$
$3+\sqrt{2}$

$33+18\sqrt{2}$
$+11\sqrt{2}+12$

$45+29\sqrt{2}$

SECOND EXEMPLE.

Soit le binome cubique $80+48\sqrt{3}$ dont il faille extraire la racine cubique; je fais le quarré 6400 de la partie commenſurable, & le quarré 6912 de l'incommenſurable, & comme ce dernier eſt plus grand que l'autre, je retranche le premier du ſecond, & la racine cubique du reſte eſt 8, qui eſt la différence des quarrés des deux termes de la racine que je cherche; je tire la racine cubique approchée du binome; en tirant d'abord la racine quarrée approchée de 6912, qui eſt le quarré de la partie incommenſurable; cette

80
80

6400

$48\sqrt{3}=\sqrt{6912}$
$48\sqrt{3}$

384
192

2304
3

6912
6400

512 racine cubique 8, & différence des quarrés.

racine eſt 83, laquelle ajoutée à la partie commenſurable fait 163, dont la racine cubique eſt entre 5 & $5\frac{1}{2}$; je prens donc $5\frac{1}{2}$, & diviſant 8 par $5\frac{1}{2}$, ce que je fais en réduiſant l'un & l'autre en moitié, le quotient eſt $1\frac{1}{11}$ ou $1\frac{1}{2}$ à peu de choſe près; & comme la partie commenſurable eſt moindre que l'autre, je retranche $1\frac{1}{2}$ du diviſeur $5\frac{1}{2}$, & le reſte eſt 4, dont la moitié 2 eſt par conſéquent le premier terme de la racine que je cherche; je fais le quarré de 2 qui eſt 4, & l'ajoutant à la différence 8, la ſomme eſt 12, qui eſt par conſéquent le quarré du ſecond terme de cette racine; & tirant la racine quarrée de 12, j'ai $2\sqrt{3}$ qui eſt le ſecond terme, ainſi la racine cubique du binome eſt $2+2\sqrt{3}$; & en effet, faiſant le cube de cette racine, je trouve $80+48\sqrt{3}$, qui eſt le binome propoſé.

$$\begin{array}{r} 83 \\ 80 \\ \hline 163 \end{array}$$

Racine cubique approchée du binome $5\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|l} 11 & \\ 16 & 1\frac{1}{11} \text{ ou environ } 1\frac{1}{2} \\ \hline 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 5\frac{1}{2} & 8 \\ 1\frac{1}{2} & 4 \\ \hline 4 & 12 \\ 2 & \end{array}$$

Juſte racine cubique du binome $2+2\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} 2+2\sqrt{3} \\ 2+2\sqrt{3} \\ \hline 4+4\sqrt{3} \\ +4\sqrt{3}+12 \\ \hline 16+8\sqrt{3} \\ 2+2\sqrt{3} \\ \hline 32+16\sqrt{3} \\ +32\sqrt{3}+48 \\ \hline 80+48\sqrt{3} \end{array}$$

Pour faire comprendre pourquoi j'ai retranché le quotient $1\frac{1}{2}$ du diviſeur $5\frac{1}{2}$, & pourquoi j'ai ajouté le quarré 4 à la différence 12; ſuppoſons que la différence fût $-aa+bb$, attendu que le premier terme étant moindre que l'autre, il faut retrancher ſon quarré aa du quarré bb; ſi nous diviſons cette différence par $+a+b$, que nous ſuppoſons être la racine cubique approchée, le quotient ſera $-a+b$; or ſi vous voulez, par le moïen du quotient & du diviſeur, avoir le double du premier terme, il eſt évident qu'il faut retrancher le quotient du diviſeur; car de $+a$ ôtez $-a$, le reſte

ſera $2a$, & de $+b$ ôtez $+b$, le reſte eſt zero ; ainſi vous aurez $2a$, dont la moitié a ſera le premier terme ; après quoi faiſant le quarré aa, il eſt encore évident qu'il faut ajouter ce quarré aa à la difference $-aa+bb$ pour avoir le quarré du ſecond terme ; car $+aa-aa$ ne donnera rien, & le reſte ſera $+bb$.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Pour extraire la racine cinquiéme de $41+29\sqrt{2}$, je fais les quarrés 1681 & 1682 des deux parties ; je retranche le premier du ſecond, & le reſte eſt 1, dont la cinquiéme racine 1 eſt la difference des quarrés des deux termes de la racine que je cherche.

41 — 41 — 41 — 164 — 1681

$29\sqrt{2}=\sqrt{1682}$ — $29\sqrt{2}$ — 261 — 58 — 841 — 2 — 1682 — 1681 — 1 dont la racine cinquiéme eſt un

Je tire la racine cinquiéme approchée du binome, en tirant d'abord la racine quarrée approchée de la partie incommenſurable $29\sqrt{2}$ ou $\sqrt{1682}$, qui eſt 41 ; & ajoutant enſuite 41 à la partie commenſurable 41, j'ai 82, dont la racine cinquiéme approchée eſt $2\frac{1}{2}$; je diviſe la difference 1 par $2\frac{1}{2}$, & le quotient eſt $\frac{2}{5}$, ou à peu près $\frac{1}{2}$; & comme la partie commenſurable eſt moin-

16|82 | 41 — 4 — 41 — 0.82 — 82 — 81 — 1

Racine cinquiéme approchée du binome $2\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}$ quotient qui vaut, à peu près $\frac{1}{2}$.

$2\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ — 2 — 1 — 1 — 1

dre que l'incõmenſurable, je retranche le quotient du diviſeur, & le reſte eſt 2, dont la moitié 1 eſt le premier terme de la racine que je cherche ; je prens le quarré 1 de ce premier terme, & l'ajoutant à la différence 1, la ſomme eſt 2, dont la racine quarrée $\sqrt{2}$ eſt le ſecond terme cherché, ainſi la racine cinquiéme du binome eſt $1+\sqrt{2}$; & en effet, faiſant la cinquiéme puiſſance de cette racine, on trouve $41+29\sqrt{2}$, qui eſt le binome propoſé.

Juſte racine 5e du binome $1+\sqrt{2}$

$1+\sqrt{2}$

$1+\sqrt{2}$
$+\sqrt{2}+2$

$3+2\sqrt{2}$ quarré
$3+2\sqrt{2}$

$9+6\sqrt{2}$
$+6\sqrt{2}+8$

$17+12\sqrt{2}$ 4e puiſſance
$1+\sqrt{2}$

$17+12\sqrt{2}$
$+17\sqrt{2}+24$

$41+29\sqrt{2}$ 5e puiſſance

Tout ce que nous avons dit juſqu'ici ſur cette ſeconde régle ſuppoſe que le premier terme de la racine qu'on cherche ſoit un nombre entier, puiſqu'on prend toujours ſans fraction la moitié du quotient ajouté au diviſeur ou retranché du diviſeur, ainſi cette régle n'eſt pas certaine dans tous les cas ; cependant s'il paroît par le premier terme du binome dont on veut extraire la racine, que le premier terme de cette racine ait une fraction, on peut encore réſoudre ce binome par cette régle, en y emploïant les préparations que nous allons voir.

Soit, par exemple, le binome $1\frac{2}{3}+\frac{22}{27}\sqrt{2}$, dont on demande la racine cubique, je réduis le premier terme en fraction, ce qui fait $\frac{5}{3}$; & pour lui donner le même dénominateur que celui du ſecond terme, je multiplie ſon numérateur & ſon dénominateur par 9, ce qui fait $\frac{45}{27}$, ainſi le binome eſt $\frac{45}{27}+\frac{22}{27}\sqrt{2}$; je le multiplie par 27 pour faire évanoüir la fraction, & j'ai $45+29\sqrt{2}$, qui eſt un nouveau binome ſans fraction, & dont le premier terme eſt commenſurable ; je cherche la racine cubique de ce binome, en faiſant les quarrés 2025 & 1682 des deux parties ; & retranchant la ſeconde de la premiere, le reſte eſt 343, dont la racine cubique 7 eſt la différence des quarrés des deux termes de la racine ; je ti-

re la racine cubique approchée du binome, que je trouve être $4\frac{1}{2}$, ainſi je diviſe la différence par $4\frac{1}{2}$, & le quotient eſt à peu près $1\frac{1}{2}$; & comme le quarré du premier terme eſt plus grand que le quarré du ſecond, j'ajoute le quotient au diviſeur, & la ſomme eſt 6, dont la moitié 3 eſt le premier terme de la racine cubique du binome $45+29\sqrt{3}$; je fais le quarré 9 de ce premier terme, & de 9 je retranche la différence 7, le reſte 2 eſt le quarré du ſecond terme, ainſi la racine cubique de ce binome eſt $3+\sqrt{2}$; or pour faire ce binome, j'ai multiplié le binome propoſé par 27, dont la racine cubique eſt 3; donc pour avoir ſa racine je dois diviſer $3+\sqrt{2}$ par 3, & j'aurai $1+\frac{1}{3}\sqrt{2}$ pour racine cubique du binome propoſé; & en effet, ſi l'on fait le cube de cette racine, on aura $1\frac{1}{3}+\frac{29}{27}\sqrt{2}$ qui eſt le binome propoſé.

45	$29\sqrt{2}$
45	$29\sqrt{2}$
225	261
180	58
2025	841
1682	2
	1682

343 reſte, dont la racine cubique eſt 7

16|82	41
4	45
0.82	86
81	
1	

$4\frac{1}{2}$ racine cub. approchée du binome.

9	
14	$1\frac{1}{9}$ ou à peu près $1\frac{1}{2}$.
5	

	$4\frac{1}{2}$	9
	$1\frac{1}{2}$	7
	6	2
	3	

La juſte racine cubiq. du binome réduit eſt $3+\sqrt{2}$
& celle du premier binome $1+\frac{1}{3}\sqrt{2}$

On pourroit de la même façon réſoudre un binome dont les deux termes auroient le ſigne radical, mais il arrive en ce cas que

l'expreſſion de la racine qu'on trouve eſt plus compliquée que celle du binome même ; & que la différence des quarrés ne ſe trouve pas toujours une puiſſance parfaite, ce qui oblige à faire d'autres préparations dont je ne parlerai ici que parce que les principes qu'on emploïe pour cela, peuvent être utiles en d'autres occaſions.

Soit donc le binome $11\sqrt{2}+\sqrt{243}$ dont on demande la racine cubique, je la multiplie par $\sqrt{2}$, & j'ai un autre binome $22+\sqrt{486}$ dont le premier terme eſt commenſurable ; mais en faiſant les quarrés 484 & 486 des deux termes, je trouve que leur différence n'eſt pas un cube. Or pour faire que cette différence devienne un cube, je dis : Le quarré 486 contient la différence 2, donc ſa racine $\sqrt{486}$ contient la racine de 2, ou $\sqrt{2}$; ainſi ſi je multiplie le binome $22+\sqrt{486}$ par le quarré 2 de $\sqrt{2}$, j'aurai un nouveau binome $44+2\sqrt{486}$, dont la ſeconde partie $2\sqrt{486}$ contiendra le cube de $\sqrt{2}$; & quand je ferai le quarré de cette partie, ce quarré contiendra la ſixiéme puiſſance de $\sqrt{2}$, c'eſt-à-dire 8, qui eſt un nombre cubique, & qui ſera la différence des quarrés.

22	
22	486
	484
44	
44	2
484	

Je fais donc les quarrés 1936 & 1944 des deux parties, & retranchant le premier du ſecond, la différence eſt en effet 8, dont la racine cubique 2 eſt la différence des quarrés des deux termes de la racine cubique du binome $44+2\sqrt{486}$; je tire la racine cubique approchée de ce binome, & je trouve qu'elle eſt à peu près $4\frac{1}{2}$; je diviſe donc la différence 2 par $4\frac{1}{2}$, & le quotient eſt $\frac{4}{9}$ ou à

44	486
44	4
176	1944
176	1936
1936	8 différence dont la racine cubique eſt 2.

19|44 | 44	
4	44
3.44	88
84	
8	

$\frac{4}{9}$ quotient, ou à peu près $\frac{1}{2}$.

peu près $\frac{1}{2}$; & comme le quarré de la partie commenſurable eſt moindre que celui de l'incommenſurable, je retrãche le quotient $\frac{1}{2}$ du diviſeur $4\frac{1}{2}$, & le reſte eſt 4, dont la moitié 2 eſt la premiere partie de la racine cubique du binome $44+2\sqrt{486}$; & faiſant le quarré de 2, je l'ajoute à la différence 2, & la ſomme 6 eſt le quarré de la ſeconde partie ; ainſi la racine cubique de ce binome eſt $2+\sqrt{6}$; mais comme j'avois multiplié le binome $22+\sqrt{486}$ par 2, pour avoir ce binome $44+2\sqrt{486}$; ſi je veux avoir la racine du binome $22+\sqrt{486}$, il faut que je diviſe la racine $2+\sqrt{6}$ par $\sqrt[3]{2}$, ce que je fais en réduiſant le premier terme 2 à $\sqrt[3]{8}$, lequel diviſé par $\sqrt[3]{2}$ donne $\sqrt[3]{4}$; & enſuite je réduis $\sqrt{6}$ & $\sqrt[6]{2}$ au même expoſant, ce qui me donne $\sqrt[6]{216}$ & $\sqrt[6]{4}$; & diviſant l'un par l'autre, j'ai $\sqrt[6]{54}$; ainſi la racine du binome $22+\sqrt{486}$ eſt $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{54}$.

$$\begin{array}{r} 4\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \hline 4 \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

$2+\sqrt{6}$ racine cubique du dernier binome.

$\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{54}$ racine cubique du ſecond binome.

$\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{27}$ racine du premier binome.

Mais pour avoir le binome $22+\sqrt{486}$, j'ai multiplié le binome propoſé $11\sqrt{2}+\sqrt{243}$ par $\sqrt{2}$; donc pour avoir la racine de ce binome, il faut que je diviſe la racine $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{54}$ par la racine cubique de $\sqrt[3]{2}$, & cette racine cubique ſe tire en multipliant l'expoſant 2 de $\sqrt{2}$ par l'expoſant 3 de la racine cubique ; de même que pour élever la puiſſance ſeconde à ſon cube, il faut multiplier l'expoſant 2 par l'expoſant 3 du cube, ainſi que nous avons dit en parlant des expoſans des puiſſances ; ainſi la racine cubique de $\sqrt{2}$ eſt $\sqrt[6]{2}$; je diviſe donc la racine $\sqrt[3]{4}+\sqrt[6]{54}$ par $\sqrt[6]{2}$, & pour cela, je réduis auparavant $\sqrt[3]{4}$ à l'expoſant $\sqrt[6]{}$, ce qui me donne $\sqrt[6]{16}$, lequel diviſé par $\sqrt[6]{2}$, laiſſe $\sqrt[6]{8}$; & diviſant de même $\sqrt[6]{54}$ par $\sqrt[6]{2}$, le quotient eſt $\sqrt[6]{27}$, ainſi la racine cubique du binome propoſé eſt $\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{27}$, qui eſt la même choſe que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; car ſi j'é-

leve $\sqrt{2}$ à la ſixiéme puiſſance, j'aurai 8, dont la racine ſixiéme ſera $\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$; & de même, ſi j'éleve $\sqrt{3}$ à la ſixiéme puiſſance, j'aurai 27, dont la racine ſixiéme ſera $\sqrt[6]{27}=\sqrt{3}$, puiſque $\sqrt{3}$ eſt la ſixiéme racine de ſa ſixiéme puiſſance, de même que $\sqrt{2}$ eſt la ſixiéme racine de ſa ſixiéme puiſſance.

Et pour voir ſi c'eſt en effet la véritable racine du binome propoſé, je fais le cube de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, & réduiſant le terme $2\sqrt{12}$ à ſon expoſant $4\sqrt{3}$, & le terme $2\sqrt{18}$ à ſon expoſant $6\sqrt{2}$; & ajoutant enſuite $5\sqrt{2}$ avec $6\sqrt{2}$, j'ai $11\sqrt{2}$, de même qu'ajoutant $4\sqrt{3}$ avec $5\sqrt{3}$, j'ai $9\sqrt{3}$; & faiſant paſſer la grandeur 9 qui eſt hors du ſigne $\sqrt{3}$, ſous ce ſigne, je trouve en effet $11\sqrt{2}+\sqrt{243}$ qui eſt le binome propoſé.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline 2+\sqrt{6} \\ +\sqrt{6}+3 \\ \hline 5+2\sqrt{6} \text{ quarré} \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline 5\sqrt{2}+2\sqrt{12} \\ +5\sqrt{3}+2\sqrt{18} \\ \hline \end{array}$$

cube $11\sqrt{2}+9\sqrt{3}=11\sqrt{2}+\sqrt{243}$

Tout ceci eſt fort ingénieux, & s'il n'eſt pas bien utile pour l'uſage, les Commençans y trouveront du moins de quoi ſe fortifier dans le calcul, & ſe former en même-tems à la préciſion d'eſprit ſi néceſſaire dans cette Science, & ſi avantageuſe dans toutes les affaires de la vie.

Quand la différence des quarrés n'eſt pas une puiſſance parfaite, on ne peut réſoudre les binomes comme nous venons de faire, que lorſqu'ils ſont des puiſſances dont l'expoſant eſt en nombre impair, c'eſt-à-dire, lorſqu'ils ſont des puiſſances troiſiéme, cinquiéme, ſeptiéme, &c. & pour en faire mieux concevoir la raiſon, examinons un peu mieux le principe ſur lequel nous nous ſommes fondés pour la réſolution du binome précédent.

Ce principe eſt, que lorſqu'on a deux quarrés dont on connoît la différence, on peut toujours faire que cette différence devienne une puiſſance parfaite telle que l'on voudra; ſuppoſons les quarrés 4 & 9 dont la différence 5 n'eſt pas une puiſſance parfaite, ſi je veux qu'elle devienne une puiſſance ſeconde, c'eſt-à-dire un quarré, je dis: Puiſque le quarré 9 contient la différence 5, ſa racine

cine 3 contient par conſéquent la racine de 5 ou $\sqrt{5}$; ainſi ſi je multiplie les racines 2 & 3 des deux quarrés par $\sqrt{5}$, j'aurai $2\sqrt{5}$ & $3\sqrt{5}$, & cette ſeconde contiendra le quarré de $\sqrt{5}$, lequel quarré eſt 5 ; & faiſant enſuite les quarrés de $2\sqrt{5}$ & de $3\sqrt{5}$, le ſecond quarré contiendra la quatriéme puiſſance de $\sqrt{5}$ qui eſt 25, nombre quarré ; de ſorte que ces deux quarrés ſeront l'un 20 & l'autre 45, dont la différence 25 eſt un quarré.

$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$
20	45
	20
	25 différence

Et ſi je veux que la différence 5 des quarrés 4 & 9 devienne un cube, je dis: Puiſque la racine 3 du quarré 9 contient $\sqrt{5}$, ſi je multiplie les deux racines 2 & 3 par 5, qui eſt le quarré de $\sqrt{5}$, j'aurai 10 & 15, & cette derniere-ci contiendra le cube de $\sqrt{5}$; deſorte que venant à faire les quarrés 100 & 225 de 10 & 15, ce dernier 225 contiendra la ſixiéme puiſſance de $\sqrt{5}$ qui eſt 125 nombre cubique, & qui eſt la différence des quarrés 100 & 225.

10	15
10	15
100	75
	15
	225
	100
	125 différence

Et par la même raiſon, ſi je veux que la différence 5 des quarrés 4 & 9 devienne une quatriéme puiſſance, je multiplierai les deux racines 2 & 3 par la troiſiéme puiſſance de $\sqrt{5}$, qui eſt $5\sqrt{5}$, & la racine 3 ainſi multipliée contiendra la quatriéme puiſſance de $\sqrt{5}$; deſorte que venant à multiplier ces deux racines, je trouverai 500 & 1115, dont la différence eſt 615, laquelle eſt la huitiéme puiſſance de $\sqrt{5}$, ou la quatriéme puiſſance de 5.

$10\sqrt{5}$	$15\sqrt{5}$
$10\sqrt{5}$	$15\sqrt{5}$
500	225
	5
	1125 quarré
	500
	615 différence

Et ainſi des autres à l'infini, où l'on voit que pour les puiſſances paires deuxiéme, quatriéme, ſixiéme, &c. le multiplicateur des racines 2 & 3 eſt $\sqrt{5}$, $5\sqrt{5}$, $25\sqrt{5}$, $125\sqrt{5}$, &c. qui tous ont le ſigne radical ; & que pour les puiſſances impaires troiſiéme, cinquiéme,

ſeptiéme, &c. le multiplicateur eſt 5, 25, 125, &c. qui ſont tous ſans ſignes radicaux.

Or comme pour réſoudre les binomes par cette ſeconde régle, il faut néceſſairement que le premier terme n'ait point de ſigne radical; il s'enſuit que ſi la différence des quarrés de ſes deux termes n'eſt point une puiſſance parfaite telle qu'on le ſouhaite, on ne peut la rendre parfaite que quand la puiſſance de ces binomes eſt d'un degré impair, attendu que dans les pairs il faudroit multiplier les deux termes du binome propoſé par une puiſſance de la différence affectée d'un ſigne radical; ainſi voilà encore des cas où la régle ne peut s'appliquer.

Au reſte, cette régle a l'avantage ſur la premiere, en ce qu'elle s'étend ſur les binomes de tous les degrés, à l'exception des cas particuliers que nous avons fait obſerver; & d'un autre côté, elle a quelque choſe d'ébloüiſſant & qui paroît fort ſingulier, en ce qu'elle fait trouver la juſte valeur de la racine, quoiqu'on ne ſe ſerve que d'une racine approchée, & qu'on néglige même les fractions; cependant comme elle exige qu'on tire la racine approchée du binome, autant vaudroit-il s'en tenir là, puiſqu'après tout on ne peut évaluer la racine qu'on trouve que par une autre approximation, attendu que cette racine a toujours un terme incommenſurable.

TROISIE'ME REGLE.

XIX. Cette troiſiéme régle ne concerne que les racines quarrées des multinomes, quelque nombre de termes qu'ils aïent, & ſon artifice conſiſte à ſe faire des formules de quarrés des différens multinomes, pour en conſidérer la formation & en tirer des lumieres pour l'extraction de leurs racines.

Conſidérons donc que le quarré d'un binome $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ dont un terme eſt commenſurable & l'autre eſt incommenſurable, eſt encore un binome $\overline{a+b}+2\sqrt{ab}$.

Que le quarré d'un trinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ eſt un quadrinome $\overline{a+b+c}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$.

Que le quarré d'un quadrinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ eſt un ſeptinome $\overline{a+b+c+d}+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}$.

Que le quarré d'un quadrinome $a+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$ n'eſt qu'un quadrinome $\overline{aa+bc+bd+cd}+2a\sqrt{bc}+2d\sqrt{bc}+2a\sqrt{bd}+2c\sqrt{bd}+2a\sqrt{cd}+2b\sqrt{cd}$.

Que celui d'un quadrinome $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ est encore un quadrinome $ab+gg+b+c+2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{bc}+2b\sqrt{a}+2c\sqrt{a}+4\sqrt{abc}$.

Que celui d'un quadrinome $a+\sqrt{bc}-\sqrt{ab}+\sqrt{ac}$ est un trinome $aa+bc+ab+ac-2a\sqrt{ab}+2c\sqrt{ab}+2a\sqrt{ac}-2b\sqrt{ac}$.

Que celui d'un quadrinome $-a+\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est encore un trinome $aa+ab+a+b-2a\sqrt{ab}+2b\sqrt{ab}-2a\sqrt{a}+2b\sqrt{a}$, & ainsi des autres qu'on pourroit faire selon les besoins.

Or tous ces quarrés, comparés à leurs racines, ont une propriété générale, qui est que leur partie commensurable contient les quarrés des parties de la racine; & quant à leurs parties incommensurables, dans les uns ces parties contiennent les produits de ces quarrés de deux en deux; & dans les autres, elles contiennent des multiplications successives de ces quarrés, ce que nous observerons mieux dans les exemples suivans.

PREMIER EXEMPLE.

Soit le binome $35+2\sqrt{216}$: je prens pour modéle le binome $a+b+2\sqrt{ab}$, dont la racine est $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, & je considére que la partie commensurable $a+b$ contient la somme des quarrés a, b, des termes $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ de la racine, & que la partie incommensurable contient sous le signe le produit de ces deux quarrés, & devant le signe le nombre 2 que je néglige; je dis donc, dans le binome proposé: La grandeur 216 qui est sous le signe est un produit de deux quarrés, dont 35 est la somme; ainsi je cherche parmi les diviseurs de 216 tous ceux qui en se multipliant produisent 216; & parmi ceux-ci, je prendrai ceux dont la somme est 35. Pour trouver ces produits, je divise 216 par 2, & le quotient est 103; mais 2 & 103 ne font pas 35; je divise donc par 4, & le quotient est 54, & ces deux nombres joints ensemble font plus de 35; je divise donc par 8, & le quotient est 27, & comme 27 & 8 font 35, qui est le premier terme, je connois que 8 & 27 sont les quarrés des deux termes de la racine que je cherche; ainsi cette racine est $\sqrt{8}+\sqrt{27}$, ou, en réduisant chaque terme à son exposant, $2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$; & en effet, multipliant cette racine par elle-même, on a $35+12\sqrt{6}$; & comme 12 qui est devant le signe $\sqrt{}$ est un produit de 2 par 6, si je fais passer 6 sous le signe afin qu'il ne reste que 2 devant le signe, ainsi que dans le modéle, j'aurai $35+$

$2\sqrt{216}$; car pour faire paſſer 6 ſous le ſigne, il faut prendre ſon quarré 36 & le multiplier par 6 qui eſt ſous le ſigne, ce qui fera 216.

De même, pour trouver la racine du binome $44+2\sqrt{384}$, je ſais que 384 eſt un produit de deux nombres, dont le premier terme 44 eſt la ſomme; je prens les diviſeurs de 384, en commençant par 2, qui donne au quotient 192; puis par 4, qui donne 96; puis par 8, qui donne 48; puis par 16, qui donne 24; puis par 32, qui donne 12; & comme 32 & 12 font 44, je connois que 32 & 12 ſont les quarrés des deux termes de la racine; ainſi cette racine eſt $\sqrt{32}+\sqrt{12}$, ou en réduiſant chaque terme à ſon expoſant $4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; & en effet, faiſant le quarré de cette racine, on trouve $44+16\sqrt{6}$; & parce que 16 eſt le produit de 8 par 2, ſi on fait paſſer 8 ſous le ſigne, on aura $44+2\sqrt{384}$ qui eſt le binome propoſé.

Si le ſecond terme du binome avoit le ſigne —, le ſecond terme de la racine devroit auſſi avoir le ſigne moins, ce qu'il faut obſerver dans toutes les extractions des racines, de quelque multinome que ce ſoit.

SECOND EXEMPLE.

Soit le multinome à ſept termes $14+2\sqrt{6}+2\sqrt{12}-2\sqrt{15}+2\sqrt{8}-2\sqrt{10}-2\sqrt{20}$ dont on demande la racine quarrée, je prens dans les formules ci-deſſus le ſeptinome $a+b+c+d+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{ad}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd}$ dont la racine eſt le quadrinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{b}+\sqrt{d}$; & comparant ce ſeptinome à ſa racine, je trouve que ſon premier terme contient les quarrés des termes de ſa racine, & que les autres contiennent, ſous les ſignes radicaux, les produits de ces quarrés de deux en deux, c'eſt-à-dire, l'un le produit *ab*, l'autre le produit *ac*, l'autre le produit *ad*, &c. c'eſt pourquoi je dis, dans le ſecond terme du multinome propoſé : La grandeur 6 qui eſt ſous le ſigne, eſt un produit de 2 par 3; dans le troiſiéme, la grandeur 12 eſt un produit de 2 par 6; dans le quatriéme, la grandeur 15 eſt un produit de 3 par 5; dans le cinquiéme, la grandeur 8 eſt un produit de 2 par 4; dans le ſixiéme, la grandeur 10 eſt un produit de 2 par 5; & dans le ſeptiéme, la grandeur 20 eſt un produit de 4 par 5, ou de 2 par 10; mais comme ce dernier ne ſauroit me ſervir pour la ré-

2×3
2×6
3×5
2×4
2×5
4×5

ſolution, je prens celui de 4 par 5; cela fait, parmi ces producteurs, j'en prens quatre, dont la ſomme faſſe 14, qui eſt la valeur du premier terme, & ces quatre ſont 2, 3, 4, 5; par conſéquent la racine cherchée ſeroit $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}$ ſi le ſeptinome avoit le ſigne + à tous ſes termes; mais comme il s'en trouve qui ont le ſigne —, j'examine lequel des quatre termes 2, 3, 4, 5 diviſe les termes du ſeptinome qui ont le ſigne moins; & trouvant que c'eſt 5, je mets le ſigne moins au terme de la racine qui eſt $\sqrt{5}$, & cette racine eſt $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{5}$; & en effet, faiſant le quarré de cette racine, & réduiſant tous les termes incommenſurables à n'avoir que la grandeur 2 devant le ſigne, on trouve que ce quarré eſt $14+2\sqrt{6}+2\sqrt{12}+2\sqrt{15}+2\sqrt{8}+2\sqrt{10}-12\sqrt{20}$ qui eſt le ſeptinome propoſé.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Soit le trinome $35+2\sqrt{54}-5\sqrt{10}$ dont on demande la racine quarrée; je prens dans les formules précédentes le trinome $\overline{aa+ab+ac+bc}-2a\sqrt{ab}+2c\sqrt{ab}+2a\sqrt{ac}-2b\sqrt{ac}$ dont la racine eſt le quadrinome $a-\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$, & je vois que le terme commenſurable de ce quarré trinome contient les quarrés des quatre termes de ſa racine; quant aux deux autres termes, je néglige le chiffre 2 qui eſt devant le ſigne, & je fais paſſer ſous le ſigne les grandeurs littérales qui la précédent; ainſi comme dans le ſecond terme ces grandeurs littérales ſont $-a+c$, j'en fais le quarré $aa-2ac+cc$, & le multipliant par ab qui eſt ſous le ſigne, j'ai $a^2b-2aabc+abcc$ que j'écris ſous le ſigne, ce qui me donne le ſecond terme $\sqrt{a^2b-2aabc+abcc}$; de même comme les grandeurs qui ſont avant le ſigne du troiſiéme terme ſont $a-b$, j'en fais le quarré $aa-2ab+bb$, & après l'avoir multiplié par la grandeur ac qui eſt ſous le ſigne, j'écris $\sqrt{a^2c-2aabc+abbc}$, ce qui me donne le troiſiéme terme; ainſi l'expreſſion du trinome eſt $\overline{aa+ab+ac+bc}+\sqrt{a^2b-2aabc+abcc}+\sqrt{a^2c-2aabc+abbc}$. Or j'obſerve que le ſecond terme $\sqrt{a^2b-2aabc+abcc}$, eſt un produit des quatre grandeurs $a, b, c-a, c-a$; car la grandeur ab qui étoit ſous le ſigne, eſt un produit de a par b, & ce produit a été multiplié par le quarré $aa-2ac+cc$ qui eſt lui-même un produit de $c-a$ par $c-a$, ou, ce qui revient au même, de $a-c$ par $a-c$.

J'obſerve encore que le troiſiéme terme $\sqrt{a^2c-2aabc+abbc}$ eſt

un produit des quatre grandeurs a, c, $b-a$, $b-a$, ou au lieu des deux $b-a$, $b-a$, on peut mettre $a-b$, $a-b$; car les unes & les autres produiſent le même quarré, & l'on pourra prendre celles que l'on voudra, ſelon qu'on trouvera que a eſt plus grand que b, ou b plus grand que a; ce que l'on obſervera auſſi à l'égard des quatre multiplicateurs précédens a, b, $c-a$, $c-a$.

Or comme la grandeur $\sqrt{54}$ du trinome propoſé eſt repréſentée par le ſecond terme $\sqrt{a^3-2aabc+abcc}$, je cherche parmi ſes diviſeurs 4 d'entr'eux, qui en ſe multipliant produiſent 54; & parce qu'il faut qu'il y en ait au moins deux égaux repréſentés par $c-a$, $c-a$, je prens 2, 3, 3, 3, qui en ſe multipliant font 54.

De même, comme la grandeur $\sqrt{10}$ du trinome eſt repréſentée par la troiſiéme $\sqrt{a^3c-2aabc+abbc}$, je cherche quatre d'entre ces diviſeurs de 10, qui en ſe multipliant produiſent 10, & parce qu'il faut qu'il y en ait tout au moins deux égaux, à cauſe de $a-b$, $a-b$ qui les repréſentent, je prens 2, 5, 1, 1, ainſi $2=a$, $3=b$, $5=c$ & $c-a=3$, $b-a=1$; or le premier terme du binome contient les quatre termes $aa+ab+ac+bc$; prenant donc les valeurs de ces quatre termes, j'ai $4+6+10+15$, & faiſant leur ſomme 35, je trouve qu'elle eſt effectivement égale au premier terme du binome propoſé; ainſi la racine de ce binome ſeroit $2+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$ ſi tous les termes avoient le ſigne plus; mais comme le terme $-2\sqrt{10}$ a le ſigne moins, je vois qu'il faut que ce ſoit le terme $\sqrt{6}$ qui ait le ſigne moins, à cauſe que le terme $\sqrt{54}$ du trinome ſe trouve diviſible par 6, & qu'il ne peut être devenu $\sqrt{54}$ que par quelque compenſation de plus & de moins, ce qu'il eſt facile de prouver en faiſant la multiplication de la racine trouvée $2-\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{5}$ par elle-même. *Voïez à la page ſuivante.*

On ſera d'abord étonné de voir que ce quarré ſoit ſi différent du trinome propoſé, cependant c'eſt le même; car 1°. ajoutant enſemble les quatre termes commenſurables 4, 6, 10 & 15, on a 35 qui eſt le premier terme du trinome; 2°. la grandeur 60 qui eſt ſous le ſigne dans le terme $-2\sqrt{60}$, étant un produit de 4 par 15, ſi l'on tire 4 hors du ſigne, ce terme ſera $-4\sqrt{15}$, lequel ſera détruit par le terme précédent $+4\sqrt{15}$; 3°. la grandeur 90 qui eſt ſous le ſigne dans le terme $-2\sqrt{90}$ étant un produit de 9 par 10, ſi on fait paſſer 9 hors du ſigne, on aura $-6\sqrt{10}$; & ce terme avec le ſecond $+4\sqrt{10}$ ne ſera plus que $-2\sqrt{10}$; 4°. la grandeur 150

qui eſt ſous le ſigne dans le terme $+2\sqrt{150}$, étant un produit de 25 par 6, ſi on tire 25 hors du ſigne, on aura $+10\sqrt{6}$; & ce terme, avec le ſecond $-4\sqrt{6}$, ne fera que $+6\sqrt{6}$, ainſi l'on aura $35+6\sqrt{6}-2\sqrt{10}$ qui n'eſt pas encore le trinome; c'eſt pourquoi comme la grandeur 6 qui eſt hors du ſigne dans le ſecond terme, eſt un produit de 2 par 3; ſi on fait paſſer 3 ſous le ſigne, on aura $2\sqrt{54}$, & par conſéquent ce quarré ſe réduit à $35+2\sqrt{54}-2\sqrt{10}$, qui eſt le même que le binome propoſé.

$2-\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$
$2-\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$4-2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$
$-2\sqrt{6}\qquad +6-\sqrt{60}-\sqrt{90}$
$+2\sqrt{10}\qquad -\sqrt{60}\qquad +10+\sqrt{150}$
$+2\sqrt{15}\qquad -\sqrt{90}\qquad +\sqrt{150}+15$

$4-4\sqrt{6}+4\sqrt{10}+4\sqrt{15}+6-2\sqrt{60}-2\sqrt{90}+10+2\sqrt{150}+15$

$35-4\sqrt{6}+4\sqrt{10}+4\sqrt{15}-2\sqrt{60}-2\sqrt{90}+2\sqrt{150}$

$35-4\sqrt{6}+4\sqrt{10}+4\sqrt{15}-4\sqrt{15}-6\sqrt{10}+10\sqrt{6}$

$35+6\sqrt{6}-2\sqrt{10}$

$35+2\sqrt{54}-2\sqrt{10}$ binome propoſé.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Soit le quadrinome $27+2\sqrt{150}+2\sqrt{128}+2\sqrt{108}$ dont on propoſe de tirer la racine; je prens dans les formules précédentes le quadrinome $\sqrt{aa+bc+bd+cd}+2\sqrt{a}\sqrt{bc}+2\sqrt{d}\sqrt{bc}+2\sqrt{a}\sqrt{bd}+2\sqrt{c}\sqrt{bd}+2\sqrt{a}\sqrt{cd}+2\sqrt{b}\sqrt{cd}$, dont la racine eſt le quadrinome $a+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$; & comparant le quarré avec la racine, je vois que le premier terme du quarré contient les quarrés des quatre termes de la racine; & quant aux autres termes, je néglige le nombre 2 qui eſt hors du ſigne, & je fais paſſer les autres grandeurs ſous le ſigne; ainſi comme le ſecond terme eſt multiplié par $a+d$, je fais le quarré $aa+2ad+dd$; & le multipliant par bc, j'écris: $\sqrt{aabc+2abdc+ddbc}$..

Et agiſſant de la même maniere pour les deux autres termes, la formule ſe réduit à celle-ci: $\sqrt{aa+bc+bd+cd}+\sqrt{aabc+2abdc}$

$+ddbc + \sqrt{aabd + 2acbd + ccbd} + \sqrt{aacd + 2abcd + bbcd}$.

Or je vois que le ſecond terme $\sqrt{aabc + 2abdc + ddbc}$ eſt un produit des quatre grandeurs $b, c, a+d, a+d$.

De même le troiſiéme terme $\sqrt{aabd + 2abdc + ccbd}$ eſt un produit des quatre grandeurs $b, d, a+c, a+c$.

Et le quatriéme terme $\sqrt{aacd + 2abcd + bbcd}$ eſt un produit des quatre $c, d, a+b, a+b$.

Ainſi je prens la grandeur $\sqrt{150}$ du quadrinome propoſé, & comme elle eſt repréſentée par le ſecond terme de la formule, je cherche 4 de ſes diviſeurs qui faſſent 150, enſorte cependant qu'il y en ait au moins deux d'égaux, à cauſe des grandeurs $a+d, a+d$ qui les repréſentent; & je trouve 2, 3, 5, 5, leſquels multipliés les uns par les autres font 150.

Je prens de même le troiſiéme terme $\sqrt{128}$, & je cherche 4 de ſes diviſeurs, dont deux au moins ſoient égaux, à cauſe de $a+c$, $a+c$ qui les repréſentent, & je trouve 2, 4, 4, 4, leſquels multipliés les uns par les autres font 128.

Je prens auſſi le troiſiéme terme $\sqrt{108}$, & je cherche 4 de ſes diviſeurs, dont deux au moins ſoient égaux, à cauſe de $a+b$, $a+b$ qui les repréſentent, & je trouve 4, 3, 3, 3, qui multipliés les uns par les autres font 108.

Ainſi $b=2$, $c=3=d=4$ $a+d=5$, & par conſéquent $a=1$: or le premier terme de la formule contient $aa+bc+bd+cd$; faiſant donc les valeurs de ces termes, j'ai $1+6+8+12$, dont la ſomme 27 eſt effectivement égale au premier terme du quadrinome propoſé; ainſi ſa racine eſt $1+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{12}$.

Et pour le prouver, je fais le quarré de cette racine, & réduiſant les termes comme on voit ici, je trouve que ce quarré eſt $27 + 2\sqrt{150} + 2\sqrt{128} + 2\sqrt{108}$, qui eſt le quadrinome propoſé.

On réſoudroit de la même façon tout autre multinome, en ſe faiſant des formules ſelon les cas; & obſervant toujours de réduire les termes du multinome dont on voudroit extraire la racine, deſorte qu'ils n'euſſent jamais que le nombre 2 hors du ſigne radical.

$1+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{12}$
$1+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{12}$

$1+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{12}$
$+\sqrt{6} \quad +6+\sqrt{48}+\sqrt{72}$
$+\sqrt{8} \quad +\sqrt{48} \quad +8+\sqrt{96}$
$+\sqrt{12} \quad +\sqrt{72} \quad +\sqrt{96}+12$

$27+2\sqrt{6}+2\sqrt{8}+2\sqrt{12}+2\sqrt{48}+2\sqrt{72}+2\sqrt{96}$

$27+2\sqrt{6}+2\sqrt{8}+2\sqrt{12}+4\sqrt{12}+6\sqrt{8}+8\sqrt{6}$

$27+10\sqrt{6}+8\sqrt{8}+6\sqrt{12}$

$27+2\sqrt{150}+2\sqrt{128}+2\sqrt{108}$ quadrinome proposé.

QUATRIE'ME REGLE.

XX. Cette quatriéme régle concerne l'extraction des racines cubiques des multinomes dont les termes ſont tous incommenſurables entr'eux, & n'ont d'autre ſigne que $\sqrt{}$. Si l'on prend les nombres qu'on appelle du quatriéme ordre, c'eſt-à-dire, ceux qui ſont les coefficiens du quatriéme rang perpendiculaire de la Table des puiſſances, & qu'on écrive ſous eux les nombres naturels dans l'ordre que l'on voit ici, & qu'on écrive encore par-deſſous les ſommes de ceux du quatriéme ordre & des naturels qui leur correſpondent, ces ſommes marqueront le nombre des termes des divers multinomes cubiques, & les nombres naturels qui ſeront au-deſſus de ces ſommes, marqueront le nombre des termes de leurs racines; ainſi ſi l'on veut ſavoir combien de termes aura à ſa racine un multinome cubique qui en a 8, on prendra la ſomme 8, & le nombre naturel 4 qui eſt écrit par-deſſus, marquera que ſa racine a 4 membres, & ainſi des autres.

Nombre du quatriéme ordre	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	&c.
Nombre des termes des racines	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9. &c.
Nombre des termes des cubes	2.	4.	8.	15.	26.	42.	64.	93. &c.

On ſe convaincra de ceci en faiſant les cubes de différens multinomes, qui n'aïent que le ſigne $\sqrt{}$, à leurs termes incommenſurables; quant aux nombres des différens ordres, nous en parlerons dans la ſuite plus amplement: or ce que nous venons de dire

va nous ſervir dans les exemples ſuivans pour l'extraction des racines de ces ſortes de multinomes.

PREMIER EXEMPLE.

Pour tirer la racine cubique du binome $26+15\sqrt{3}$, je vois dans la Table précédente que ce binome aïant deux termes, ſa racine en aura auſſi deux; c'eſt pourquoi je me fais un modéle en prenant $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, dont je fais le cube $\overline{a\sqrt{a}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3a\sqrt{b}}$ qui a auſſi deux termes; je fais paſſer ſous le ſigne, dans l'un & dans l'autre les grandeurs qui ſont hors le ſigne, en faiſant pour le premier le quarré de $a+3b$ qui eſt $aa+6ab+9bb$, lequel multiplié par a, qui eſt ſous le ſigne, fait $a^3+6aab+9abb$, & j'écris $\sqrt{a^3+6aab+9abb}$; & pour le ſecond, je fais le quarré de $b+3a$, qui eſt $bb+6ab+9aa$, lequel multiplié par b qui eſt ſous le ſigne, fait $b^3+6abb+9aab$, & j'écris $\sqrt{b^3+6abb+9aab}$; ainſi mon modéle eſt $\sqrt{a^3+6aab+9abb}+\sqrt{b^3+6abb+9aab}$.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a+\sqrt{ab}$
$+\sqrt{ab}+b$

$a+2\sqrt{ab}+b$ quarré
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a\sqrt{a}+2a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$
$+a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}+b\sqrt{b}$

$\overline{a\sqrt{a}+3b\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3a\sqrt{b}}$

Or je conſidére d'abord que ſi je retranche le quarré du ſecond terme du quarré du premier, le reſte ſera $a^3-3aab+3bb-b^3$ qui eſt un cube parfait dont la racine eſt $a-b$; & de même ſi je retranche le quarré du premier terme du quarré du ſecond, le reſte ſera $b^3-3bba+3baa-a^3$ qui eſt encore un cube parfait, dont la racine eſt $b-a$; ainſi je connois que dans tout binome cubique de l'eſpéce dont nous parlons dans cette régle, la différence des quarrés des deux termes eſt toujours un cube.

Je conſidére enſuite que le premier terme $\sqrt{a^3+6aab+9abb}$ eſt un produit des trois grandeurs a, $a+3b$, $a+3b$.

Et de même, le ſecond $\sqrt{b^3+6abb+9aab}$ eſt un produit des trois grandeurs b, $b+3a$, $b+3a$.

Cela étant, je fais paſſer les grandeurs du binome propoſé ſous le ſigne, & j'ai $\sqrt{676}+\sqrt{675}$; & les quarrés de ces deux termes ſont 676 & 675, dont la différence 1 eſt un cube parfait. Je ſuis donc aſſuré que ce binome eſt un cube, ainſi je prens trois diviſeurs du premier terme $\sqrt{676}$, dont deux ſoient égaux à cauſe de $a+3b$, $a+3b$ qui les repréſentent, & je trouve 4, 13, 13, qui multipliés les uns par les autres ſont 676.

Je cherche auſſi trois diviſeurs du ſecond terme 675, dont deux ſoient égaux, à cauſe de $6+3a$, $b+3a$ qui les repréſentent, & je trouve 3, 15, 15, qui multipliés les uns par les autres ſont 675.

Ainſi $a=4$, & $b=3$, & comme la racine du modéle eſt $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, celle du binome propoſé eſt par conſéquent $\sqrt{4}+\sqrt{3}$ ou $2+\sqrt{3}$.

SECOND EXEMPLE.

Pour tirer la racine cubique du quadrinome $24\sqrt{3}+26\sqrt{2}+20\sqrt{5}+6\sqrt{30}$, je vois par la Table précédente que la racine de ce quadrinome aura trois termes; c'eſt pourquoi je me fais un modéle en faiſant le cube du trinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, & ce cube eſt le quadrinome $a\sqrt{a}+3b\sqrt{a}+3c\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3a\sqrt{b}+3c\sqrt{b}+c\sqrt{c}+3a\sqrt{c}+3b\sqrt{c}+6\sqrt{abc}$. Or comparant ces quatre termes, je trouve que le dernier eſt le moindre; ce qu'on verroit évidemment ſi l'on faiſoit paſſer ſous le ſigne les grandeurs qui ſont hors du ſigne dans chacun de ſes termes. Outre cela, je vois que ſi je réduiſois toutes les grandeurs ſous le ſigne, il faudroit dans le premier multiplier $a+3b+3c$ par lui-même, & enſuite ſon quarré par la grandeur radicale a: donc ce premier ſeroit un produit des trois grandeurs a, $a+3b+3c$, $a+3b+3c$.

Par la même raiſon, le ſecond terme ſeroit un produit des trois grandeurs b, $b+3a+3c$, $b+3a+3c$.

Le troiſiéme ſeroit un produit des trois c, $c+3a+3b$, & $c+3a+3b$; & dans le quatriéme, négligeant le chiffre, je trouve que la grandeur $\sqrt{abc}$ eſt un produit des trois a, b, c.

Revenant donc au quadrinome propoſé, je vois que le dernier terme $6\sqrt{30}$ eſt le moindre de tous, ce qui ſe découvre en faiſant paſſer toutes les grandeurs ſous le ſigne. Enſuite prenant le premier terme $24\sqrt{3}$, je trouve que ſi je voulois ranger 24 ſous le ſigne radical, il faudroit le multiplier par lui-même, & enſuite par 3 :

donc ce terme ſeroit un produit des trois grandeurs, 3, 24, 24.

Par la même raiſon le ſecond terme $26\sqrt{2}$ ſeroit un produit des trois 2, 26, 26.

Et le troiſiéme ſeroit un produit des trois 5, 20, 20.

Donc $a=3$, $b=$ [illegible], $c=5$; & en effet, multipliant ces trois grandeurs les unes par les autres, je trouve 30, qui eſt la même grandeur qui ſe trouve ſous le ſigne du quatriéme terme. Or la racine de mon modéle eſt $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, mettant donc les valeurs de ces lettres, je trouve que la racine du quadrinome propoſé eſt $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$, & pour le prouver faiſons le cube de cette racine.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5} \\
\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5} \\
\hline
3+\sqrt{6}+\sqrt{15} \\
\quad +\sqrt{6} \quad +2+\sqrt{10} \\
\quad\quad +\sqrt{15} \quad +\sqrt{10}+5 \\
\hline
3+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}+2+2\sqrt{10}+5 \text{ quarré} \\
\quad\quad \sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5} \\
\hline
3\sqrt{3}+2\sqrt{18}+2\sqrt{45}+\sqrt{12}+2\sqrt{30}+\sqrt{75} \\
\quad +\sqrt{18} \quad +2\sqrt{12}+2\sqrt{30} \quad +2\sqrt{2}+2\sqrt{20}+\sqrt{50} \\
\quad\quad +\sqrt{45} \quad +2\sqrt{30} \quad +2\sqrt{75} \quad +\sqrt{20}+2\sqrt{50}+5\sqrt{5} \\
\hline
3\sqrt{3}+3\sqrt{18}+3\sqrt{45}+3\sqrt{12}+6\sqrt{30}+3\sqrt{75}+2\sqrt{2}+3\sqrt{20}+3\sqrt{50}+5\sqrt{5} \text{ cube} \\
\hline
3\sqrt{3}+9\sqrt{2} \quad +9\sqrt{5} \quad +6\sqrt{3}+6\sqrt{30}+15\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6\sqrt{5} \quad 15\sqrt{2}+5\sqrt{5} \\
\hline
24\sqrt{3}+26\sqrt{2}+20\sqrt{5}+6\sqrt{30} \text{ quadrinome propoſé.}
\end{array}$$

Ce cube contient trois termes $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$ & $5\sqrt{5}$, qui ſont les cubes des trois termes de la racine; & quant aux autres, nous allons les réduire de façon que nous trouvions le quadrinome propoſé, 1°. Les deux termes $3\sqrt{12}$ & $3\sqrt{75}$ réduits à leurs expoſans, donnent $6\sqrt{3}$ & $15\sqrt{3}$; de même les deux termes $3\sqrt{18}$ & $3\sqrt{50}$ réduits à leurs expoſans, donnent $9\sqrt{2}$ & $15\sqrt{2}$, & les deux termes $3\sqrt{45}$ & $3\sqrt{20}$ réduits à leurs expoſans, donnent $9\sqrt{5}$ & $6\sqrt{5}$; ajoutant donc enſemble les termes qui ont la même grandeur ſous le ſigne, nous aurons préciſément la même expreſſion que celle du quadrinome propoſé.

Et ſi le quadrinome à réſoudre étoit $56+30\sqrt{3}+26\sqrt{5}+12\sqrt{1}$

$\sqrt{5}$, je réduirois le premier terme ſous le ſigne radical, ce qui donneroit $\sqrt{3136}$; & quant au dernier qui eſt le moindre, je le préparerois de façon, qu'il n'eût que 6 hors du ſigne, de même que dans la formule, ce qui eſt facile à faire; car 12 étant le produit de 6 par 2, je ferois paſſer 2 ſous le ſigne, & j'aurois $6\sqrt{60}$; cela fait, le quadrinome ſeroit $\sqrt{3136}+30\sqrt{3}+26\sqrt{5}+6\sqrt{60}$.

Ainſi ſuivant ma formule, je prendrois trois diviſeurs du premier terme $\sqrt{3136}$, enſorte qu'il y en eût deux égaux, & que le produit des trois fût égal à 3136, & je trouverois 4, 28, 28.

Pour le ſecond terme, je trouverois 3, 30, 30.

Et pour le troiſiéme, 5, 26, 26.

Ainſi $a=4$, $b=3$, & $c=5$, & le produit de ces trois nombres feroit effectivement 60, qui eſt la grandeur ſous le ſigne du quatriéme terme: donc la racine du quadrinome propoſé ſeroit $\sqrt{4}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, ou $2+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Pour tirer la racine cubique du multinome à huit termes $42\sqrt{3}+44\sqrt{2}+38\sqrt{5}+36\sqrt{6}+6\sqrt{30}+6\sqrt{36}+6\sqrt{90}+6\sqrt{60}$, je vois par la Table ci-deſſus que ſa racine aura quatre termes; c'eſt pourquoi je prens pour modéle le quadrinome $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, dont le cube eſt $a\sqrt{a}+3b\sqrt{a}+3c\sqrt{a}+3d\sqrt{a}+b\sqrt{b}+3a\sqrt{b}+3c\sqrt{b}+3d\sqrt{b}+c\sqrt{c}+3a\sqrt{c}+3b\sqrt{c}+3d\sqrt{c}+d\sqrt{d}+3a\sqrt{d}+3b\sqrt{d}+3c\sqrt{d}+6\sqrt{abc}+6\sqrt{abd}+6\sqrt{acd}+6\sqrt{bcd}$, où je vois que les quatre derniers termes qui ſont les moindres, ſont les différens produits des quarrés des termes de la racine, multipliés trois à trois; & quant aux autres, je vois dans le premier que ſi je voulois réduire tout ſous le ſigne, il faudroit faire le quarré de $a+3b+3c+3d$, & le multiplier par la grandeur a qui eſt ſous le ſigne: donc ce terme ſeroit un produit des trois grandeurs a, $a+3b+3c+3d$, $a+3b+3c+3d$.

Par la même raiſon, le ſecond terme ſeroit un produit des trois b, $b+3a+3c+3d$, $b+3a+3c+3d$.

De même le troiſiéme ſeroit un produit des trois c, $c+3a+3b+3d$, $c+3a+3b+3d$.

Et le quatriéme ſeroit un produit des trois d, $d+3a+3b+3c$, $d+3a+3b+3c$.

Venant donc au multinome propoſé, je vois que les quatre der-

niers termes $6\sqrt{30}$, $6\sqrt{36}$, $6\sqrt{90}$ & $6\sqrt{60}$ ſont les moindres ; je prens donc le premier $42\sqrt{3}$, & je vois que tout étant réduit ſous le ſigne, il ſeroit un produit des trois grandeurs 3, 42, 42.

De meme le ſecond ſeroit un produit des trois 2, 44, 44.

Le troiſiéme ſeroit un produit des trois 5, 38, 38.

Et le quatriéme ſeroit un produit des trois 6, 36, 36.

Donc $a=3$, $b=2$, $c=5$ & $d=6$, & comme le cinquiéme terme de mon modéle eſt $6\sqrt{abc}$ où la grandeur abc qui eſt ſous le ſigne eſt un produit des trois grandeurs a, b, c, je ſubſtituë la valeur de ces lettres, & je trouve $6\sqrt{30}$ qui eſt préciſément le cinquiéme terme du multinome propoſé.

De même, comme le ſixiéme terme du modéle eſt $6\sqrt{abd}$, ſubſtituant la valeur de ces lettres, je trouve $6\sqrt{36}$, qui eſt effectivement le ſixiéme terme du multinome.

Je ſubſtituë auſſi dans le ſeptiéme terme $6\sqrt{acd}$ du modéle la valeur des lettres, & je trouve $6\sqrt{90}$, qui eſt le ſeptiéme terme du multinome.

Enfin, ſubſtituant dans le huitiéme terme $6\sqrt{bcd}$ du modéle la valeur des lettres, je trouve $6\sqrt{60}$ qui eſt le huitiéme terme du multinome.

Or la racine cubique du modéle eſt $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$, dont ſubſtituant la valeur des lettres, je trouve $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ qui eſt la racine cubique du multinome propoſé.

Si le multinome n'avoit pas la même forme que le modéle, il faudroit faire enſorte qu'il l'eût, en mettant ſous le ſigne, ou en tirant hors du ſigne les grandeurs qui pourroient contribuer à cela ; ainſi, ſi au lieu de $6\sqrt{36}$ il y avoit eu 36, on verroit, en comparant le multinome avec le modéle, qu'il auroit manqué au multinome un des quatre derniers termes qui doivent avoir 6 devant le ſigne ; c'eſt pourquoi, comme 36 eſt un produit de 6 par 6, on auroit fait paſſer 6 ſous le ſigne, & au lieu de 36, on auroit écrit $6\sqrt{36}$.

De même, ſi au lieu du terme $36\sqrt{6}$ il y avoit eu $9\sqrt{96}$, on auroit vû, en comparant le multinome avec le modéle, que ce terme auroit dû être réduit, à cauſe que dans le modéle les quatre premiers termes n'ont qu'une ſimple lettre ſous le ſigne radical ; ainſi comme 96 eſt un produit du quarré 16 par 6, on auroit fait paſſer 16 hors du ſigne, & l'on auroit $36\sqrt{6}$.

On obſervera la même choſe à l'égard des autres multinomes, les réduiſant toujours à être ſemblables à leurs modéles, & prenant

garde aux termes qui ſont les moindres, ce que l'on découvre aiſément en faiſant paſſer les grandeurs ſous les ſignes; par exemple, pour juger lequel des deux termes $36\sqrt{6}$ & $6\sqrt{36}$ eſt le moindre, on fait paſſer tout ſous le ſigne, & l'on trouve $\sqrt{7776}$ & $\sqrt{1296}$; ce qui fait voir que $36\sqrt{6}$ eſt plus grand que $6\sqrt{36}$, & ainſi des autres.

CINQUIE'ME ET DERNIERE REGLE.

XXI. Cette derniere régle concerne l'extraction des racines cubiques des multinomes, dont tous les termes ſont incommenſurables entr'eux, & dont les ſignes ſont $\sqrt[3]{}$.

Si l'on prend les nombres du ſecond ordre, qui ſont ceux du troiſiéme rang perpendiculaire de la Table des puiſſances, & qu'on range ſous eux les nombres naturels comme on voit ici, & qu'on commence un troiſiéme rang par l'unité; les trois unités 1, 1, 1, feront 3 qu'on écrira ſous le nombre naturel 2. De même, les trois nombres 3, 2, 3, qui ſont les uns ſous les autres, ajoutez enſemble, feront 8, qu'il faut écrire ſous le nombre naturel 3. De même les trois 6, 3 & 8 qui ſe trouvent les uns ſous les autres, formeront 17, qu'il faut écrire ſous le nombre naturel 4; & continuant de la même façon, on formera le troiſiéme rang qui marque le nombre de termes que contiennent les différens multinomes cubes, & les nombres naturels marquent le nombre de termes que contiennent leurs racines. Ainſi pour ſavoir combien un multinome cube de 31 termes en contient à ſa racine, on cherchera dans le troiſiéme rang le nombre 31, & le nombre naturel 5 qui eſt écrit au-deſſus, marquera le nombre des termes que contient la racine de ce multinome.

Nombre du troiſiéme ordre	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	&c.
Nomb. des term. des racin.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	
Nomb. des term. des cubes	1,	3,	8,	17,	31,	51,	78,	113,	157,	&c.

Pour s'aſſurer de la vérité de ceci, on n'a qu'à faire les cubes d'un binome, d'un trinome, d'un quadrinome, &c. & l'on trouvera pour les cubes les nombres de termes marqués dans le troiſiéme rang. Cette connoiſſance va nous ſervir dans les exemples ſuivans pour l'extraction des racines.

PREMIER EXEMPLE.

Soit le trinome cubique $5+3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{18}$ dont on demande la racine, je vois par la Table précédente que la racine de ce cube aura deux termes, c'eſt pourquoi je me fais un modéle en prenant le binome $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ dont je fais le cube $\overline{a+b}+3\sqrt[3]{aab}+3\sqrt[3]{abb}$, qui eſt en effet un trinome : or comparant ce trinome avec ſa racine, je vois que le premier terme contient les cubes des deux termes de la racine ; que le ſecond contient ſous le ſigne un produit *aab* des trois grandeurs a, a, b ; & que le troiſiéme contient ſous le ſigne un produit *abb* des trois grandeurs a, b, b.

Je viens donc au binome propoſé, & prenant le ſecond terme $3\sqrt[3]{12}$, je cherche trois diviſeurs de 12, dont deux au moins ſoient égaux : ces diviſeurs ſont 2, 2, 3, dont le produit eſt 12 ; je prens de même le troiſiéme terme $3\sqrt[3]{18}$, & cherchant trois diviſeurs de 18, dont deux au moins ſoient égaux, je trouve 3, 3, 2, qui multipliés les uns par les autres font 18.

Ainſi $a=2$ & $b=3$, & comme la ſomme 5 de ces deux grandeurs eſt égale au premier terme 5 du trinome propoſé, j'écris pour la racine de ce trinome $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$; & pour en faire la preuve, je fais le cube de cette racine, & je trouve $5+3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{18}$, qui eſt le trinome propoſé.

$$\begin{array}{l}
\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \\
\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \\
\hline
\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6} \\
\quad +\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9} \\
\hline
\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9} \text{ quarré} \\
\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \\
\hline
2+2\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{18} \\
\quad +\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{18}+3 \\
\hline
5+3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{18}
\end{array}$$

SECOND EXEMPLE.

Pour tirer la racine cubique du multinome à huit termes $14+3\sqrt[3]{45}+3\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{75}+6\sqrt[3]{90}+3\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{150}+3\sqrt[3]{180}$, je vois par la Table précédente que ſa racine aura trois termes ; ainſi je prens pour

pour modéle le trinome $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$, qui élevé au cube donne $\overline{a+b+c}+3\sqrt[3]{aab}+3\sqrt[3]{aac}+3\sqrt[3]{abb}+6\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{acc}+3\sqrt[3]{bbc}+3\sqrt[3]{bcc}$ qui eſt en effet un multinome à huit termes.

Je compare ce multinome avec ſa racine, & je vois que ſon premier terme contient les quarrés des trois termes de la racine; que le ſecond contient ſous le ſigne un produit des trois grandeurs a, a, b; & que le troiſiéme contient ſous le ſigne un produit des trois a, a, c. Je ne vas pas plus loin, parce que ſi je trouve une fois les trois grandeurs a, b, c, la racine ſera découverte.

Je prens donc le ſecond terme $3\sqrt[3]{45}$ du multinome propoſé, & cherchant trois de ſes diviſeurs, dont deux au moins ſoient égaux, je trouve 3, 3, 5, qui ſe multipliant les uns par les autres font 45.

Je prens le troiſiéme terme $3\sqrt[3]{54}$, & cherchant trois de ſes diviſeurs, dont deux au moins ſoient égaux, je trouve 3, 3, 6, qui ſe multipliant les uns par les autres font 54. De plus, les deux premiers diviſeurs 3 & 3 de ce troiſiéme terme ſont les mêmes que les deux premiers diviſeurs 3 & 3 du ſecond terme, ce qui s'accorde avec les termes de la formule. Ainſi $a=3$, $b=5$ & $c=6$, & faiſant la ſomme de ces trois grandeurs 3, 5, & 6, je trouve 14 qui eſt préciſément le premier terme, ce qui convient encore avec ma formule.

Et pour m'aſſurer encore mieux que 3, 5 & 6 ſont les quarrés des trois termes de la racine, je prens le quatriéme terme $3\sqrt[3]{abb}$ de la formule; & mettant les valeurs des lettres, je trouve $3\sqrt[3]{75}$ qui eſt en effet le quatriéme terme du multinome propoſé. Je prens de même le cinquiéme terme $6\sqrt[3]{abc}$, & mettant la valeur des lettres, je trouve $3\sqrt[3]{90}$ qui eſt le cinquiéme terme du multinome; & faiſant la même choſe à l'égard des trois termes reſtans, je trouve que tout convient parfaitement; ainſi la racine du multinome eſt $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}$; & en effet, faiſant le cube de cette racine, on trouvera le multinome propoſé.

Autre maniere de tirer les racines cubiques des multinomes, compris ſous cette régle.

XXII. Prenons le trinome $5+3\sqrt[3]{12}+3\sqrt[3]{18}$ dont la formule, comme nous avons vû, eſt $a+b+3\sqrt[3]{aab}+3\sqrt[3]{abb}$, qui a pour racine $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

J'obſerve que le ſecond terme contient ſous le ſigne la grandeur *aab*, & le troiſiéme la grandeur *abb*; & que multipliant ces deux grandeurs l'une par l'autre, j'ai le cube a^3b^3, dont la racine cubique eſt *ab*: or ſi je diviſe la grandeur *aab* du ſecond terme par cette racine, le quotient eſt *a*, c'eſt-à-dire, le cube du premier terme $\sqrt[3]{a}$ de la racine du trinome; & ſi je diviſe la grandeur *abb* du troiſiéme terme par le même *ab*, le quotient eſt *b*, c'eſt-à-dire, le cube du ſecond terme de la racine.

Ainſi je prens 12 & 18 qui ſont ſous le ſigne dans le ſecond & troiſiéme terme du trinome propoſé, & multipliant l'un par l'autre, je trouve 216 dont la racine cubique eſt 6; je diviſe donc 12 par 6, & le quotient eſt 2 qui eſt le cube du premier terme de la racine; je diviſe de même 18 par 6, & le quotient eſt 3, qui eſt le cube du ſecond terme; & pour m'en mieux aſſurer, j'ajoute 2 à 3, & leur ſomme 5 eſt en effet égale au premier terme du trinome propoſé: donc la racine de ce trinome eſt $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$, ainſi que nous l'avons trouvé dans le premier exemple.

Prenons de même le multinome à huit termes $14+3\sqrt[3]{45}+3\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{75}+6\sqrt[3]{90}+3\sqrt[3]{108}+3\sqrt[3]{150}+3\sqrt[3]{180}$, dont le modéle eſt $\overline{a+b+c}+3\sqrt[3]{aab}+3\sqrt[3]{aac}+3\sqrt[3]{abb}+6\sqrt[3]{acb}+3\sqrt[3]{acc}+3\sqrt[3]{bbc}+3\sqrt[3]{bcc}$, qui a pour racine $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

J'obſerve que ſi je prens les grandeurs *aab*, *abb* qui ſont ſous le ſigne, dans le ſecond & quatriéme terme, & que je les multiplie l'une par l'autre, leur produit ſera un cube parfait a^3b^3, dont la racine cubique eſt *ab*; & que ſi je diviſe la grandeur *aab* par cette racine *ab*, le quotient ſera *a*, c'eſt-à-dire, le cube du premier terme $\sqrt[3]{a}$; de même qu'en diviſant la grandeur *abb* par le même *ab*, le quotient ſera *b*, c'eſt-à-dire, le cube du ſecond terme $\sqrt[3]{b}$.

J'obſerve auſſi qu'en prenant les grandeurs *aac* & *acc* qui ſont

sous le signe, dans le troisiéme & sixiéme terme, leur produit a^2c^2 sera un cube parfait, dont la racine sera ac; & que si je divise la grandeur aac par cette racine ac, le quotient sera a qui est encore le cube du premier terme $\sqrt[3]{a}$; de même que si je divise la grandeur acc par le même ac, le quotient sera c, qui est le cube du troisiéme terme $\sqrt[3]{c}$. Je ne vas pas plus loin, parce que si je trouve une fois les trois grandeurs a, b, c, je découvrirai la racine $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$.

Je prens donc le second terme $3\sqrt[3]{45}$ du multinome proposé, & le quatriéme $3\sqrt[3]{75}$, & multipliant les deux grandeurs 45 & 75 l'une par l'autre, leur produit est 3375, dont la racine cubique est 15; ainsi divisant 45 & 75 par 15, les quotiens sont 3 & 5; donc $a=3$, $b=5$.

Je prens de même le troisiéme terme $3\sqrt[3]{54}$ du multinome proposé, & le sixiéme $3\sqrt[3]{108}$, & multipliant 54 par 108, le produit est 5832, dont la racine cubique est 18; ainsi divisant 54 & 108 par 18, les quotiens sont 3 & 6: donc $a=3$, $c=6$.

Et pour m'en assurer mieux, je fais la somme 3, 5, 6 des trois grandeurs a, b, c, & cette somme est 14, qui est précisément le premier terme du multinome proposé; je vérifie aussi le cinquiéme, septiéme & huitiéme terme du multinome, ainsi que j'ai fait dans le second exemple; & trouvant que tout convient parfaitement, j'écris $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6}$ pour la racine cherchée.

Je me suis arrêté à l'explication de ces régles, afin que ceux qui voudront les lire dans l'Ouvrage du Pere Prestet, puissent comprendre plus aisément ce qu'il en dit; d'ailleurs il se trouve un ordre dans toutes ces formules qui est très-propre à accoutumer les Commençans aux combinaisons des grandeurs littérales, & à leur procurer l'esprit d'invention, par l'application que l'on en fait aux grandeurs numériques qu'elles représentent; mais pour cela il faut qu'ils lisent la plume à la main, & qu'ils se proposent eux-mêmes d'autres exemples à résoudre; car c'est-là l'unique moïen pour bien entendre les choses en fait d'Algebre.

DE L'ANALYSE.

XXIII. On entend ici par le mot d'*Analyſe*, la maniere de réſoudre les problêmes en emploïant le calcul & les ſignes Algébriques.

Si l'on y prend bien garde, tout problême ou toute queſtion à réſoudre eſt une équation qui contient ſous elle pluſieurs autres équations. Qu'on me diſe, par exemple, que le gain que trois perſonnes ont fait eſt 600 livres; que la part du ſecond doit être double de celle du premier; & que celle du troiſiéme doit être triple de celle du premier; je vois d'abord que ce problême eſt une équation, puiſque les trois parts enſemble ſont égales à 600 livres; enſuite les conditions du problême m'en font découvrir deux autres, à ſçavoir que la part du ſecond eſt égale à deux fois celle du premier, & que celle du troiſiéme eſt égale à trois fois celle du premier; & il en eſt de même de toute autre queſtion que l'on propoſe de maniere à pouvoir être réſoluë.

Or la méthode que l'Analyſe emploïe, conſiſte à réſoudre les problêmes par le moïen des équations qui ſe trouvent renfermées dans la façon dont ils ſont propoſés, ainſi que nous allons bientôt voir.

Les problêmes peuvent être ou déterminés ou indéterminés. Les problêmes déterminés ſont ceux qui ne ſont ſuſceptibles que d'une unique réſolution, & les indéterminés ſont ceux qui ſouffrent pluſieurs réſolutions différentes. Les uns & les autres peuvent être exprimés par des équations du premier degré, du ſecond, du troiſiéme, du quatriéme, &c. ce que nous expliquerons plus bas; & l'Analyſe, par la ſimplicité de ſes expreſſions, trouve le moïen de reconnoître bien-tôt ces qualités différentes, & d'emploïer enſuite les voïes les plus commodes pour parvenir à leur réſolution.

Des Problêmes déterminés.

XXIV. Les régles qu'on donne pour réſoudre les problêmes déterminés ſont; 1°. De marquer les grandeurs connuës par les premieres lettres de l'Alphabet a, b, c, &c. & les inconnuës par les dernieres x, y, z, &c. afin de les diſtinguer mieux les unes des autres. 2°. De faire les équations du problême, en emploïant les lettres qui marquent les grandeurs inconnuës, de même que ſi on

les connoiſſoit. 3°. En cas que le problême contienne pluſieurs inconnuës, de faire enſorte qu'il n'en reſte qu'une, ce qui peut toujours ſe faire quand le problême eſt déterminé, parce qu'alors le problême renferme autant d'équations qu'il y a de grandeurs inconnuës, & que par le moïen de ces équations comparées les unes aux autres, on peut prendre les valeurs des inconnuës, à la place des inconnuës même, ce qu'on verra mieux par les exemples ſuivans. 4°. Quand il ne reſte plus qu'une inconnuë, il faut faire enſorte que cette inconnuë reſte ſeule dans un membre de l'équation, & que l'autre membre ne contienne que des grandeurs connuës; ce qui peut ſe faire ou par addition, ou par ſouſtraction, ou par multiplication, ou par diviſion, ou enfin par extraction de quelque racine ſelon que le cas le demande; cela fait, le problême eſt réſolu; car la grandeur connuë ſe trouvant égale à des grandeurs connuës, devient par-là connuë elle-même.

PREMIER EXEMPLE.

La ſomme de deux grandeurs eſt 60 *livres, & leur différence eſt* 10: *on demande quelles ſont ces grandeurs?*

Ces deux grandeurs m'étant inconnuës, j'appelle la plus grande x & la moindre z; & comme leur ſomme & leur différence m'eſt connuë, j'appelle la ſomme a & la différence b; ainſi $a=60$ & $b=10$.

Puiſque les deux grandeurs ſont 60, j'ai donc une premiere équation $x+z=a$, & puiſque leur différence eſt $10=b$, ſi je retranche b de la plus grande x, le reſte ſera la plus petite; & ſi j'ajoute b à la petite z, la ſomme ſera la grande, ainſi j'ai deux autres équations $x-b=z$ & $z+b=x$. Je prens donc dans la premiere de ces deux équations la valeur de z qui eſt $x-b$; & mettant cette valeur dans l'équation $x+z=a$, cette équation ſe change en celle $x+x-b=a$, & corrigeant l'expreſſion, j'ai $2x-b=a$, où il ne reſte plus qu'une inconnuë.

Maintenant pour faire enſorte que la grandeur x reſte ſeule dans le premier membre, j'éxamine que puiſque $2x-b=a$, ſi j'ajoute b de part & d'autre, les ſommes ſeront encore égales, & j'aurai $2x-b+b=a+b$, & corrigeant l'expreſſion $2x=a+b$, car $-b+b$ n'eſt rien. Or $2x$ ſignifie x pris deux fois ou multiplié par 2, & puiſqu'il y a égalité de part & d'autre, ſi je diviſe de part & d'autre par 2, les quotiens ſeront encore égaux. Faiſant donc

la diviſion, j'ai $x = \frac{a+b}{2}$, & la grandeur x étant égale à la grandeur toute connuë $\frac{a+b}{2}$, devient connuë elle-même. Ainſi x, c'eſt-à-dire, la plus grande des deux inconnuës eſt égale à la ſomme a, plus la différence b, le tout diviſé par 2; ou, ce qui eſt la même choſe, x eſt égal à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence, c'eſt-à-dire à 35; & par conſéquent la petite z eſt égale à 25, car 35 & 25 font 60.

Que ſi j'avois voulu commencer par chercher la petite z, j'aurois pris dans la troiſiéme équation du problême la valeur de x, qui eſt $z+b$, & j'aurois ſubſtitué cette valeur de x dans la premiere équation $x+z=a$, ce qui m'auroit donné $z+b+z=a$, & corrigeant l'expreſſion j'aurois eu $2z+b=a$; & retranchant b de part & d'autre, j'aurois eu $2z+b-b=a-b$, & corrigeant l'expreſſion $2z=a-b$, car $+b-b$ dans le premier membre font zero. Enſuite j'aurois diviſé de part & d'autre par 2, & j'aurois eu $z=\frac{a-b}{2}$ ou $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, ce qui m'auroit fait connoître que la petite grandeur z eſt égale à la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence.

Mais ce n'eſt pas là tout, car x & z pouvant ſignifier quelques grandeurs que ce ſoit, & a leur ſomme, & b leur différence, je tire de ceci une régle générale qui eſt *que ſi l'on connoît la ſomme de deux grandeurs inégales, & leur différence, la grande eſt égale à la moitié de la ſomme, plus la moitié de la différence; & la petite eſt égale à la moitié de la ſomme, moins la moitié de la différence*; & cette régle peut ſervir à réſoudre beaucoup de queſtions, comme nous verrons plus bas.

Dans cette régle, nous avons fait enſorte que l'inconnuë ſoit reſtée ſeule, par l'addition & la diviſion, lorſque nous avons cherché la grandeur x, & par la ſouſtraction & la diviſion, lorſque nous avons cherché la grandeur z, & c'eſt ce qu'on appelle *dégager* l'inconnuë; ce qui roule, comme on voit, ſur cet unique principe, que *deux choſes égales reſtent toujours égales, ſi les grandeurs qu'on leur ajoute ou qu'on leur retranche ſont égales, ou ſi on les multiplie ou diviſe par des grandeurs égales, ou ſi on les éleve à des puiſſances égales, ou enfin ſi on extrait des racines égales.* Principe très-évident par lui-même, & dont la ſimplicité doit faire admirer davantage les découvertes de l'Analyſe.

SECOND EXEMPLE.

Trois Marchands ont mis en ſociété 211 *liv. le ſecond a mis le double du premier, plus* 15 *ſols; le troiſiéme a mis le quadruple du premier, plus* 5 *ſols: quelles ſont les miſes particulieres?*

J'appelle la miſe totale $211=a$, celle du premier x, celle du ſecond y, & celle du troiſiéme z; ainſi j'ai l'équation $x+y+z=a$.

Or par les conditions du problême, la miſe du ſecond vaut deux fois celle du premier, plus 15 ſols; & celle du troiſiéme vaut quatre fois celle du premier, plus 5 ſols; ainſi j'ai deux autres équations $y=2x+15$ & $z=4x+5$; ſubſtituant donc dans la premiere équation les valeurs de y & de z, c'eſt-à-dire, mettant à leur place $2x+15$, & $4x+5$, cette équation ſe trouve changée en celle-ci $x+2x+15+4x+5=a$, & corrigeant l'expreſſion j'ai $7x+20$ ſols $=a$, & retranchant de part & d'autre 20 ſols, j'ai $7x=a-20$ ſols; & diviſant de part & d'autre par 7, à cauſe que le membre $7x$ ſignifie x pris 7 fois ou multiplié par 7, les quotiens ſont $x=\frac{a-20\text{ ſols}}{7}$, & mettant à la place de a ſa valeur 211 livres, j'ai $x=\frac{211\text{ l.}-20\text{ ſ.}}{7}$, & corrigeant l'expreſſion j'ai $x=\frac{210}{7}=30$; ainſi la miſe du premier eſt 30 liv. & par conſéquent celle du ſecond eſt 60 liv. + 15 ſols, & celle du troiſiéme 120 liv. + 5 ſols.

Pour réſoudre cette queſtion par l'Arithmétique, il faudroit néceſſairement emploïer la régle de deux fauſſes poſitions, & je laiſſe à juger laquelle des deux réſolutions doit l'emporter, tant par la briéveté du calcul, que par la netteté des idées qu'elle fournit à l'eſprit.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Cinq Aſſociés doivent partager entr'eux 79 *liv. le ſecond ne doit prendre que le* $\frac{1}{3}$ *de ce que le premier prendra; le troiſiéme le* $\frac{1}{4}$; *le quatriéme le double, & le cinquiéme le triple: combien reviendra-t-il à chacun?*

J'appelle la part du premier x, celle du ſecond y, celle du troiſiéme z, celle du quatriéme t, celle du cinquiéme v, & la ſomme $79=a$; ainſi j'ai cette équation $x+y+z+t+v=a$.

Or par les conditions du problême, la ſeconde part n'eſt que le

$\frac{1}{3}$ de la premiere ; la troiſiéme en eſt le $\frac{1}{4}$; la quatriéme en eſt le double, & la cinquiéme en eſt le triple ; ainſi j'ai quatre autres équations $y = \frac{1}{3}x$, $z = \frac{1}{4}x$, $t = 2x$ & $v = 3x$; mettant donc ces valeurs de y, z, t, v dans la premiere équation, elle ſera changée en celle-ci : $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 2x + 3x = a$.

Pour corriger cette expreſſion, je réduis les deux fractions en même dénomination, ce qui me donne $\frac{4}{12}x$ & $\frac{3}{12}x$; & réduiſant les trois autres termes en fractions, c'eſt-à-dire, le premier qui eſt x ou $1x$ en $\frac{12}{12}x$, le ſecond qui eſt $2x$ en $\frac{24}{12}x$, & le troiſiéme qui eſt $3x$ en $\frac{36}{12}x$; j'ajoute toutes ces fractions enſemble, & la ſomme eſt $\frac{79}{12}x$, ainſi l'équation ſe réduit à $\frac{79}{12}x = a$.

Or $\frac{79}{12}x$ eſt la même choſe que $79x$ diviſé par 12 ; multipliant donc de part & d'autre par 12, j'ai $79x = 12a$; & comme $79x$ eſt la même choſe que x multiplié par 79, ſi je diviſe de part & d'autre par 79, j'aurai $x = \frac{12a}{79}$ qui réſout la queſtion ; car x étant égal à $\frac{12a}{79}$, qui contient des grandeurs connuës, devient par conſéquent connu ; mettant donc au lieu de a, ſa valeur 79, j'ai $x = \frac{12 \times 79}{79}$, c'eſt-à-dire $x = 12$; car 12 multiplié par 79, puis diviſé par 79, ne fait que 12. La part du premier eſt donc 12 ; celle du ſecond, qui eſt le $\frac{1}{3}$, eſt 4 ; celle du troiſiéme, qui eſt le $\frac{1}{4}$, eſt 3 ; celle du quatriéme, qui en eſt double, eſt 24, & celle du cinquiéme, qui en eſt triple, eſt 36 ; & ces cinq parts ajoutées enſemble, font en effet 79.

Dans cet exemple nous avons dégagé l'inconnuë, premierement, en réduiſant tout en fractions ; enſuite multipliant de part & d'autre par le dénominateur, puis diviſant par le numérateur.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Trois Voïageurs ont dépenſé une certaine ſomme d'argent ; le premier & le ſecond enſemble ont dépenſé 2 livres plus que le troiſiéme ; le premier & le troiſiéme en ont dépenſé 6 plus que le ſecond ; & le ſecond & le troiſiéme en ont dépenſé 10 plus que le premier : quelle eſt la dépenſe totale, & celle de chacun en particulier ?

J'appelle a la différence 2 des deux premiers d'avec le troiſiéme ; b la différence 6 du premier & du troiſiéme d'avec le ſecond, & c la différence 10 des deux derniers d'avec le premier.

J'appelle la dépenſe du premier x, celle du ſecond y, & celle du troiſiéme z ; puiſque la dépenſe du premier & celle du ſecond jointes

tes enſemble ſurpaſſent celle du troiſiéme de 2, j'ai donc une premiere équation $x+y=z+a$; de même la dépenſe du premier & du troiſiéme ſurpaſſant celle du ſecond de 6, j'ai une autre équation $x+z=y+b$; & comme la dépenſe des deux derniers ſurpaſſe celle du premier de 10, j'ai une troiſiéme équation $y+z=x+c$.

J'ajoute ces trois équations enſemble, & j'ai une quatriéme équation $2x+2y+2z=z+y+x+a+b+c$, & retranchant de part & d'autre $x+y+z$, le reſte eſt $x+y+z=a+b+c$, ce qui me fait connoître que les trois dépenſes x, y, z jointes enſemble ſont égales aux trois différences a, b, c jointes enſemble: donc la dépenſe totale eſt égale à la ſomme des trois différences; ainſi la premiere partie de la queſtion eſt réſoluë.

$$\begin{array}{l} x+y=z+a \\ x+z=y+b \\ y+z=x+c \\ \hline 2x+2y+2z=z+y+x+a+b+c \\ x+y+z=a+b+c \\ x+y+z=f \\ x=f-y-z \\ x=f-x-c \\ 2x=f-c \\ x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c \text{ dépenſe du premier} \end{array}$$

Pour réſoudre l'autre, c'eſt-à-dire, pour trouver la dépenſe particuliere de chaque perſonne, j'appelle f la ſomme $a+b+c$ qui eſt la dépenſe totale, ce que je fais pour abréger; ainſi l'équation $x+y+z=a+b+c$ ſe réduit à celle-ci $x+y+z=f$; je retranche de part & d'autre $y+z$, & j'ai $x=f-y-z$: or par la troiſiéme équation j'ai $y+z=x+c$, mettant donc la valeur $x+c$ de $y+z$ dans l'équation $x=f-y-z$, j'ai $x=f-x-c$; & ajoutant x de part & d'autre, j'ai $2x=f-c$; & diviſant de part & d'autre par 2, j'ai $x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c$; & par conſéquent la dépenſe du premier eſt connuë.

Pour avoir celle du ſecond, je prens la même équation $x+y+z=f$, & retranchant de part & d'autre $x+z$, j'ai $y=f-x-z$: or par la ſeconde équation ci-deſſus j'ai $x+z=y+b$; mettant donc la valeur $y+b$ de $x+z$ dans l'équation $y=f-x-z$, j'ai $y=f-y-b$; & ajoutant y de part & d'autre, j'ai $2y=f-b$; & diviſant de part & d'autre par 2, j'ai $y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b$, & par conſéquent la dépenſe du ſecond eſt connuë.

$$\begin{array}{l} x+y+z=f \\ y=f-x-z \\ y=f-y-b \\ 2y=f-b \\ y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b \text{ dépenſe du ſecond} \end{array}$$

Pour trouver celle du troiſiéme, je prens encore la même équation $x+y+z=f$, & retranchant de part & d'autre $x+y$, j'ai $z=f-x-y$: or par la premiere équation ci-deſſus, j'ai $x+y=z+a$; mettant donc la valeur $z+a$ de $x+y$ dans l'équation $z=f-x-y$, j'ai $z=f-z-a$; & ajoutant z de part & d'autre, j'ai $2z=f-a$; & diviſant de part & d'autre par 2, j'ai $z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$; & par conſéquent la dépenſe du troiſiéme eſt connuë.

$x+y+z=f$
$z=f-x-y$
$z=f-z-a$
$2z=f-a$
$z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$ dépenſe du troiſiéme

Mettant donc à la place des lettres f, a, b, c leur valeur, nous aurons $f=a+b+c=2+6+10=18$; ainſi la dépenſe totale eſt 18.

$x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}18-\frac{1}{2}10=9-5=4$, qui eſt la dépenſe du premier.

$y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}18-\frac{1}{2}6=9-3=6$, dépenſe du ſecond.

$z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}18-\frac{1}{2}2=9-1=8$, dépenſe du troiſiéme.

Et en effet, ces trois dépenſes 4, 6, 8 font la dépenſe totale ; de plus la premiere & la ſeconde 6 & 4 jointes enſemble font 10, qui ſurpaſſe 8 de 2 ; la premiere & la troiſiéme 4 & 8 jointes enſemble font 12, qui ſurpaſſe 6 de 6 ; & la ſeconde & la troiſiéme 6 & 8 font 14, qui ſurpaſſe 4 de 10 ; ainſi tout ſe trouve juſte.

Si l'on examine l'équation $x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c$, qui marque la dépenſe du premier, on trouvera qu'elle eſt égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence des deux autres d'avec elle ; de même l'équation $y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b$ marque que la dépenſe du ſecond eſt égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence des deux autres d'avec elle ; & l'équation $z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$ marque que la dépenſe du troiſiéme eſt égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouve entr'elle & les deux autres : d'où l'on peut tirer une régle générale, *que dans tous les cas ſemblables à celui-ci, où il ne s'agit que de trois perſonnes, dont l'on compare les dépenſes de deux en deux avec une troiſiéme ; la dépenſe de chacune en particulier eſt égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouve entr'elle & celles des deux autres ; & que la dépenſe totale eſt toujours égale à la ſomme des différences.*

D'où l'on voit que chaque coup de plume vous fait découvrir de nouvelles vérités ; mais ce n'eſt pas tout, car en ſuivant la même méthode, on peut trouver facilement une régle générale, non-

ſeulement pour trois perſonnes, mais pour quatre, dont on compareroit les dépenſes de trois en trois avec une quatriéme; pour cinq, dont on compareroit les dépenſes de quatre en quatre avec une cinquiéme; pour ſix, dont on compareroit les dépenſes de cinq en cinq avec une ſixiéme; & ainſi de ſuite à l'infini, comme nous allons voir dans l'exemple ſuivant.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Quatre hommes ont dépenſé une ſomme d'argent; les trois premiers enſemble ont dépenſé 10 *liv. plus que le quatriéme; le premier, ſecond & quatriéme en ont dépenſé* 12 *plus que le troiſiéme; le premier, troiſiéme & quatriéme en ont dépenſé* 14 *plus que le ſecond; & enfin les trois derniers en ont dépenſé* 16 *plus que le premier: quelle eſt la dépenſe totale & celle de chacun en particulier?*

J'appelle a la premiere différence 10, b la ſeconde 12, c la troiſiéme 14, & d la quatriéme 16.

J'appelle auſſi la dépenſe du premier x, celle du ſecond y, celle du troiſiéme z, & celle du quatriéme v.

Par les conditions du problême j'ai les quatre équations que l'on voit ici.

$$x+y+z=v+a$$
$$x+y+v=z+b$$
$$x+z+v=y+c$$
$$y+z+v=x+d$$

Et les ajoutant enſemble, j'ai: $3x+3y+3z+3v=x+y+z+v+a+b+c+d$.

Et retranchant de part & d'autre $x+y+z+v$, j'ai: $2x+2y+2z+2v=a+b+c+d$; & diviſant de part & d'autre par 2, j'ai: $x+y+z+v=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$, ce qui me fait voir que la dépenſe totale eſt égale à la moitié de la ſomme des différences.

$$3x+3z+3y+3v=v+z+y+x+a+b+c+d$$
$$2x+2z+2y+2v=a+b+c+d$$
$$x+z+y+v=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}d.$$

Pour trouver les dépenſes particulieres, j'appelle f la dépenſe totale, afin de rendre le calcul plus court; ainſi la derniere équation eſt $x+z+y+v=f$.

J'en retranche de part & d'autre $z+y+v$, & j'ai: $x=f-z-y-v$; or par la quatriéme équation ci-deſſus $z+y+$

$$x+z+y+v=f$$
$$x=f-z-y-v$$
$$x=f-x-d$$
$$2x=f-d$$
$x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}d$ dépenſe du premier

$v=x+d$, mettant donc la valeur $x+d$ de $z+y+v$ dans l'équation $x=f-z-y-v$, j'ai : $x=f-x-d$, & ajoutant x de part & d'autre, j'ai : $2x=f-d$; & diviſant de part & d'autre par 2, j'ai : $x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}d$ qui eſt la dépenſe du premier.

Je retranche $x+z+v$ de la même équation $x+z+y+v=f$, & j'ai $y=f-x-z-v$; & mettant au lieu de $-x-z-v$ ſa valeur $-y-c$ que je trouve dans la troiſiéme équation ci-deſſus, j'ai $y=f-y-c$; & ajoutant y de part & d'autre, j'ai $2y=f-c$; & diviſant par 2 de part & d'autre, j'ai : $y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c$, dépenſe du ſecond.

$x+z+y+v=f$
$y=f-x-z-v$
$y=f-y-c$
$2y=f-c$
$y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c$ dépenſe du ſecond

Je retranche $x+y+v$ de la même équation $x+z+y+v=f$, & j'ai : $z=f-x-y-v$; & mettant au lieu de $x-y-v$ ſa valeur $-z-b$ que je trouve dans la ſeconde équation ci-deſſus, j'ai : $z=f-z-b$; & ajoutant z de part & d'autre, j'ai $2z=f-b$; & diviſant par 2, j'ai : $z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b$ dépenſe du troiſiéme.

$x+z+y+v=f$
$z=f-x-y-v$
$z=f-z-b$
$2z=f-b$
$z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b$ dépenſe du troiſiéme

Je retranche $x+z+y$ de la même équation $x+z+y+v=f$, & j'ai : $v=f-x-z-y$; & mettant au lieu de $-x-z-y$ ſa valeur $-v-a$ que je trouve par la premiere équation ci-deſſus, j'ai : $v=f-v-a$; & achevant le reſte de même que pour les trois autres, je trouve $v=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$ qui eſt la dépenſe du quatriéme; mettant donc la valeur des lettres connuës, j'ai :

$x+z+y+v=f$
$v=f-x-z-y$
$v=f-v-a$
$2v=f-a$
$v=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a$ dépenſe du quatriéme

$f=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d=5+6+7+8=26$ liv. dépenſe totale.
$x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}d=13-8=5$ dépenſe du premier
$y=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}c=13-7=6$ dépenſe du ſecond
$z=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}b=13-6=7$ dépenſe du troiſiéme
$v=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}a=13-5=8$ dépenſe du quatriéme

Et ces quatre dépenſes priſes enſemble font en effet la dépenſe totale 26 livres; de plus les trois premieres 5, 6, 7 font enſemble

18 qui ſurpaſſe la derniere 8 de 10 ; les deux premieres 5, 6, & la derniere 8 font 19, qui ſurpaſſe la troiſiéme 7 de 12 ; la premiere 5, & les deux dernieres 7 & 8 font 20, qui ſurpaſſe la ſeconde 6 de 14 ; enfin les trois dernieres 6, 7, 8 font 21, qui ſurpaſſe la premiere 5 de 16 : ainſi toutes les conditions du problême ſont remplies.

En conſidérant l'équation $x+y+z+v=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c$ qui marque la dépenſe totale, nous trouvons que cette dépenſe eſt égale à la moitié de la ſomme des différences, au lieu que dans l'exemple précédent, la dépenſe totale étoit égale à la ſomme des différences ; mais quant aux équations qui marquent les dépenſes particulieres, elles nous font voir que chacune de ces dépenſes eſt égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouve entr'elle & les trois autres priſes enſemble, de même que dans l'exemple précédent. Il n'y a donc de différence entre l'exemple précédent & celui-ci, que de la part de la dépenſe totale, cette dépenſe étant égale dans le précédent à la ſomme des différences, & dans celui-ci à la moitié ſeulement de cette ſomme.

Or ceci me fait voir que s'il y avoit cinq perſonnes dont on comparât les dépenſes 4 à 4 avec une cinquiéme, la dépenſe totale ne ſeroit que le tiers de la ſomme des différences, & les dépenſes particulieres ſeroient toujours chacune la moitié de la totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouveroit entr'elle & les quatre autres ; car j'aurois d'abord 5 équations telles qu'on les voit ici, où les cinq lettres x, z, y, t, v marquent les dépenſes particulieres ; & les cinq a, b, c, d, f marquent les différences de quatre priſes enſemble d'avec une cinquiéme ; & ajoutant enſemble ces équations, j'aurois eu une cinquiéme équation, de laquelle retranchant $v+t+y+z+x$, le reſte auroit été $3x+3z+3y+3t+3v=a+b+c+d+f$; & diviſant de part & d'autre par 3, j'aurois eu une derniere équation qui fait voir clairement que les cinq dépenſes particulieres

$$x+z+y+t=v+a$$
$$x+z+y+v=t+b$$
$$x+z+t+v=y+c$$
$$x+y+t+v=z+d$$
$$z+y+t+v=x+f$$

$$4x+4z+4y+4t+4v=v+t+y+z+x+a+b+c+d+f$$
$$3x+3z+3y+3t+3v=a+b+c+d+f$$
$$x+z+y+t+v=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d+\frac{1}{3}f$$

priſes enſemble ſont égales au $\frac{1}{3}$ de la ſomme des différences ; & par conſéquent que la dépenſe totale eſt égale au $\frac{1}{3}$ de cette ſomme.

Et appellant la dépenſe totale f pour abréger, cette derniere équation ſe réduit à $x+z+y+t+v=f$, de laquelle retranchant $z+y+t+v$, & mettant au lieu de $z+y+t+v$ ſa valeur $x+f$ qu'on trouve dans la cinquiéme équation ci-deſſus ; & achevant le reſte comme on voit ici, on auroit $x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}f$, c'eſt-à-dire, la dépenſe du premier égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouve entr'elle & les quatre autres, & l'on trouveroit la même choſe pour les quatre autres dépenſes particulieres ; deſorte qu'il n'y a point de différence entre ce dernier exemple & les deux précédens, par rapport aux dépenſes particulieres, mais qu'il s'en trouve par rapport à la totale qui n'eſt ici que le tiers de la ſomme des différences ; au lieu que dans le premier elle étoit égale à cette ſomme, & dans le ſecond elle en étoit la moitié.

$x+z+y+t+v=f$
$x=f-z-y-t-v$
$x=f-x-f$
$2x=f-f$
$x=\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}f$ dépenſe du premier

Et je trouverois de même que pour ſix perſonnes dont on compareroit les dépenſes de cinq en cinq avec une ſixiéme, la dépenſe totale ſeroit le $\frac{1}{4}$ de la ſomme des différences ; & que chaque dépenſe particuliere ſeroit égale à la moitié de la totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouveroit entr'elle & les cinq autres.

D'où je tire une régle générale *que pour trois perſonnes, dont les dépenſes ſont comparées deux à deux avec une troiſiéme, la dépenſe totale eſt égale à la ſomme des différences ; que pour quatre perſonnes, dont les dépenſes ſont comparées trois à trois avec une quatriéme, la la dépenſe totale eſt $\frac{1}{2}$ de la ſomme des différences ; que pour cinq, dont les dépenſes ſont comparées quatre à quatre avec une cinquiéme, la dépenſe totale eſt $\frac{1}{3}$ de la ſomme des différences ; que pour ſix, dont les dépenſes ſont comparées cinq à cinq avec une ſixiéme, la dépenſe totale eſt $\frac{1}{4}$ de la ſomme des différences ; que pour ſept, dont les dépenſes ſont comparées ſix à ſix avec une ſeptiéme, la dépenſe totale eſt égale à $\frac{1}{5}$ de la ſomme des différences, & ainſi de ſuite pour huit, pour neuf, pour dix, &c. à l'infini, augmentant toujours le dénominateur de la fraction d'une unité ; deſorte que quelque nombre de perſonnes qu'on ſuppoſe, le dénominateur de la fraction eſt toujours égal au nombre des perſonnes moins deux ; car pour quatre perſonnes, le dénominateur eſt*

deux ; pour cinq, il eſt trois ; pour ſix, il eſt quatre, &c. & quant aux dépenſes particulieres, chacune d'elles eſt toujours égale à la moitié de la dépenſe totale, moins la moitié de la différence qui ſe trouve entr'elle & toutes les autres.

SIXIE'ME EXEMPLE.

Trois particuliers ont dépenſé une certaine ſomme, la dépenſe du premier & celle du ſecond, priſes conjointement, montent à 13 livres ; celles du premier & du troiſiéme montent à 14 livres ; & celles du ſecond & du troiſiéme montent à 15 livres : quelle eſt la dépenſe totale ? & quelles ſont les dépenſes particulieres ?

Pour diſtinguer les dépenſes particulieres d'avec les dépenſes priſes deux à deux, j'appellerai celles-ci dépenſes conjointes ; ainſi la premiere dépenſe conjointe 13 ſera a, la ſeconde 14 ſera b, & la troiſiéme 15 ſera c.

J'appellerai auſſi la dépenſe particuliere du premier x, celle du ſecond y, & celle du troiſiéme z.

Par les conditions du problême, j'ai les trois équations ſuivantes ; & ajoutant ces trois équations enſemble, j'ai $2x+2y+2z=a+b+c$; & diviſant de part & d'autre par 2, j'ai : $x+z+y=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, ce qui me fait voir que les trois dépenſes particulieres jointes enſemble ſont égales à la moitié de la ſomme des dépenſes conjointes ; & par conſéquent la dépenſe totale eſt la moitié de cette ſomme.

$$\begin{array}{l} x+y=a \\ x+z=b \\ y+z=c \\ \hline 2x+2y+2z=a+b+c \\ x+y+z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \end{array}$$

Pour abréger j'appelle f la dépenſe totale ; ainſi cette derniere équation ſe trouve changée en celle-ci : $x+y+z=f$; & pour trouver par ſon moïen les dépenſes particulieres, je retranche de part & d'autre $y+z$, & j'ai : $x=f-y-z$; or par la troiſiéme équation, j'ai : $y+z=c$, mettant donc la valeur c de $y+z$ dans l'équation $x=f-y-z$, j'ai : $x=f-c$, & c'eſt la dépenſe du premier.

$$\begin{array}{l} x+y+z=f \\ x=f-y-z \\ x=f-c \text{ dépenſe du premier} \end{array}$$

Je retranche de part & d'autre $x+z$ dans la même équation $x+y+z=f$, & j'ai : $y=f-x-z$; & comme la ſeconde équation eſt $x+z=b$, mettant la va-

$$\begin{array}{l} x+y+z=f \\ y=f-x-z \\ y=f-b \text{ dépenſe du ſecond} \end{array}$$

leur c de $x+z$ dans l'équation $y=f-x-z$, j'ai : $y=f-b$, qui eſt la dépenſe du ſecond.

Je retranche $x+y$ de part & d'autre dans la même équation $x+y+z=f$, & j'ai : $x-z=f-x-y$; & comme par la premiere équation $x+y=a$, mettant la valeur a de $x+y$ dans l'équation $z=f-x-y$, j'ai : $z=f-a$, qui eſt la dépenſe du troiſiéme.

$x+y+z=f$
$z=f-x-y$
$z=f-a$ dépenſe du troiſiéme

Subſtituant la valeur des lettres connuës dans ces équations, j'ai :

$f=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=6\frac{1}{2}+7+7\frac{1}{2}=21$ dépenſe totale
$x=f-c=21-15=6$ dépenſe du premier
$y=f-b=21-14=7$ dépenſe du ſecond
$z=f-a=21-13=8$ dépenſe du troiſiéme

Et ces trois dépenſes 6, 7, 8, ſont en effet la dépenſe totale 21 ; de plus, la premiere & la ſeconde 6 & 7 font 13 ; la premiere & la troiſiéme 6 & 8 font 14, & les deux dernieres 7 & 8 font 15 ; ainſi toutes les conditions du problême ſont remplies.

Or en examinant l'équation $x+y+z=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, je vois que la dépenſe totale eſt égale à la moitié de la ſomme des dépenſes conjointes ; & examinant les équations $x=f-c$, $y=f-b$, $z=f-a$, je vois que les dépenſes particulieres ſont égales chacune à la dépenſe totale, moins la dépenſe conjointe des deux autres ; ce qui me donne une régle générale pour tous les cas où il n'y aura que trois perſonnes, dont on connoîtra les dépenſes priſes de deux en deux ; & bien-tôt nous en tirerons une régle générale pour quatre perſonnes, dont on connoîtra les dépenſes priſes de trois en trois ; pour cinq, dont on connoîtra les dépenſes priſes de quatre en quatre ; pour ſix, dont on connoîtra les dépenſes priſes de cinq en cinq, &c.

Suppoſons donc que quatre perſonnes aïant dépenſé une certaine ſomme ; le premier, le ſecond & le troiſiéme enſemble aïent dépenſé 21 livres ; que le premier, le ſecond & le quatriéme en aïent dépenſé 22 ; que le premier, troiſiéme & quatriéme en aïent dépenſé 23 ; & que les trois derniers en aïent dépenſé 24.

Appellant a la premiere dépenſe conjointe 21, b la ſeconde 22, c la troiſiéme 23 & d la quatriéme 24 ; & x la dépenſe du premier, y celle du ſecond, z celle du troiſiéme, & t celle du quatriéme, nous aurons par les conditions du problême les quatre équations ſuivantes,

ſuivantes, leſquelles ajoutées enſemble font $3x+3y+3z+3t=a+b+c+d$, & diviſant de part & d'autre par 3, j'ai : $x+y+z+t=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d$; ce qui me fait voir que les quatre dépenſes particulieres priſes enſemble ſont égales au $\frac{1}{3}$ des quatre dépenſes conjointes, & par conſéquent la dépenſe totale eſt égale à ce tiers.

$x+y+z=a$
$x+y+t=b$
$x+z+t=c$
$y+z+t=d$

$3x+3y+3z+3t=a+b+c+d$
$x+y+z+t=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d$

Et pour abréger j'appelle la dépenſe totale f, ainſi la derniere équation ſe change en celle-ci : $x+y+z+t=f$; & retranchant de part & d'autre $y+z+t$, j'ai : $x=f-y-z-t$; & mettant au lieu de $y-z-t$ ſa valeur d qu'on trouve par la quatriéme équation, j'ai : $x=f-d$, qui eſt la dépenſe du premier.

$x+y+z+t=f$
$x=f-y-z-t$
$x=f-d$ dépenſe du premier

Et retranchant $x+z+t$ de la même équation $x+y+z+t=f$, j'ai : $y=f-x-z-t$; & mettant au lieu de $x-z-t$, ſa valeur c, qu'on trouve par la troiſiéme équation, j'ai : $y=f-c$.

$x+y+z+t=f$
$y=f-x-z-t$
$y=f-c$ dépenſe du ſecond

Je retranche $x+y+t$ de la même équation $x+y+z+t=f$, & j'ai : $z=f-x-y-t$; & mettant au lieu de $x+y+t$, ſa valeur b, qu'on trouve dans la ſeconde équation, j'ai : $z=f-b$, qui eſt la dépenſe du troiſiéme.

$x+y+z+t=f$
$z=f-x-y-t$
$z=f-b$ dépenſe du troiſiéme

Enfin, je retranche $x+y+z$ de la même équation $x+y+z+t=f$, & j'ai : $t=f-x-y-z$; & mettant au lieu de $x+y+z$ ſa valeur a, qu'on trouve dans la premiere équation, j'ai : $t=f-a$, qui eſt la dépenſe du quatriéme.

$x+y+z+t=f$
$t=f-x-y-z$
$t=f-a$ dépenſe du quatriéme

Mettant, au lieu des lettres connuës, leur valeur, j'ai :

$f=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d=7+7\frac{1}{3}+7\frac{2}{3}+8=30$ dépenſe totale
$x=f-d=30-24=6$ dépenſe du premier
$y=f-c=30-23=7$ dépenſe du ſecond
$z=f-b=30-22=8$ dépenſe du troiſiéme
$t=f-a=30-21=9$ dépenſe du quatriéme

Et ces quatre dépenses jointes ensemble font en effet 30, qui est la dépense totale; de plus les trois premiers 6, 7, 8 font 21; les deux premiers 6, 7, & le quatriéme 9 font 22; le premier 6, & les deux derniers 8, 9 font 23; & les trois derniers 7, 8, 9 font 24; ainsi toutes les conditions du problême sont remplies.

Or en considérant l'équation $x+y+z+t=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d$, je vois que la dépense totale marquée par cette équation, n'est que le tiers de la somme des dépenses conjointes; au lieu que lorsqu'il n'y a que trois personnes, cette dépense est la moitié de la somme des dépenses conjointes; & par rapport aux dépenses particulieres, je vois que chacune est égale à la dépense totale, moins la dépense conjointe des autres, de même que lorsqu'il n'y a que trois personnes; ainsi il n'y a de différence que par rapport à la dépense totale.

Et je m'apperçois que s'il y avoit cinq personnes, dont on connoîtroit les dépenses conjointes de quatre en quatre, j'aurois cinq équations, lesquelles ajoutées ensemble feroiét la somme qu'on voit ici;

$$4x+4z+4y+4t+4v=+a+b+c+d+f$$
$$x+z+y+t+v=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{4}f$$

& divisant par 4, le quotient seroit $x+y+z+t+v=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{4}f$; ce qui me feroit voir que la dépense totale seroit le $\frac{1}{4}$ de la somme des dépenses conjointes. Après quoi, appellant la dépense totale f, je trouverois que chaque dépense particuliere seroit égale à la dépense totale, moins la dépense conjointe des autres; & comme le calcul se feroit toujours de la même façon, en augmentant le nombre des personnes, je tire de-là une régle générale: *que pour trois personnes, dont on connoît les dépenses de deux en deux, la dépense totale est égale à la moitié de la somme des dépenses conjointes; que pour quatre, dont on connoit les dépenses de trois en trois, la dépense totale est le $\frac{1}{3}$ de la somme des conjointes; que pour cinq, dont on connoît les dépenses de quatre en quatre, la totale est le $\frac{1}{4}$ de la somme des conjointes; que pour six, dont on connoît les dépenses de cinq en cinq, la totale est le $\frac{1}{5}$ des conjointes; & ainsi de suite, en augmentant toujours d'une unité le dénominateur de la fraction, en sorte que ce dénominateur est toujours égal au nombre des personnes, moins un; & quant aux dépenses particulieres, chacune est toujours égale à la dépense totale, moins la dépense conjointe des autres.*

Il est à remarquer qu'il peut se faire que quelqu'une des dépenses particulieres soit une grandeur négative, & c'est le calcul même qui nous en fait appercevoir; car pour trois personnes, la dé-

penſe totale eſt $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$; & pour avoir chaque dépenſe particuliere, il faut retrancher de cette ſomme tantôt a, tantôt b, & tantôt c. Or ſi nous ſuppoſons que l'une de ces trois dépenſes conjointes par exemple a, ſoit plus grande que les deux autres b, c; quand nous viendrons à retrancher a de $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, le reſte ſera $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a$; & comme a, ſelon la ſuppoſition, eſt plus grand que les deux b, c, il s'enſuit que $\frac{1}{2}a$ ſera plus grand que $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & par conſéquent la dépenſe $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a$ ſera une grandeur négative; & pour en être mieux convaincu, ſuppoſons $a=30$, $b=12$, $c=14$, la dépenſe totale $f=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=15+6+7=28$, & la dépenſe particuliere $x=f-a$ ſera $28-30$, c'eſt-à-dire moins deux; & cela ſignifiera alors que le troiſiéme au lieu de débourcer de l'argent, aura pris 2 livres ſur la dépenſe des autres, & les aura mis dans ſa poche, & qu'ainſi les deux autres auront débourcé 30 livres; & en effet, le premier $x=f-c$ ſera $28-14$, c'eſt-à-dire 14, & le ſecond $y=f-b$ ſera $28-12$, c'eſt-à-dire 16, & les deux enſemble 14 & 16 font 30, ſur leſquels le troiſiéme aïant pris 2, le reſte eſt 28 qui eſt la dépenſe totale.

De même pour quatre perſonnes, la dépenſe totale eſt $\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d$; & comme il faut en retrancher tantôt a, tantôt b, tantôt c, & tantôt d pour avoir les dépenſes totales, ſuppoſons que a ſoit retranché, le reſte eſt $\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d-\frac{1}{3}a$; de ſorte que ſi $\frac{1}{3}a$ eſt plus grand que $\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi $2a$ eſt plus grand que $b+c+d$, la dépenſe particuliere exprimée par $f-a$, ou par $\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d-\frac{1}{3}a$, ſera négative.

On trouvera de même, que ſi pour cinq perſonnes $\frac{1}{4}a$ eſt plus que $\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{4}f$, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi $3a$ eſt plus grand que $b+c+d+f$, la dépenſe particuliere exprimée par $f-a$, ou par $\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{4}f-\frac{3}{4}a$, ſera négative, & ainſi des autres.

D'où l'on tire une régle générale, *qu'afin que les dépenſes particulieres ſoient toutes poſitives, il faut pour trois perſonnes que chaque dépenſe conjointe ſoit moindre que les deux autres conjointes; que pour quatre, il faut que le double de chaque dépenſe conjointe ſoit moindre que les trois autres; que pour cinq, il faut que le triple de chaque dépenſe conjointe ſoit moindre que les quatre autres; que pour ſix, il faut que le quadruple de chaque dépenſe conjointe ſoit moindre que les cinq autres; & ainſi de ſuite à l'infini.*

Et voilà certainement un avantage admirable de l'Analyſe, qui non-ſeulement vous fait trouver des régles générales pour tous les cas poſſibles, mais qui vous découvre auſſi dans quelle occa-

ſion il peut ſe trouver des grandeurs négatives ; de même qu'elle vous fait connoître encore l'impoſſibilité du problême, ſi ceux qui le propoſent mettent quelque fauſſeté dans ſes conditions, ainſi que nous ferons voir dans la ſuite de ce Traité.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

On feint que du tems que les Bêtes parloient, une mule & une ânesſe allant enſemble avec leur charge, la mule dit à l'ânesſe : Si je te donnois un de mes ſacs, tu en aurois autant que moi ; & ſi tu m'en donnois un des tiens, j'en aurois le double de toi : On demande combien de ſacs chacune avoit ?

J'appelle x le nombre de ſacs de la mule, & z celui de l'ânesſe ; par les conditions du problême, j'ai ces deux équations :

Premiere équat. $x-1=z+1$ $x=z+2$

Seconde équat. $x+1=2z-2$ $x=2z-3$

$z+2=2z-3$

$z+5=2z$

$5=z$

Et prenant dans l'une & dans l'autre la valeur de x, c'eſt-à-dire, ajoutant un de part & d'autre dans la premiere, & retranchant un de part & d'autre dans la ſeconde, j'ai : $x=z+2$ & $x=2z-3$, & comparant ces deux valeurs enſemble, j'ai $z+2=2z-3$, où il n'y a qu'une ſeule inconnuë z ; ainſi donnant 3 de part & d'autre, j'ai : $z+5=2z$; & rètranchant z de part & d'autre, j'ai $5=z$; & par conſéquent l'ânesſe avoit cinq ſacs ; & mettant au lieu de z, ſa valeur 5 dans l'équation $x=z+2$, j'ai : $x=7$, nombre des ſacs de la mule.

HUITIE'ME EXEMPLE.

Deux perſonnes ont mis 100 *écus en bourſe commune, & la miſe de l'une, multipliée par celle de l'autre, fait* 2400 *écus : quelles ſont les deux miſes ?*

On a vû dans le premier exemple que ſi deux grandeurs étoient inégales, la plus grande étoit égale à la moitié de leur ſomme, plus la moitié de leur différence ; & la petite à la moitié de leur ſomme, moins la moitié de leur différence : cela ſuppoſé.

J'appelle $2a$ la ſomme 100 des miſes, & $2z$ leur différence que

je ne connois point ; & la raiſon pour laquelle je me ſers de l'expreſſion $2a$, $2z$, eſt pour que leur moitié ne ſoit point une fraction. J'appelle auſſi b le produit 2400 des deux miſes : la premiere miſe ſera donc $a+z$, & la ſeconde $a-z$; & multipliant $a+z$ par $a-z$, nous aurons $aa-zz$, lequel produit ſera égal à b ; ainſi nous aurons $aa-zz=b$; & ajoutant zz de part & d'autre, nous aurons $aa=b+zz$; & retranchant b de part & d'autre, nous aurons $aa-b=zz$; & tirant la racine quarrée nous aurons $z=\sqrt{aa-b}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, nous aurons $z=\sqrt{2500-2400}=\sqrt{100}=10$, ainſi $z=10$; & par conſéquent la premiere miſe $a+z=50+10=60$, & la ſeconde $a-z=50-10=40$.

$a+z$
$a-z$
$aa-az$
$+az-zz$
$aa-zz=b$
$aa=b+zz$
$aa-b=zz$
$\sqrt{aa-b}=z$

Dans cet exemple nous avons dégagé l'inconnuë z par l'extraction de la racine quarrée.

Et ſi on nous avoit dit que la différence des miſes étoit 20 & le produit de l'une par l'autre 2400, & qu'on nous eût caché la ſomme, nous aurions appellé la différence $20=2a$, la ſomme inconnuë $2z$ & le produit $2400=b$; ainſi la premiere miſe auroit été $z+a$, & la ſeconde $z-a$, & leur produit $zz-aa$; l'équation auroit donc été $zz-aa=b$, & ajoutant aa de part & d'autre, nous aurions eu $zz=b+aa$; & tirant la racine quarrée, nous aurions eu $z=\sqrt{b+aa}$; & mettant les valeurs des lettres connuës nous aurions eu $z=\sqrt{2400+100}=\sqrt{2500}=50$: donc la premiere miſe $z+a=50+10=60$, & la ſeconde $z-a=50-10=40$.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

Deux perſonnes ont partagé entr'elles, inégalement, la ſomme de 18 *livres, & l'on ſait que faiſant les quarrés de leurs deux parts, la ſomme de ces quarrés eſt* 164 *: on demande quelle eſt la part de chacun ?*

J'appelle $2a$ la ſomme 18, & $2y$ la différence des deux parts ; & $2b$ la ſomme 164 des quarrés.

La premiere ſera donc $a+y$, & la ſeconde $a-y$; & faiſant les quarrés de ces deux parts, nous aurons pour le premier $aa+2ay+yy$, & pour le ſecond $aa-2ay+yy$; & ajoutant ces deux quarrés enſemble, leur ſomme ſera $2aa+2yy$; & par les conditions du

problême, cette ſomme eſt égale à $2b$: ainſi nous avons $2aa+2yy=2b$; & retranchant $2aa$ de part & d'autre $2yy=2b-2aa$; & diviſant par 2, nous avons $yy=b-aa$; & tirant la racine quarrée $y=\sqrt{b-aa}$, & ſubſtituant les valeurs des lettres connuës $y=\sqrt{82-81}$, c'eſt-à-dire $y=1$: donc la premiere part $a+y=9+1=10$, & la ſeconde $a-y=9-1=8$.

$$\begin{array}{ll|l} a+y & a-y & \\ a+y & a-y & \\ \hline aa+ay & aa-ay & \\ \quad +ay+yy & \quad -ay+yy & \\ \hline aa+2ay+yy & aa-2ay+yy & \\ aa-2ay+yy & & \\ \hline 2aa & +2yy & \text{ſomme des quarrés.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2aa+2yy=2b \\ 2yy=2b-2aa \\ yy=b-aa \\ y=\sqrt{b-aa} \end{array}$$

$$y=\sqrt{82-81}=\sqrt{1}=1$$
$$a+y=10 \qquad a-y=8$$

Et ſi on connoiſſoit la différence 2 des deux parts & la ſomme 164 des quarrés, & que la ſomme des parts fût inconnuë, on appelleroit cette ſomme inconnuë $2y$, la différence connuë $2=2a$, & la ſomme des quarrés $164=2b$.

Ainſi la premiere part ſeroit $y+a$, & la ſeçonde $y-a$; & leurs quarrés ſeroient $yy+2ay+aa$, & $yy-2ay+aa$; & leur ſomme $2yy+2aa$ ſeroit égale à $2b$; retranchant donc $2aa$ de part & d'autre, on auroit $2yy=2b-2aa$; & diviſant par 2, on auroit $yy=b-aa$, & tirant la racine quarrée $y=\sqrt{b-aa}$, & mettant les valeurs des lettres connuës $y=9$; & par conſéquent la premiere part $y+a=9+1=10$, & la ſeconde $y-a=9-1=8$.

$$\begin{array}{ll|l} y+a & y-a & \\ y+a & y-a & \\ \hline yy+2ay+aa & yy-2ay+aa & \\ yy-2ay+aa & & \\ \hline 2yy & +2aa=2b & \\ 2yy=2b-2aa & & \\ yy=b-aa & & \end{array}$$

$$y=\sqrt{b-aa}=\sqrt{82-1}=\sqrt{81}=9$$

Et ſi on connoiſſoit la ſomme 18, & la différence 36 des quarrés des deux parts, & que tout le reſte fût inconnu, on appelleroit $2a$ la ſomme 18 des deux parts, $2z$ leur différence, & $2b$ la différence des quarrés.

Ainſi la premiere part ſeroit $a+z$, la ſeconde $a-z$, & leurs quarrés $aa+2az+zz$ & $aa-2az+zz$; & retranchant l'un de l'autre, le reſte $4az$ ſeroit la différence de ces quarrés; ainſi par les con-

ditions du problême, on auroit $4az=2b$; & diviſant par $4a$, on auroit $z=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}$; & mettant la valeur des lettres connuës, on auroit $z=1$: donc la premiere part $a+z=9+1=10$, & la ſeconde $a-z=9-1=8$.

$$\begin{array}{ll} a+z & a-z \\ a+z & a-z \\ \hline aa+2az+zz & aa-2az+zz \\ aa-2az+zz & \\ \hline 4az \text{ différence des quarrés} & \end{array}$$

Et ſi on connoiſſoit la différence 2 des deux parts, & la différence 36 de leurs quarrés, on appelleroit la ſomme inconnuë des deux parts $2z$ leur différence $2=2a$, & la différence 36 des quarrés $2b$.

$$4az=2b \qquad z=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}=\frac{18}{18}=1$$

Ainſi la premiere part ſeroit $z+a$, la ſeconde $z-a$, & leurs quarrés $zz+2az+2aa$, & $zz-2az+aa$; & retranchant l'un de l'autre, le reſte $4az$ ſeroit leur différence : or par les conditions du problême $4az=2b$, diviſant donc par $4a$, on auroit $z=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, on auroit $z=9$; ainſi la premiere part $z+a=9+1=10$, & la ſeconde $z-a=9-1=8$.

$$\begin{array}{ll} z+a & z-a \\ z+a & z-a \\ \hline zz+2az+aa & zz-2az+aa \\ zz-2az+aa & \\ \hline 4az \text{ différence des quarrés} & \end{array}$$

$$4az=2b \qquad z=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}=\frac{18}{2}=9$$

DIXIE'ME EXEMPLE.

Deux Joüeurs ont gagné une certaine ſomme d'écus; le gain du premier, multiplié par le gain du ſecond fait 96; & ſi l'on fait les quarrés des deux gains, leur ſomme eſt 208 : quel eſt le gain de chacun?

J'appelle $2x$ la ſomme inconnuë des gains, $2y$ leur différence, a le produit 96 des deux gains, & $2b$ la ſomme 208 des quarrés; le premier gain ſera donc $x+z$, & le ſecond $x-z$; & faiſant leurs quarrés nous aurons $xx+2xz+zz$, & $xx-2xz+zz$ ſomme des quarrés.

$$\begin{array}{ll} x+z & x-z \\ x+z & x-z \\ \hline xx+2xz+zz & xx-2xz+zz \\ xx-2xz+zz & \\ \hline 2xx+2zz \text{ ſomme des quarrés} & \end{array}$$

$2xz+zz$, dont la ſomme eſt $2xx+2zz$: or par les conditions du problême, cette ſomme eſt égale à $2b$ dont nous avons $2xx+2zz=2b$; & retranchant $2xx$ de part & d'autre, nous avons $2zz=2b-2xx$; & diviſant par 2 de part & d'autre $zz=b-xx$.

D'autre part, ſi nous multiplions les deux gains $x+z$, $x-z$ l'un par l'autre, leur produit ſera $xx-zz$; & ce produit, ſuivant les conditions du problême, eſt égal à a, ainſi nous aurons $xx-zz=a$; & ajoutant zz de part & d'autre, nous aurons $xx=a+zz$; & retranchant a de part & d'autre $xx-a=zz$, ce qui nous donne une ſeconde valeur de zz.

Comparant donc enſemble les deux valeurs trouvées de zz, nous aurons $xx-a=b-xx$; & ajoutant xx & a de part & d'autre, nous aurons $2xx=b+a$; & diviſant par 2, $xx=\frac{b+a}{2}$, & tirant la racine quarrée $x=\sqrt{\frac{b+a}{2}}$; & mettant la valeur des lettres connuës, nous aurons $x=10$, donc $xx=100$; mettant donc cette valeur de xx dans l'équation $xx-a=zz$, nous aurons $zz=100-96=4$, & par conſéquent $z=2$; ainſi le gain du premier $x+z=12$, & celui du ſecond $x-z=8$.

$2xx+2zz=2b$
$2zz=2b-2xx$
$zz=b-xx$ premiere valeur de zz

$x+z$
$x-z$
$xx-xz$
$+xz-zz$
$xx-zz$ produit des deux gains.

$xx-zz=a$
$xx=a+zz$
$xx-a=zz$ ſeconde valeur de zz

$xx-a=b-xx$
$2xx=b+a$
$xx=\frac{b+a}{2}$
$x=\sqrt{\frac{b+a}{2}}$
$x=\sqrt{\frac{104+96}{2}}=\sqrt{\frac{200}{2}}=\sqrt{100}=10$

$zz=xx-a=100-49=4$
$z=2$
$x+z=10+2=12$ gain du premier
$x-z=10-2=8$ gain du ſecond

Et ſi on avoit connu le produit 96 des deux gains, & la différence 80 de leurs quarrés, & que tout le reſte eût été inconnu, on auroit appellé comme ci-deſſus $2x$ la ſomme inconnuë des gains, $2z$ leur différence, a le produit 96, & $2b$ la différence des quarrés.

Le premier gain auroit donc été $x+z$, & le ſecond $x-z$, & leur

leur produit $xx-zz$, ainſi on auroit eu $xx-zz=a$; & ajoutant zz de part & d'autre, on auroit eu $xx=a+zz$.

D'autre part, faiſant les quarrés des deux gains, on auroit eu $xx+2xz+zz$ & $xx-2xz+zz$; & retranchant l'un de l'autre, le reſte $4xz$ auroit été leur différence; & par les conditions du problême, on auroit eu $4xz=2b$.

Et faiſant les quarrés de l'égalité $xx-zz=a$, & de l'égalité $4xz=2b$, on auroit eu $x^4-2xxzz+z^4=aa$ & $16xxzz=4bb$; & diviſant celle-ci par 4, $4xxzz=bb$, & ajoutant enſemble ces deux égalités, on auroit eu $x^4+2xxzz+z^4=aa+bb$; & tirant la racine quarrée, on auroit eu $xx+zz=\sqrt{aa+bb}$, & retranchant zz de part & d'autre $xx=\sqrt{aa+bb}-zz$, ce qui auroit donné une ſeconde valeur de xx; comparant donc ces deux valeurs enſemble, on auroit eu $a+zz=\sqrt{aa+bb}-zz$, & ajoutant zz & retranchant a, $2zz=-a+\sqrt{aa+bb}$; & diviſant par 2, on auroit eu $zz=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}$, & tirant la racine quarrée $z=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$

$x+z$
$x-z$

$xx-xz$
$+xz-zz$

$xx-zz$ produit des gains

$xx-zz=a$
$xx=a+zz$ premiere valeur de xx

$x+z$ $x+z$: $xx+2xz+zz$
$x-z$ $x-z$: $xx-2xz+zz$

$4xz$ différence des quarrés

$xx-zz=a$ $xx-zz=a$: $x^4-2xxzz+z^4=aa$
$4xz=2b$ $4xz=2b$: $16xxzz=4bb$
$4xxzz=bb$

$x^4+2xxzz+z^4=aa+bb$

$xx+zz=\sqrt{aa+bb}$

$xx=\sqrt{aa+bb}-zz$ ſeconde valeur de xx

$a+zz=\sqrt{aa+bb}-zz$
$2zz=-a+\sqrt{aa+bb}$
$zz=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}$
$z=\sqrt{-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$

$z=\sqrt{-48+\frac{1}{2}\sqrt{9216+1600}}=\sqrt{-48+52}$
$=\sqrt{4}=2$

$xx=\sqrt{aa+bb}-zz=104-4=100$
$x=10$

$+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}=z$: donc $zz=4$; & mettant cette valeur de z dans l'équation $xx=\sqrt{aa+bb}-zz$, on auroit eu $xx=104-4=100$ & $x=10$: donc le premier gain $x+z=10+2=12$, & le ſecond $x-z=10-2=8$.

La méthode que nous avons emploïée pour réſoudre cette derniere queſtion, peut ſervir de principe en bien des occaſions. Elle conſiſte en ce qu'aïant trouvé les deux équations du problême $xx-zz=a$ & $4xz=2b$, dont l'une marque la valeur du produit des deux gains, & l'autre la différence de leurs quarrés, nous avons élevé l'une & l'autre à la ſeconde puiſſance ; après quoi les ajoutant enſemble, nous avons trouvé que leur ſomme étoit un quarré parfait, dont l'extraction de la racine nous a fait trouver aiſément une ſeconde valeur de xx, laquelle nous a fourni le moïen d'achever le reſte ſans peine. Nous réſoudrons les deux queſtions de l'exemple ſuivant par la même méthode, afin qu'on en comprenne mieux l'application & les changemens qu'il y faut faire ſelon l'éxigence des cas.

ONZIE'ME EXEMPLE.

Deux Amis ont envoïé ſur Mer 15 *piſtoles ; la miſe du premier, multipliée par celle du ſecond, fait* 54 *; & ſi l'on fait le cube des deux miſes, leur différence eſt* 513*: quelles ſont ces deux miſes ?*

J'appelle $2z$ la ſomme inconnuë des miſes, $2y$ leur différence, b leur produit connu 54, & $2c$ la différence 513 de leurs cubes.

La premiere miſe eſt donc $z+y$, & la ſeconde $z-y$; & faiſant leur produit $zz-yy$, ce produit, par la premiere condition du problême, eſt égal à b ; ainſi on a $zz-yy=b$.

D'autre part, faiſant les cubes des deux miſes, & retrãchant l'un

$z+y$
$z-y$
$zz-zy$
$+zy-yy$
$zz-yy$ produit des miſes ;

$zz-yy=b$ premiere condition du problême.

$z^3+3z^2y+3zy^2+y^3$ $\quad z^3-3z^2y+3zy^2-y^3$
$z^3-3z^2y+3zy^2-y^3$
$6z^2y \quad +2y^3$ différence des cubes.

$6z^2y+2y^3=2c$ 2e condition du problême.
$3z^2y+y^3=c$

de l'autre, leur différence eſt $6zzy+2y^3$; & par la ſeconde condition du problême, on a $6zzy+2y^3=2c$; & diviſant par 2, $3zzy+y^3=c$.

Comparant enſemble l'équation $zz-yy=b$ de la premiere condition, & l'équation $3zzy+y^3=$ tirée de la ſeconde; je fais enſorte qu'elles ſoient toutes deux du même degré, c'eſt-à-dire, que l'inconnuë z dans la premiere & l'inconnuë y dans la ſeconde ſoit du même degré, ce que je trouve en faiſant le cube de la premiere équation, & le quarré de la ſeconde; car par ce moïen z deviendra z^6, & y deviendra y^6: ainſi j'ai deux équations.

Et ajoutant ces deux équations enſemble, j'ai une nouvelle équation qui eſt un quarré parfait; & tirant la racine quarrée, j'ai $z^3+3zyy=\sqrt{b^3+cc}$; & ajoutant cette équation avec l'équation ci-deſſus $3zzy+y^3=c$ tirée de la ſeconde condition, j'ai $z^3+3zzy+3zyy+y^3=c+\sqrt{b^3+cc}$, dont le premier membre eſt un cube parfait; tirant donc la racine cubique, j'ai $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}$, qui eſt la miſe du premier.

$z^6-3z^4yy+3zzy^4-y^6=b^3$ & $9z^4yy+6zzy^4+y^6=cc$
$+9z^4yy+6zzy^4+y^6=cc$

$z^6+6z^4yy+9zzy^4=bbb+cc$

$z^3+3zyy=\sqrt{bbb+cc}$

$z^3+3zzy+3zyy+y^3=c+\sqrt{bbb+cc}$

$z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{bbb+cc}}$ miſe du premier

$z-y=\sqrt[3]{c+\sqrt{bbb+cc}}$ miſe du ſecond

$z+y=\sqrt[3]{256\frac{1}{2}+\sqrt{157464+65792\frac{1}{4}}}=\sqrt[3]{256\frac{1}{2}+472\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{729}=9$

$z-y=\sqrt[3]{256\frac{1}{1}+\sqrt{157464+65792\frac{1}{2}}}=\frac{54}{9}=6$

Et ſi l'on prend l'équation $zz-yy=b$ de la premiere condition du problême, & qu'on la diviſe par $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}$, c'eſt-à-dire, ſi on diviſe le membre inconnu par l'inconnu, & le connu par le connu, le quotient ſera $z-y=\sqrt[3]{\frac{b}{c+\sqrt{b^3+cc}}}$ qui eſt la miſe du ſe-

cond; & mettant les valeurs des lettres connuës, on aura $z+y=9$, miſe du premier; & $z-y=6$, miſe du ſecond.

On obſervera que l'équation $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{b^3+cc}}$ ſignifie qu'il faut prendre le cube b^3 de b & l'ajouter au quarré cc de c, & tirer enſuite la racine quarrée; après quoi ajoutant cette racine à c, il faut tirer la racine cubique, & cette racine eſt la valeur de $z+y$, & ainſi des autres expreſſions ſemblables.

Et ſi on connoiſſoit le produit 54 des deux miſes & la ſomme 945 de leurs cubes, & que tout le reſte fût inconnu, on appelleroit de même $2z$ la ſomme inconnuë des miſes, $2y$ leur difference, b leur produit & $2c$ la ſomme de leurs cubes.

Ainſi la premiere miſe ſeroit $z+y$, la ſeconde $z-y$; & faiſant leur produit $zz-yy$, on auroit $zz-yy=b$ qui eſt la premiere condition du problême.

$z+y$
$z-y$

$zz-yy=b$ premiere condition du problême

$z^3+3zzy+3zyy+y^3$ $\quad z^3-3zzy+3zyy-y^3$
$z^3-3zzy+3zyy-y^3$

$2z^3 \quad +6zyy$ ſomme des cubes

$2z^3+6zyy=2c$ ſeconde condition du problême
$z^3+3zyy=c$

$z^6-3z^4yy+3z^2y^4-y^6=b^3$

$z^6+6z^4yy+9z^2y^4=cc$
$z^6-3z^4yy+3z^2y^4-y^6=b^3$

$9z^4yy+6z^2y^4+y^6=cc-b^3$
$y^3+3yzz=\sqrt{cc-b^3}$

$z^3+3yzz+3yyz+y^3=c+\sqrt{cc-b^3}$

$z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{cc-b^3}}$ miſe du premier

$z-y=\frac{b}{\sqrt[3]{c+\sqrt{cc-b^3}}}$ miſe du ſecond

$$z+y=\sqrt[3]{472\tfrac{1}{2}+\sqrt{223256\tfrac{1}{4}}-157464}=\sqrt[3]{472\tfrac{1}{2}+256\tfrac{1}{2}}=\sqrt{729}=9$$

$$z-y=\frac{54}{\sqrt[3]{472\tfrac{1}{2}+\sqrt{223256\tfrac{1}{4}}-157464}}=\frac{54}{\sqrt[3]{729}}=\frac{54}{9}=6$$

D'autre part, faiſant les cubes des miſes, & les ajoutant enſemble, on auroit $2z^3+6zyy=2c$ qui eſt la ſeconde condition du problême; & diviſant par 2, $z^3+3zyy=c$.

Et comparant enſemble l'équation $zz-yy=b$ de la premiere condition, & l'équation $z^3+3zyy=c$ tirée de la ſeconde, on éleveroit la premiere au cube & la ſeconde au quarré, & l'on auroit $z^6-3z^4yy+3z^2y^4-y^6=b^3$ & $z^6+6z^4yy+9z^2y=cc$; & retranchant la premiere de la ſeconde, le reſte $9z^4yy+6z^2y^4+y^6=cc-b^3$ ſeroit un quarré parfait: donc la racine quarrée ſeroit $y^3+3yzz=\sqrt{cc-b^3}$.

Et ajoutant cette équation avec l'équation $z^3+3zyy=c$ tirée de la ſeconde condition, on auroit $z^3+3yzz+3zyy+y^3=c+\sqrt{cc-b^3}$: donc le premier membre ſeroit un cube parfait, & tirant la racine cubique, on auroit $z+y=\sqrt[3]{c+\sqrt{cc-b^3}}$, qui eſt la premiere miſe.

Et ſi l'on diviſoit l'équation $zz-yy=b$ par celle-ci, on auroit $z-y=\frac{b}{\sqrt[3]{c+\sqrt{cc-b^3}}}$, qui eſt la ſeconde miſe, & ſubſtituant les valeurs des lettres connuës $z+y=9$, & $z-y=6$.

Cette méthode eſt excellente pour éviter les équations compoſées, qu'on ne manqueroit pas de trouver ſi on tentoit la réſolution par une autre voïe. Nous dirons bien-tôt ce qu'on entend par le mot d'*équation compoſée*. Au reſte, il arrive quelquefois qu'en comparant les deux équations qui proviennent des conditions du problême, il ſuffit d'en retrancher l'une de l'autre, ou d'ajouter l'une à l'autre pour en trouver la ſolution ſans être obligé de les élever à de plus hauts degrés.

Suppoſons, par exemple, qu'on nous eût dit que la ſomme des deux miſes multipliée par la ſomme de leurs quarrés faiſoit 1755, & que la différence de ces mêmes miſes multipliée par la différence de leurs quarrés faiſoit 135, & que tout le reſte nous eût été inconnu, nous aurions appellé $2z$ la ſomme inconnuë des miſes, & $2y$ leur différence; ainſi la grande auroit été $z+y$ & la petite $z-y$, & leurs quarrés $zz+2zy+yy$, & $zz-2zy+yy$; ajoutant ces quarrés enſemble, & les multipliant par $2z$, ſomme des miſes, le produit auroit été $4z^3+4zyy$; & par la premiere condition du problême ce produit eſt égal à 1755 que nous aurions appellé $4b$

pour éviter les fractions; ainſi nous aurions eu $4z^3+4zyy=4b$, & diviſant par 4, $z^3+zyy=b$.

D'autre part retranchant le ſecond quarré du premier, leur différence auroit été $4zy$, laquelle multipliée par $2y$, différence des miſes, auroit fait $8zyy$; & cõme par la ſeconde condition du problême ce produit doit être égal à 135, nous aurions $135=8c$ pour éviter les fractions, & nous aurions eu $8zyy=8c$, & diviſant par 8, $zyy=c$.

Comparant donc cette équation avec l'équation $z^3+zyy=b$, tirée de la premiere condition, & retranchant l'une de l'autre, nous aurions eu $z^3=b-c$; & tirant la racine cubique $z=\sqrt[3]{b-c}$, & mettant la valeur des lettres connuës $z=7\frac{1}{2}$.

$zz+2zy+yy$ $\quad$ $zz-2zy+yy$
$zz-2zy+yy$

$2zz+2yy$ ſomme des quarrés
$2z$

$4z^3+4zyy$ ſomme des quarrés par la ſomme des miſes

$4z^3+4zyy=4b$ premiere condition du problême
$z^3+zyy=b$

$zz+2zy+yy$
$zz-2zy+yy$

$4zy$ différence des quarrés
$2y$

$8zyy$ différence des quarrés par la différence des miſes

$8zyy=8c$ ſeconde condition du problême
$zyy=c$

$z^3+zyy=b$
$zyy=c$
$z^3=b-c$
$z=\sqrt[3]{b-c}$

$z=\sqrt[3]{438\frac{3}{4}-16\frac{7}{8}}=\sqrt[3]{421\frac{7}{8}}=\sqrt[3]{\frac{3376}{8}}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$

Et pour avoir la valeur de y, nous aurions ſubſtitué la valeur $7\frac{1}{2}$ de z dans l'équation $zyy=c$, & nous aurions eu $7\frac{1}{2}yy=c$; & diviſant par $7\frac{1}{2}$, $yy=\frac{c}{7\frac{1}{2}}$, & tirant la racine quarrée $y=$

$zyy=c$
$7\frac{1}{2}yy=c$
$yy=\frac{c}{7\frac{1}{2}}$
$y=\sqrt{\frac{c}{7\frac{1}{2}}}$

$y=\sqrt{\frac{16\frac{7}{8}}{7\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{16\frac{7}{8}}{7\frac{4}{8}}}=\sqrt{\frac{135}{60}}=\sqrt{2\frac{1}{4}}=1\frac{1}{2}$

$z+y=7\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=9$ $\quad$ $z-y=7\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}=6$

$\sqrt{\frac{c}{7\frac{1}{2}}}$ & mettant la valeur connuë de c, $y=1\frac{1}{2}$; & par conſequent la premiere miſe auroit été $z+y=9$, & la ſeconde $z-y=6$.

J'omets pluſieurs autres queſtions qu'on pourroit réſoudre avec la même facilité par cette méthode, en emploïant le principe établi dans le premier exemple.

DOUZIE'ME EXEMPLE.

Trois particuliers ont partagé inégalement la ſomme de 15 livres, & l'on ſait que le $\frac{1}{3}$ de la part du premier, plus les $\frac{3}{4}$ de celle du ſecond, eſt égal aux $\frac{4}{5}$ de celle du troiſiéme, plus le $\frac{1}{4}$ de celle du ſecond; & de même que les $\frac{4}{5}$ de celle du troiſiéme, plus le $\frac{1}{4}$ de celle du ſecond, ſont égaux aux $\frac{2}{3}$ de celle du premier, plus le $\frac{1}{5}$ de celle du troiſiéme: quelles ſont les parts de chacun?

J'appelle la part du premier x, celle du ſecond y, & celle du troiſiéme z. Par la premiere condition j'ai $\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}y=\frac{4}{5}z+\frac{1}{4}y$; mais pour éviter les fractions, je réduis tout au dénominateur commun 60, & j'ai $\frac{20}{60}x+\frac{45}{60}y=\frac{48}{60}z+\frac{15}{60}y$; & multipliant tout par 60, $20x+45y=48z+15y$; & retranchant $15y$ & $20z$, j'ai $30y=48z-20x$; & diviſant par 2, $15y=24z-10x$ qui eſt une valeur de $15y$.

$\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}y=\frac{4}{5}z+\frac{1}{4}y$ premiere condition.
$20x+45y=48z+15y$
$20x+30y=48z$
$30y=48z-20x$
$15y=24z-10x$ valeur de $15y$

$\frac{4}{5}z+\frac{1}{4}y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}x$
$48z+15y=40x+12x$
$15y=40x-36x$ 2e valeur de $15y$

$24z-10x=40x-36x$
$60x=50x$
$6x=5z$

$\frac{6}{5}x=x$.

Par la ſeconde condition du problême, j'ai $\frac{4}{5}x+\frac{1}{4}y=\frac{2}{3}z+\frac{1}{5}x$; & ôtant les fractions comme ci-deſſus, j'ai $48x+15y=40z+12x$; & retranchant $48x$, j'ai $15y=40z-36x$, ſeconde valeur de $15y$.

Je compare ces deux valeurs enſemble, & ajoutant de part & d'autre $36x$ & $10z$, j'ai $60x=50z$; & diviſant par 10, j'ai $6x=5z$; mettant donc la valeur $6x$ de $5z$ dans la premiere valeur de $15y$, j'ai $15y=12x$; & diviſant par 3, $5y=4x$, & diviſant encore par 5, $y=\frac{4}{5}x$.

$15y=24x-10z$
$15y=24x-12x$
$15y=12x$
$5y=4x$
$y=\frac{4}{5}x$.

Diviſant de même l'équation $6x=5z$ par 5, j'ai $\frac{6}{5}x=z$; ainſi la premiere part z eſt $\frac{6}{5}x$, la ſeconde y $\frac{4}{5}x$, & la troiſiéme eſt x; ajoutant donc ces trois parts enſemble, leur ſomme doit faire 15: donc $x+\frac{4}{5}x+\frac{6}{5}x=15$ ou $\frac{5}{5}x+\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}x=15$; & corrigeant l'expreſſion $3x=15$, & diviſant par 3, $x=5$ qui eſt la part du troiſiéme: donc la part du premier $z=6$, & celle du ſecond $y=4$, & ces trois parts font enſemble 15; & l'on trouvera aiſément que ces nombres rempliſſent les deux autres conditions du problême.

$$x+\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}x=15$$
$$\frac{5}{5}x+\frac{6}{5}x+\frac{4}{5}x=15$$
$$\frac{15}{5}x=15$$
$$3x=15$$
$$x=5 \text{ part du troiſiéme}$$
$$y=\frac{4}{5}x=\frac{20}{5}=4 \text{ part du ſecond}$$
$$z=\frac{6}{5}x=\frac{30}{5}=6 \text{ part du premier}$$

On doit toujours obſerver, en cherchant les valeurs des inconnuës, de diviſer de telle façon qu'il n'y ait point de fractions, juſqu'à ce qu'on ne puiſſe plus faire autrement; car on évite par-là beaucoup d'embarras dans le calcul. Au reſte, on eſt libre de réduire tout à la ſeule inconnuë x, comme j'ai fait ici, ou à la ſeule inconnuë z, ou à la ſeule inconnuë y; & pourvû qu'on trouve la ſolution, peu importe par laquelle des trois on l'a cherchée; cependant comme la ſolution eſt quelquefois plus aiſée à trouver par une voye que par une autre, il eſt bon d'y faire attention, & l'on peut aiſément la découvrir par la nature même des équations.

TREIZIE'ME EXEMPLE.

Il faut partager 238 livres à quatre perſonnes, enſorte que le $\frac{2}{3}$ de la part du premier, plus les $\frac{3}{4}$ de celle du ſecond ſoient égaux aux $\frac{4}{5}$ de celle du troiſiéme, plus le $\frac{1}{4}$ de celle du ſecond; de même que les $\frac{4}{5}$ de celle du troiſiéme, plus $\frac{1}{4}$ de celle du ſecond ſoient égaux au $\frac{1}{5}$ de celle du troiſiéme, plus $\frac{1}{6}$ de celle du quatriéme; & enfin, que le $\frac{1}{7}$ de celle du troiſiéme, plus les $\frac{1}{6}$ de celle du quatriéme ſoient égaux au $\frac{1}{6}$ de celle du quatriéme, plus $\frac{2}{3}$ de celle du premier.

J'appelle z la premiere part y, la ſeconde, x la troiſiéme & v la quatriéme; & ainſi les trois équations ſont telles qu'on les voit à la page ſuivante.

Je réduis toutes les fractions au dénominateur commun 60 que je n'écris point, ce qui eſt la même choſe que ſi je multiplois tout par 60.

Je

Je prens l'équation de la premiere condition, & retranchant $15y$ & $20z$, j'ai $30y = 48x - 20z$, qui diviſe par 2 donne $15y = 24x - 10z$, premiere valeur de $15y$.

Je prens l'équation de la ſeconde condition, & retranchant $48x$, j'ai $15y = -36x + 50v$ ſeconde valeur de $15y$.

Je compare ces deux valeurs enſemble, & ajoutant $36x$ & $10z$, j'ai $60x = 50v + 10z$, & diviſant par 10, $6x = 5v + z$, premiere valeur de $6x$.

Je prens l'équation de la troiſiéme condition, & retranchant $50v$, j'ai $12x = -40v + 40z$; & diviſant par 2, $6x = -20v + 20z$, ſeconde valeur de $6x$.

$$\frac{1}{3}z + \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}v = \frac{1}{6}v + \frac{1}{3}z$$

$$20z + 45y = 48x + 15y = 12x + 50v = 10v + 40z$$

$20z + 45y = 48x + 15y$ 1e condition
$30y = 48x - 20z$
$15y = 24x - 10z$ 1e valeur de $15y$

$48x + 15y = 12x + 50v$ 2e condition
$15y = -36x + 50v$ 2e val. de $15y$

$24x - 10z = -36x + 50v$
$60x = 50v + 10z$
$6x = 5v + z$ 1e valeur de $6x$

$12x + 50v = 10v + 40z$ 3e condition
$12x = -40v + 40z$
$6x = -20v + 20z$ 2e val. de $6x$

$5v + z = 20v + 20z$
$25v = 19z$
$v = \frac{19}{25}z$ valeur de v

$6x = 5v + z$ 1e valeur de $6x$
$6x = \frac{95}{25}z + z$
$6x = \frac{120}{25}z$
$x = \frac{20}{25}z$ valeur de x

$15y = 24x - 10z$ 1e valeur de $15y$
$15y = \frac{480}{25}z - 10z$
$15y = \frac{230}{25}z$
$y = \frac{230}{375}z$ valeur de y

Je compare ces deux équations enſemble, retranchant z & ajoutant $20v$, j'ai $25v = 19z$; & diviſant par 25, j'ai $v = \frac{19}{25}z$ valeur de v.

Je mets cette valeur de v dans la premiere valeur de $6x$, & j'ai $6x = \frac{120}{25}z$; & diviſant par 6, $x = \frac{20}{25}z$, valeur de x.

Je mets cette valeur de x dans la premiere valeur de $15y$, & j'ai $15y = \frac{230}{25}z$; & diviſant par 15, j'ai $y = \frac{230}{375}z$; ainſi les quatre parts

ſont z, $\frac{330}{375}z$, $\frac{20}{25}z$ & $\frac{19}{25}z$, où il n'y a plus qu'une ſeule inconnuë z; & réduiſant les fractions au même dénominateur 375, & l'entier z en fraction, j'ai $\frac{375}{375}z+\frac{330}{375}z+\frac{300}{375}z+\frac{285}{375}z$ pour l'expreſſion des quatre parts; & comme ces quatre parts ſont égales à 238, j'ai l'équation que l'on voit ici.

Et corrigeant l'expreſſion, j'ai $\frac{1190}{375}z=238$; & multipliant par 375, puis diviſant par 1190, j'ai $z=75$, qui eſt la part du premier; & mettant cette valeur de z dans les valeurs de y, x & v, j'ai $y=46$, $x=60$. & $v=57$; & ces quatre parts ajoutées enſemble font en effet 238; & l'on peut voir aiſément qu'elles rempliſſent les autres conditions du problême.

$$\frac{375}{375}z+\frac{330}{375}z+\frac{300}{375}z+\frac{285}{375}z=238.$$

$$\frac{1190}{375}z=238$$

$$1190z=89250$$

$$z=\frac{89250}{1190}=75 \quad \text{part du premier}$$

$$y=\frac{230}{375}z$$

$$y=\frac{17250}{375}=46. \quad \text{part du ſecond}$$

$$x=\frac{20}{25}z$$

$$x=\frac{1500}{25}=60. \quad \text{part du troiſiéme}$$

$$v=\frac{19}{25}z$$

$$v=\frac{1425}{25}=57 \quad \text{part du quatriéme}$$

QUATORZIE'ME EXEMPLE.

Il y a trois bources dans leſquelles ſont trois différentes ſommes, qui font en tout 2940 *livres; la ſomme de la premiere, plus le* $\frac{1}{3}$ *des deux autres, eſt égale à la ſomme de la ſeconde, plus le* $\frac{1}{4}$ *de la premiere & troiſiéme; & la ſeconde, plus le* $\frac{1}{4}$ *de la premiere & troiſiéme, eſt égale à la troiſiéme, plus le* $\frac{1}{5}$ *de la premiere & ſeconde: on demande combien il y a dans chaque bource?*

J'appelle la ſomme de la premiere bource z, celle de la ſeconde y & celle de la troiſiéme x; ainſi j'ai les deux équatiõs ſuivãtes qui expriment les conditions: je réduis tout en fraction, dont le dénominateur ſoit 60, que je

$$z+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}x=y+\tfrac{1}{4}z+\tfrac{1}{4}x=x+\tfrac{1}{5}z+\tfrac{1}{5}y.$$

$$60z+20y+20x=60y+15z+15x=60x+12z+12y.$$

$$60z+20y+20x=60y+15z+15x \quad 1^{e} \text{ condition.}$$

$$5x=40y+45z.$$

$$x=8y-9z. \quad \text{valeur de } x.$$

n'écris point, ce qui eſt le même que ſi je multipliois tout par 60.

Je prens l'equation de la premiere condition, & retranchant $15x$, $60z$ & $20y$, j'ai $5x=40y-45z$; & diviſant par 5, j'ai $x=8y-9z$, valeur de x.

Je prens l'équation de la ſeconde condition, j'en retranche $12z$, $12y$ & $15x$, & j'ai $48y+3z=45x$; & diviſant par 3, j'ai $16y+z=15x$, valeur de $15x$.

$60y+15z+15x=60x+12z+12y$ 2e condition
$48y+3z+15x=60x$
$48y+3z=45x$
$16y+z=15x$ premiere valeur de $15x$
$x=8y-9z$ valeur de x déja trouvée

Je prens la valeur trouvée $x=8y-9z$; & la multipliant par 15, j'ai $15x=120y+135z$, ſeconde valeur de $15x$.

$15x=120y-135z$ ſeconde valeur de $15x$
$16y+z=120y-135z$
$136z=104y$
$34z=26y$
$\frac{34}{26}z=y$ valeur de y
$x=8y-9z$
$x=\frac{272}{25}z-9z$
$x=\frac{272}{26}z-\frac{234}{26}z$
$x=\frac{38}{26}z$ valeur de x

Et comparant ces deux valeurs enſemble, j'ajoute $135z$; & je retranche $16y$, & j'ai $136z=104y$; & diviſant par 4, j'ai $34z=26y$; & diviſant par 26, j'ai $\frac{34}{26}z=y$, valeur de y.

Je mets cette valeur de y dans la valeur de x déja trouvée, & j'ai $x=\frac{38}{26}z$; ainſi les trois ſommes ſont z, $\frac{34z}{26}$, $\frac{38z}{26}$, où il ne ſe trouve plus que la ſeule inconnuë z; & comme ces trois ſommes ſont enſemble 2940 livres, j'ai l'équation ſuivante.

$$z+\frac{34z}{26}+\frac{38z}{26}=2940$$

Et réduiſant z en fraction, & corrigeant l'expreſſion, j'ai $\frac{98z}{26}=2940$; & multipliant par 26, puis diviſãt par 98, j'ai $z=780$, ſomme de la premiere bource.

$$\frac{26}{26}z+\frac{34z}{26}+\frac{38}{26}z=2940$$
$$\frac{98}{26}z=2940$$
$$98z=76440$$

Et mettant cette valeur de z dans les valeurs de y & x,

$z=\frac{76440}{98}=780$ ſomme de la premiere bource
$y=\frac{34z}{26}=\frac{26520}{26}=1020$ ſomme de la ſeconde
$x=\frac{38}{26}z=\frac{29640}{26}=1140$ ſomme de la troiſiéme

je trouve $y=1020$ & $x=1140$, & ces trois ſommes ſont en effet 2940 livres; & l'on peut connoître aiſément qu'elles rempliſſent les autres conditions du problême.

QUINZIE'ME EXEMPLE.

Un homme riche voulant faire une gratification de 317 liv. à quatre de ſes domeſtiques, a fait quatre tas, dont le premier, plus le $\frac{1}{3}$ des trois autres, eſt égal au ſecond, plus le $\frac{1}{4}$ du premier & des deux derniers; & le ſecond, plus le $\frac{1}{4}$ du premier & des deux derniers, eſt égal au troiſiéme, plus le $\frac{1}{5}$ des deux premiers & du dernier; & le troiſiéme, plus le $\frac{1}{5}$ des deux premiers & du dernier, eſt égal au quatriéme, plus le $\frac{1}{6}$ des trois premiers; & il propoſe à ſes domeſtiques de deviner ce qu'il y a dans chaque tas?

J'appelle le premier tas z, le ſecond y, le troiſiéme x, & le quatriéme v; & les trois conditions du problême s'expriment par les trois équations ſuivantes que je réduis à un dénominateur commun 60, lequel je n'écris pas, ce qui eſt la même choſe que ſi je multipliois tout par 60.

$$z+\tfrac{1}{3}y+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{3}v=y+\tfrac{1}{4}z+\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{4}v=x+\tfrac{1}{5}z+\tfrac{1}{5}y+\tfrac{1}{5}v=v+\tfrac{1}{6}z+\tfrac{1}{6}y+\tfrac{1}{6}x$$

$$60z+20y+20x+20v=60y+15z+15x+15v=60x+12z+12y+12v=60v+10z+10y+10x$$

$60z+20y+20x+20v=60y+15z+15x+15v$ premiere condition

$5v=40y-45z-5x$

$v=8y-9z-x$ premiere valeur de v

$60y+15z+15x-15v=60x+12z+12y+12v$ ſeconde condition

$3v=45x-48y-3z$

$v=15x-16y-z$ ſeconde valeur de v

$60x+12z+12y+12v=60v+10z+10y+10x$ troiſiéme condition

$48v=50x+2z+2y$

$24v=25x+z+y$ troiſiéme valeur de v par 24

$8y-9z-x=15x-16y-z$

$24y-16x=8z$

$3y-2x=z$ premiere valeur de z

$192y-216z-24x=25x+z+y$

$191y-49x=217z$ ſeconde valeur de z par 217

$651y-434x=191y-49x$

$460y=385x$

$92y=77x$

$\frac{92y}{77}=x$ valeur de x

Comme il y a trois équations, je prens trois valeurs de v; premierement, par l'équation de la premiere condition, j'ai $v=8y-9z-x$, premiere valeur de v.

Et par l'équation de la seconde condition, j'ai $v=15x-16y-z$, seconde valeur de v.

Et par l'équation de la troisiéme condition, j'ai $24v=25x+z+y$ qui est une troisiéme valeur de v, mais multipliée par 24.

Présentement, de ces trois valeurs de v, je tire deux valeurs de z, & d'abord les deux premieres valeurs de v me donnent $z=3y-2x$, premiere valeur de z; & pour avoir la seconde, je multiplie la premiere valeur de v par 24, parce que la troisiéme est multipliée par 24, & j'ai $24v=192y-216z-24x$; comparant donc cette valeur avec la troisiéme, j'en tire une seconde valeur de z, mais multipliée par 217, c'est pourquoi je multiplie sa premiere valeur par 217; & les comparant ensuite ensemble, j'en tire une valeur de x qui est $x=\frac{92}{77}y$.

Mettant donc cette valeur de x dans la premiere valeur de z, j'ai $z=\frac{47}{77}y$. Et mettant les valeurs de x & de z dans la premiere valeur de v, je trouve $v=\frac{101}{77}y$.

$z=3y-2x$
$z=3y-\frac{184}{77}y$
$z=\frac{231}{77}y-\frac{184}{77}y$
$z=\frac{47}{77}y$ valeur de z

Mes quatre sommes sont donc y, $\frac{47}{77}y$, $\frac{92}{77}y$ & $\frac{101}{77}y$, & comme ces quatre sommes font 317, j'ai l'équation suivante, en réduisant y en fraction; & corrigeant l'expression, j'ai $\frac{317y}{77}=317$, & multipliant par 77, puis divisant par 317, j'ai $y=77$; & substituant cette valeur de y dans celles de z, x & y, je trouve que le premier tas contient 47 livres, le second 77, le troisiéme 92, & le quatriéme 101, & ces quatre ensemble font 317; & il est aisé de connoître s'ils rempliſſent toutes les conditions du problême.

$v=8y-9z-x$
$v=8y-\frac{423}{77}y-\frac{92}{77}y$
$v=\frac{616}{77}y-\frac{515}{77}y$
$v=\frac{101}{77}y$ valeur de v

$\frac{47}{77}y+\frac{77}{77}y+\frac{92}{77}y+\frac{101}{77}y=317$
$\frac{317}{77}y=317$

$y=77$ valeur du second tas
$z=\frac{47}{77}y=47$ valeur du premier
$x=\frac{92y}{77}=92$ valeur du troisiéme
$v=\frac{101y}{77}=101$ valeur du quatriéme

Il est bon d'observer ici la méthode que nous avons tenuë pour

réſoudre cette queſtion. Comme il y avoit trois équations dans ce problême, chacune deſquelles contenoit les quatre inconnuës, nous avons pris d'abord trois valeurs d'une même inconnuë, laquelle a été v, & pouvoit être également une autre, car il n'importe par laquelle on commence; enſuite nous avons laiſſé les trois équations du problême; & nous attachant uniquement aux trois valeurs de v, nous en avons tiré deux valeurs d'une autre inconnuë z; & laiſſant de même les valeurs de v, pour ne nous attacher qu'à celle de z, nous avons tiré de celle-ci une valeur d'une troiſiéme inconnuë x, & comme le problême ne contient que quatre inconnuës, nous nous ſommes arrêtés là; enſuite mettant la valeur de x dans celle de z, & celle de x & de z, dans celle de v, nous n'avons plus eu qu'une ſeule inconnuë y, & le problême a été facilement réſolu; d'où l'on voit qu'on auroit pû le réſoudre de même s'il y avoit eu cinq, ſix, ſept inconnuës, &c. en ſe ſervant toujours de la même méthode.

SEIZIE'ME EXEMPLE.

On propoſe de trouver trois nombres, dont les deux premiers, joints enſemble & multipliés par le troiſiéme, font 35; le premier & le troiſiéme, joints enſemble & multipliés par le ſecond, font 32; & le ſecond & le troiſiéme, joints enſemble & multipliés par le premier, font 27.

J'appelle d'abord le premier z, le ſecond y, & le troiſiéme x; ainſi par la premiere condition, j'ai $zx+yx=a$; & diviſant par x, j'ai $z+y=\frac{x}{a}$; donc $\frac{x}{a}$ eſt la ſomme des deux premiers; & ſi j'appelle le premier $\frac{v}{x}$, ce que je puis faire, puiſque la lettre v pouvant ſignifier toute ſorte de nombre, ſoit entier, ſoit rompu, il eſt sûr qu'il s'en trouvera quelqu'un, qui diviſé par x, quel que puiſſe être x, ſera égal au premier nombre; ſi, dis-je, j'appelle le premier $\frac{v}{x}$, le ſecond ſera $\frac{a}{x}-\frac{v}{x}$, c'eſt-à-dire, la ſomme des deux premiers, moins le premier; ainſi les trois nombres ſeront $\frac{v}{x}$, $\frac{a}{x}-\frac{v}{x}$, & x, où il ne ſe trouvera plus qu'une inconnuë x, car la lettre v eſt indéterminée; ainſi faiſant donc les trois équations du problême, nous aurons $a=a$ pour la premiere, $\frac{av}{xx}+\frac{ax}{x}-\frac{vv}{xx}-\frac{vx}{x}=b$ pour la ſeconde; & réduiſant les termes du premier membre au

même dénominateur xx, nous aurons $\frac{av+axx-vv-vxx}{xx}=b$; & pour la troiſiéme équation, nous aurons $\frac{av-vv+xxv}{xx}=c$; & retranchant la troiſiéme équation, de la ſeconde réduite au même dénominateur, nous aurons $\frac{axx-2vxx}{xx}=b-c$; & corrigeant l'expreſſion $a-2v=b-c$, & tranſpoſant les termes d'un membre à l'autre, c'eſt-à-dire, ajoutant $2v$ & c; & retranchant b, nous aurons $a-b+c=2v$; & diviſant par 2, nous aurons $\frac{a-b+c}{2}=v$, c'eſt-à-dire, la valeur de la grandeur indéterminée v; & mettant la valeur des lettres connuës, nous aurons $v=15$; & mettant cette valeur de v dans l'équation $\frac{av-vv+vxx}{xx}=c$, nous aurons $\frac{154-225}{xx}+15xx=c$; & multipliant par xx $154-225+15xxc=xx$, & retranchant $15xx$, nous aurons $154-225=cxx-15xx$, & diviſant par $c-15$, nous aurons $\frac{154-225}{c-15}=xx$; & tirant la racine quarrée, nous aurons $x=\sqrt{\frac{154-225}{c-15}}$; & mettant la valeur des lettres connuës a & c, nous aurons $x=5$; & par conſéquent le premier nombre $\frac{v}{x}=3$, le ſecond $\frac{a}{x}-\frac{v}{x}=4$, & le troiſiéme $x=5$.

$\frac{v}{x}+\frac{a}{x}-\frac{v}{x}$ ou $\frac{a}{x}$

$\frac{x}{xa}=a$ 1e condition

$a=a$

$\frac{v}{x}+x$

$\frac{a}{x}-\frac{v}{x}$

$\frac{av}{xx}+\frac{ax}{x}-\frac{vv}{xx}-\frac{vx}{x}=b$ ſeconde condition

$\frac{av+axx-vv-vxx}{xx}=b$

$\frac{a}{x}-\frac{v}{x}+\frac{xx}{x}$

$\frac{v}{x}$

$\frac{av}{xx}-\frac{vv}{xx}+\frac{xxv}{xx}=c$ troiſiéme condition

$\frac{axx-2vxx=b-c}{xx}$

$a-2v=b-c$

$35=a$

$32=b$

$27=c$

La lettre v que nous avons introduite pour la réſolution de ce problême, s'appelle indéterminée, parce qu'elle n'eſt point déterminée par les conditions du problême, & qu'elle n'eſt grande ou petite, nombre entier ou fraction que ſelon le rapport qu'elle peut avoir avec les grandeurs que contient le problême; cependant cette lettre eſt ordinairemẽt celle qu'on connoît la premiere, & c'eſt par ſon moïen qu'on parvient à la connoiſſance des inconnuës que l'on cherche. L'uſage des grandeurs indéterminées eſt très-fréquent dans la réſolution des problêmes indéterminés, comme on verra ci-après.

$$a-b+c=2v$$

$$\frac{a-b+c}{2}=v$$

$$\frac{35-32+27}{2}=v=\frac{30}{2}=15$$

$$\frac{av-vv+vxx}{xx}=c$$

$$\frac{15a-225+15xx}{xx}=c$$

$$15a-225+15xx=cxx$$

$$15a-225=cxx-15xx$$

$$\frac{15a-225}{c-15}=xx$$

$$x=\sqrt{\frac{15a-225}{c-15}}$$

$$x=\sqrt{\frac{525-225}{27-15}}=\sqrt{\frac{300}{12}}=\sqrt{25}=5$$

$\frac{v}{x}=\frac{15}{5}=3$ premier nombre

$\frac{a}{x}-\frac{v}{x}=\frac{35-15}{5}=\frac{20}{6}=4$ ſecond nombre

$x=5$ troiſiéme nombre

Je pourrois rapporter ici grand nombre d'autres exemples de problêmes déterminés; mais comme la ſuite de cet Ouvrage nous donnera ſouvent occaſion de réſoudre de ſemblables queſtions, il me ſuffit pour le préſent d'avoir montré les principales méthodes qu'on doit emploïer pour y parvenir.

Tous les problêmes que nous venons de réſoudre s'appellent *problêmes déterminés ſimples* ou *lineaires*, parce que l'inconnuë a toujours été au premier degré, ou du moins que nous l'avons rabaiſſée à ce degré, ſoit par la diviſion ou par l'extraction des racines; mais lorſqu'il ſe trouve que l'inconnuë a des degrés différens dans les termes d'une même équation, telle qu'eſt, par exemple, l'équation

l'équation $xx-ax=b$, où l'inconnuë x ſe trouve du ſecond degré dans le premier terme du premier membre, & du premier dans le ſecond; quand, dis-je, cela arrive & qu'on ne peut pas rabaiſſer cette inconnuë au premier degré, ſoit par la diviſion, ſoit par l'extraction des racines, comme nous avons fait juſqu'ici, alors l'équation s'appelle compoſée, & prend le nom du plus haut degré où ſe trouve l'inconnuë; ainſi l'équation $xx-ax=b$ eſt du ſecond degré, l'équation $x^3-6x^2-4x=bcd$ eſt du troiſiéme, & de même des autres.

Nous parlerons ailleurs de la maniere de réſoudre les équations du ſecond & du troiſiéme degré dont la connoiſſance eſt plus que ſuffiſante pour les perſonnes qui ne veulent pas pouſſer leur étude juſqu'à cette partie des Mathématiques qu'on appelle *Géométrie ſublime* & tranſcendantale. Mais en attendant, on ne ſera pas fâché de trouver ici une méthode générale pour les équations du ſecond degré, d'autant plus que celles-ci ſe rencontrent très-ſouvent lorſqu'on s'attache à la réſolution des problêmes par la voïe de l'Analyſe.

Méthode générale pour réſoudre les équations du ſecond degré.

XXV. Cette méthode dépend d'un principe qu'il eſt bon d'expliquer; ſi l'on prend un binome $x+a$ dont le premier terme x ſoit une grandeur inconnuë & le ſecond a une grandeur connuë, & qu'on éleve ce binome à la ſeconde puiſſance, ſon quarré $xx+2ax+aa$ contiendra trois termes, dont le premier ſera le quarré de la grandeur inconnuë, le troiſiéme ſera le quarré de la grandeur connuë, & le ſecond ſera un produit de la grandeur inconnuë, par le double $2a$ de la grandeur connuë. Nous appellerons ce double $2a$ *coefficient* du ſecond terme; & en général, nous donnerons ce nom à toute grandeur connuë qui multipliera une inconnuë dans quelque terme que ce ſoit d'une équation. Or il eſt évident que ſi l'on prend la moitié a du coefficient $2a$ du ſecond terme, cette moitié ſera la racine du troiſiéme terme aa; d'où il ſuit que ſi on avoit retranché le troiſiéme terme du quarré du binome, on trouveroit ce troiſiéme terme en prenant la moitié a du coefficient du ſecond terme, & élevant cette moitié au quarré aa.

Cela ſuppoſé, il eſt fort facile de réſoudre les équations du ſecond degré, ainſi que nous allons voir dans les exemples ſuivans.

PREMIER EXEMPLE.

Un pere voulant éprouver ſi ſon fils fait du progrès dans les Mathématiques, met un certain nombre d'écus dans ſa main, & promet de les lui donner s'il le devine, en lui diſant que le quarré de ce nombre, plus dix fois ce même nombre, fait 39; le fils, après avoir fait un petit calcul, trouve que ſon pere a trois écus dans ſa main: & l'on demande comment il a pû le découvrir?

J'appelle x le nombre d'écus, ſon quarré eſt donc xx; & par la condition du problême, j'ai l'équation $xx+10x=39$: or en examinant cette équation, je trouve qu'elle eſt du ſecond degré, & que je puis aiſément faire enſorte que ſon premier terme ſoit un quarré parfait en lui ajoutant le quarré 25 de la moitié 5 du coefficient 10 du ſecond terme; j'ajoute donc de part & d'autre 25, & j'ai $xx+10x+25=64$; & tirant la racine quarrée de part & d'autre, j'ai $x+5=8$; & retranchant 5 de part & d'autre, j'ai $x=3$ qui eſt le nombre cherché.

$$\begin{aligned} xx+10x&=39\\ xx+10x+25&=39+25\\ xx+10x+25&=64\\ x+5&=8\\ x&=8-5=3 \end{aligned}$$

SECOND EXEMPLE.

Deux particuliers ont un certain nombre d'écus; le premier en a 10, & ſi l'on multiplie le nombre du premier par celui du ſecond, & qu'on ajoute au produit les quarrés des deux nombres, la ſomme eſt 124: quel eſt le nombre du ſecond?

J'appelle c le nombre 10 du premier, x celui du ſecond, & b la ſomme du produit & des quarrés; le quarré du premier ſera donc cc, celui du ſecond xx, le produit du premier par le ſecond cx, & par la condition du problême j'aurai l'équation $cx+xx+cc=b$; & retranchant cc de part & d'autre, j'aurai $cx+xx=b-cc$; & je vois par le premier membre de cette équation, que ſi je prens la moitié du coefficient, c'eſt-à-

$$\begin{aligned} cx+xx+cc&=b\\ cx+xx&=b-cc\\ xx+cx+\tfrac{1}{4}cc&=b-cc+\tfrac{1}{4}cc\\ x+\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{b-cc+\tfrac{1}{4}cc}\\ x&=-\tfrac{1}{2}c+\sqrt{b-cc+\tfrac{1}{4}cc}=-\tfrac{1}{2}c+\sqrt{b-\tfrac{1}{4}cc} \end{aligned}$$

dire $\frac{1}{2}c$, & qu'en aïant fait le quarré $\frac{1}{4}cc$, j'ajoute ce quarré de part & d'autre, le premier membre ſera un quarré parfait : faiſant donc cette addition, & tirant la racine quarrée, j'ai $x+\frac{1}{2}c=\sqrt{b-\frac{1}{4}cc}$; & retranchant $\frac{1}{2}c$ de part & d'autre, j'ai $x=-\frac{1}{2}c+\sqrt{b-\frac{3}{4}cc}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $x=2$; ainſi la ſeconde perſonne a 2 écus : & en effet, 10 multiplié par 2 fait 20, & ſi on ajoute à 20 le quarré 100 du premier nombre & le quarré 4 du ſecond, la ſomme eſt 124, ainſi qu'il eſt propoſé.

$$x=-5+\sqrt{124-75}$$
$$x=-5+\sqrt{49}=-5+7=2$$

TROISIE'ME EXEMPLE.

On a enfermé dans trois ſacs trois différens nombres d'écus ; le premier en contient 37, le ſecond en a 23 plus que le troiſiéme ; & ſi l'on fait les quarrés des trois nombres, celui du premier ſera égal à celui des deux autres : combien y a-t-il dans le ſecond & dans le troiſiéme ſac ?

J'appelle a le nombre 37 du premier ſac, b la différence 23 du premier & du troiſiéme, & z le nombre du troiſiéme ; par conſéquent le nombre du ſecond ſera $z+b$: ainſi le quarré du premier eſt aa, celui du troiſiéme zz, & celui du ſecond $zz+2bz+bb$, & par la condition du problême, j'ai l'équation $2zz+2bz+bb=aa$; & retranchant bb de part & d'autre, j'ai $2zz+2bz=aa-bb$; & diviſant par 2, j'ai $zz+bz=\frac{aa-bb}{2}$ qui eſt une équation du ſecond degré ; c'eſt pourquoi j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}bb$ de la moitié du coefficient b, & j'ai $zz+bz+\frac{1}{4}bb=\frac{aa-bb}{2}+\frac{1}{4}bb$; & corrigeant l'expreſſion $zz+bz+\frac{1}{4}bb=\frac{aa-bb}{2}+\frac{1}{4}bb$, & tirant la racine quarrée, j'ai $z+\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{aa-bb}{2}+\frac{1}{4}bb}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $z=-11\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1369}{2}-\frac{529}{4}}$; & corrigeant les fractions, j'ai $z=-11\frac{1}{2}+\sqrt{684\frac{1}{2}-132\frac{1}{4}}$; & achevant les opérations, j'ai $z=-11\frac{1}{2}+\sqrt{552\frac{1}{4}}$, $z=-11\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2209}{4}}$, $z=-11\frac{1}{2}+23\frac{1}{2}=12$, & $z+b=12+23=35$.

$$2zz+2bz+bb=aa$$
$$2zz+2bz=aa-bb$$
$$zz+bz=\frac{aa-bb}{2}$$
$$zz+bz+\frac{1}{4}bb=\frac{aa-bb}{2}+\frac{1}{4}bb$$
$$zz+bz+\frac{1}{4}bb=\frac{aa-bb}{2}+\frac{bb}{4}$$
$$z+\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{aa-bb}{2}+\frac{bb}{4}}$$
$$z=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{aa-bb}{2}+\frac{bb}{4}}$$

rée $z+\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$, & retranchant $\frac{1}{2}b$, $z=-\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{aa}{2}-\frac{bb}{4}}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $z=12$ qui eſt le nombre du troiſiéme ſac; & par conſéquent le ſecond $z+b=35$, & les quarrés 144 de 12 & 1225 de 35, font enſemble 1369 qui eſt le quarré de 37. Si le quarré de l'inconnuë avoit un coefficient, il faudroit diviſer toute l'équation par ce coefficient, afin que le quarré de l'inconnuë n'eût plus rien qui l'affectât; & ſi ce coefficient étoit une fraction, il faudroit multiplier toute l'équation par le dénominateur, puis la diviſer par le numérateur.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Trouver quel eſt le nombre dont le quarré pris trois fois, plus ſix fois le même nombre, fait 72.

J'appelle ce nombre x, ſon quarré eſt donc xx; & par la condition du problême, j'ai $3xx+6x=72$; je diviſe tout par 3, & j'ai $xx+2x=24$, où le premier terme xx n'a plus de coefficient; j'ajoute de part & d'autre 1 qui eſt le quarré de la moitié du coefficient 2 du ſecond terme, & j'ai $xx+2x+1=25$; & tirant la racine quarrée, j'ai $x+1=5$; & ôtant 1 de part & d'autre $x=4$ nombre cherché; car le quarré de 4 eſt 16, & 3 fois 16 font 48, à quoi ſi vous ajoutez 6 fois 4 ou 24, la ſomme eſt 72.

$$3xx+6x=72$$
$$xx+2x=24$$
$$xx+2x+1=25$$
$$x+1=5$$
$$x=4$$

CINQUIE'ME EXEMPLE.

Et ſi l'on propoſoit un nombre, dont le quarré pris cinq fois, moins quatre fois le même nombre, fit 105.

J'appellerois ce nombre x & ſon quarré xx, & par la condition du problême, j'aurois $5xx-4x=105$; & diviſant tout par 5, j'aurois $xx-\frac{4}{5}x=21$; & prenant la moitié de $\frac{4}{5}$ qui eſt $\frac{4}{10}$, j'en ferois le quarré $\frac{16}{100}$, que j'ajouterois de part & d'autre, ainſi j'aurois $xx-\frac{4}{5}x+\frac{16}{100}=\frac{2116}{100}$; & tirant la racine quarrée, j'aurois $x-\frac{4}{10}=\frac{46}{10}$, & ajoutant $\frac{4}{10}$, $x=\frac{50}{10}=5$ nombre cherché; car le quarré de 5 eſt

$$5xx-4x=105$$
$$xx-\frac{4}{5}x+\frac{16}{100}=21+\frac{16}{100}$$
$$xx-\frac{4}{5}x+\frac{16}{100}=\frac{2116}{100}$$
$$x-\frac{4}{10}=\frac{46}{10}$$
$$x=\frac{46}{10}+\frac{4}{10}=\frac{50}{10}=5$$

25, & 5 fois 25 font 125, duquel si vous retranchez 4 fois 5, c'est-à-dire 20, le reste est 105.

Nous donnerons d'autres exemples de ceci, à mesure que l'occasion s'en présentera dans la suite de cet Ouvrage.

Des problêmes indéterminés.

XXVI. Il arrive quelquefois qu'après avoir rempli toutes les conditions d'un problême, on parvient à une derniere équation où l'inconnuë se trouvant dans l'un & l'autre membre, avec le même signe, ne donne rien à connoître, attendu qu'en la retranchant de part & d'autre, il ne reste plus que des grandeurs connuës; & quelquefois, au contraire, il reste deux inconnuës qu'il n'est pas possible de réduire à une seule; dans l'un & l'autre de ces cas, le problême est indéterminé, & peut souffrir plusieurs résolutions différentes que l'on trouve, en substituant à la place de l'inconnuë un nombre tel qu'on voudra, petit ou grand, entier ou rompu, à moins que les équations précédentes ne la restraignent entre certaines bornes, ce que l'on comprendra mieux par les exemples suivans.

PREMIER EXEMPLE.

Quatre particuliers ont dépensé une certaine somme d'argent; le premier & le second ont dépensé conjointement 14 *livres; le second & le troisiéme* 16; *le troisiéme & le quatriéme* 22; *le quatriéme & le premier* 20: *quelle est la dépense totale, & quelles sont les dépenses particulieres?*

J'appelle la premiere dépense conjointe $14=a$, la seconde $16=b$, la troisiéme $22=c$, & la quatriéme $20=d$. J'appelle aussi la dépense particuliere du premier z, celle du second y, celle du troisiéme x, & celle du quatriéme v; ainsi j'ai les quatre équations ci-jointes.

$z+y=a$ premiere condition
$y+x=b$ seconde condition
$x+v=c$ troisiéme condition
$v+z=d$ quatriéme condition

$2z+2y+2x+2v=a+b+c+d$
$z+y+x+v=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$

J'ajoute ces quatre équations ensemble, & divisant par 2, j'ai $x+y+x+v=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$, ce qui me fait connoître que les quatre dépenses particulieres, c'est-à-dire, la dépense totale est

égale à la moitié des dépenſes conjointes ; ainſi le problême eſt déterminé par rapport à la dépenſe totale ; & j'en tire même une régle générale, non-ſeulement pour quatre, mais encore pour cinq, pour ſix, pour ſept, &c. dont on connoîtroit les dépenſes deux à deux ; car il eſt aiſé de voir qu'ajoutant les équations des conditions, la ſomme diviſée par 2 ſeroit la dépenſe totale, & par conſéquent que cette dépenſe eſt toujours égale à la moitié des dépenſes conjointes.

Mais cette équation de la dépenſe totale ne ſauroit me ſervir pour trouver les dépenſes particulieres ; car comme je ne connois ces dépenſes particulieres que deux à deux conjointement, ſi j'en retranche deux de cette équation, il m'en reſtera encore deux que je ne pourrois pas connoître ſéparément ; & ſi j'en retranche quatre, il ne reſtera rien : ainſi il faut que je cherche à connoître ces dépenſes particulieres par une autre voïe ; & ceci me fait même connoître que ſi au lieu de quatre particuliers il y en avoit ſix, ou huit, ou dix, &c. toujours en nombre pair, je ſerois dans le même embarras.

Au contraire, s'il y avoit cinq particuliers ou ſept, ou neuf, &c. toujours en nombre impair, alors je pourrois retrancher quatre dépenſes priſes deux à deux, ou ſix, ou huit, &c. & le reſte ſeroit la valeur d'une dépenſe particuliere, d'où il me ſeroit aiſé de connoître toutes les autres ; par conſéquent le nombre des particuliers étant impair, le problême ſeroit déterminé, non-ſeulement par rapport à la dépenſe totale, mais encore par rapport aux dépenſes particulieres.

Maintenant pour connoître ſi le nombre des particuliers étant pair, le problême eſt déterminé ou s'il ne l'eſt pas, je cherche la réſolution de la queſtion propoſée, par la voïe ſuivante.

Je prens dans les deux premieres conditions deux valeurs de la ſeconde inconnuë y, laiſſant la premiere, dont je prendrai la valeur après celle des autres : au reſte, il eſt indifférent de commencer par les valeurs de z, ou de y, ou de x.

$$y = a - z = b - x \qquad \text{valeurs de } y$$
$$x = b - a + z = c - v \qquad \text{valeurs de } x$$
$$v = c - b + a - z = d - z \qquad \text{valeurs de } v$$
$$z = d - c + b - a + z \qquad \text{valeurs de } z$$
$$\text{ou } 0 = d - c + b - a$$
$$z = z$$

De ces deux valeurs de y je tire, par tranſpoſition, une valeur de la troiſiéme inconnuë x, c'eſt-à-dire, j'ajoute x pour le faire paſſer dans le premier membre, & je retranche a, & j'ajoute z pour le

faire paſſer dans le ſecond ; je prens une ſeconde valeur de x dans la troiſiéme condition, & de ces deux valeurs de x je tire une valeur de la troiſiéme inconnuë v, & de la quatriéme condition une ſeconde valeur de v ; je tire de ces deux valeurs de v une valeur de la premiere inconnuë z, & cette valeur eſt $z = d - c + b - a + z$, où je vois que ſi j'ôte z de part & d'autre, le reſte ſera $0 = d - c + b - a$, ce qui me fait voir que $d - c + b - a$ eſt égal à zero, & par conſéquent $z = z$, ce qui ne me découvre rien : ainſi par rapport à cette derniere équation, je puis prendre pour z quel nombre je voudrai ; mais en conſidérant les valeurs des autres inconnuës, je vois par la premiere valeur de y qui eſt $y = a - z$, que cette grandeur z doit être moindre que a, ſi je veux que y ſoit une grandeur poſitive ; & conſidérant de même la ſeconde valeur de v qui eſt $v = d - z$, je vois que z doit être moindre que d, ſi je veux que v ſoit poſitif : quant à la premiere valeur de v qui eſt $c - b + a - z$, où z eſt négatif ; comme c eſt plus grand que b, & que nous avons trouvé que a doit auſſi être plus grand que z, je vois que z doit être moindre que l'excès, donc $c + a$ ſurpaſſe b ; mais cette découverte eſt inutile, car l'excès de $c + a$ ſur b étant plus grand que a, & z devant être plus petit que a, il eſt évident qu'il doit être plus petit que cet excès.

Ainſi je puis prendre pour z tel nombre entier ou rompu que je voudrai au-deſſous de 14, qui eſt la valeur de a ; & mettant cette valeur de z dans les valeurs des autres inconnuës, le problême ſera réſolu.

Suppoſons, par exemple, $z = 10$, nous aurons $y = 4$, $x = 12$ & $v = 10$; & ces quatre nombres rempliront les conditions du problême, comme on le voit ici.

$z = 10$
$y = 14 - 10 = 4$
$x = 16 - 14 + 10 = 12$
$v = 22 - 16 + 14 - 10 = 10$

$z + y = 10 + 4 = 14$
$y + x = 4 + 12 = 16$
$x + v = 12 + 10 = 22$
$v + z = 10 + 10 = 20$

Que ſi nous ſuppoſons $z = \frac{1}{2}$, nous aurons $y = 13\frac{1}{2}$, $x = 2\frac{1}{2}$ & $v = 9\frac{1}{2}$; & ces quatre nombres rempliront encore les conditions du problême, & ainſi des autres.

$z = \frac{1}{2}$
$y = 14 - \frac{1}{2} = 13\frac{1}{2}$
$x = 16 - 14 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$
$v = 22 - 16 + 14 - \frac{1}{2} = 19\frac{1}{2}$

$z + y = 13\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 14$
$y + x = 13\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 16$
$x + v = 2\frac{1}{2} + 19\frac{1}{2} = 22$
$v + z = 19\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 20$

Or je puis tirer de ceci une régle générale, non-ſeulement pour quatre perſonnes, mais pour 6, 8, 10, &c. toujours en nombre pair, en prenant la premiere

inconnuë pour la grandeur indéterminée ; car je vois que cette premiere étant z, la seconde y eſt $a-z$, c'eſt-à-dire, la premiere dépenſe conjointe, moins l'indéterminée ; la troiſiéme x eſt $b-a+z$, c'eſt-à-dire, la ſeconde dépenſe cõjointe, moins la premiere, plus l'indéterminée ; & la quatriéme v eſt $c-b+a-z$, c'eſt-à-dire, la troiſiéme dépenſe conjointe, moins la ſeconde, plus la premiere, moins l'indéterminée ; d'où je vois que s'il y avoit ſix perſonnes, la cinquiéme ſeroit $d-c+b-a+z$, c'eſt-à-dire, la quatriéme dépenſe conjointe, moins la troiſiéme, plus la ſeconde, moins la premiere, plus l'indéterminée ; & la ſixiéme ſeroit $e-d+c-b+a-z$, ou la cinquiéme dépenſe conjointe, moins la quatriéme, plus la troiſiéme, moins la ſeconde, plus la premiere, moins l'indéterminée ; & ainſi des autres à l'infini.

premiere	z
ſeconde	$a-z$
troiſiéme	$b-a+z$
quatriéme	$c-b+a-z$
cinquiéme	$d-c+b-a+z$
ſixiéme	$e-d+c-b+a-z$
ſeptiéme	$f-e+d+c+b-a+z$
huitiéme	$g-f+e-d+c-b+a-z$
&c.	

A préſent pour montrer mieux que lorſque les nombres des particuliers eſt impair, le problême eſt déterminé ; & pour en tirer en même-tems une régle générale, de même que pour l'indéterminé, ſuppoſons que cinq particuliers aïant dépenſé une certaine ſomme, les deux premiers aïent dépenſé 22 liv. le ſecond & le troiſiéme 18 ; le troiſiéme & le quatriéme 24 ; le quatriéme & le cinquiéme 34, & le cinquiéme & le premier 30 ; & qu'on demande quelle eſt la dépenſe totale, & quelles ſont les dépenſes particulieres ?

J'appelle $22=a$, $18=b$, $24=c$, $34=d$, $30=e$, la dépenſe particuliere du premier z, celle du ſecond y, celle du troiſiéme x, celle du quatriéme v, & celle du cinquiéme t ; ainſi j'ai les cinq équations ſuivantes.

$$\begin{aligned} z+y&=a\\ y+x&=b\\ x+v&=c\\ v+t&=d\\ t+z&=e \end{aligned}$$

Je les ajoute enſemble, & diviſant la ſomme par 2, j'ai $z+y+x+v+t=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}e$, ce qui me fait connoître que la dépenſe totale eſt égale à la moitié des dépenſes conjointes ; ce qui arriveroit de même quand il y auroit ſept particuliers, neuf, onze, &c.

Pour abréger, j'appelle la dépenſe totale f, ainſi

$$\begin{aligned} 2z+2y+2x+2v+2t&=a+b+c+d+e\\ z+y+x+v+t&=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c+\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}e \end{aligned}$$

l'équation

l'équation se réduit à celle-ci $z+y+x+t+v=f$; & retranchant du premier nôbre $z+y$ & $x+v$, & du second leur valeur a & c, le reste est $t=f-a-c$, ce qui me fait connoître que la dépense du cinquiéme particulier est égale à la dépense totale, moins les deux dépenses conjointes que les quatre autres ont fait sans lui.

$z+y+x+v+t=f$

$t=f-a-c$ dépense du cinquiéme
$v=f-b-e$ dépense du quatriéme
$x=f-a-d$ dépense du troisiéme
$y=f-c-e$ dépense du second
$z=f-b-d$ dépense du premier

$f=11+9+12+17+15=64$ livres
$t=64-22-24=18$
$v=64-18-30=16$
$x=64-22-34=8$
$y=64-24-30=10$
$z=64-18-34=12$

Je retranche de la même équation de la dépense totale $y+x$ & $z+t$, & leur valeur b & e; & le reste $v=f-b-e$ me fait voir que la dépense du quatriéme est égale à la dépense totale, moins les deux dépenses conjointes que les quatre autres ont fait sans lui; & achevant le reste, comme on voit ici, je trouve qu'il en est de même à l'égard des autres dépenses particulieres x, y, z; & mettant les valeurs des lettres connuës, je trouve que la dépense totale est 64 livres; que celle du premier est 12; celle du second 10; celle du troisiéme 8; celle du quatriéme 16, & celle du cinquiéme 18; & ces dépenses font ensemble 64 & rempliſſent en même-tems les conditions du problême.

Or ceci me fait connoître que s'il y avoit sept particuliers, chaque dépense particuliere seroit égale à la dépense totale, moins les trois dépenses conjointes que les six autres auroient fait sans lui; & s'il y en avoit neuf, chaque dépense particuliere seroit égale à la dépense totale, moins les quatre dépenses conjointes que les huit autres particuliers auroient fait sans lui, & ainsi de suite.

Il est bon de jetter un moment les yeux sur tout ce que ce problême nous a fait découvrir. 1°. Quelque nombre de personnes qu'il y ait, la dépense totale est toujours égale à la moitié des dépenses conjointes. 2°. Le problême est déterminé quand le nombre des personnes est impair, & indéterminé lorsqu'il est pair. 3°. Quand le problême est indéterminé, nous avons vû que l'indéterminée z doit être au-dessous de a & de d. 4°. Nous avons trouvé une régle générale pour les dépenses particulieres d'un nombre impair de personnes, tel qu'il soit à l'infini. 5°. Enfin, nous avons aussi trouvé une régle générale pour les dépenses particulieres d'un nombre pair de personnes à l'infini: Qu'on juge,

après cela, si l'on a tort de dire que l'Analyse est un fonds inépuisable de découvertes.

SECOND EXEMPLE.

Un homme tient dans ses mains deux nombres inégaux de jettons ; & l'on sait que si l'on multiplie ces deux nombres ensemble, & qu'on ajoute leur somme au produit, le total sera 34.

J'appelle le total $34=a$, le premier nombre z, & le second y, ainsi $zy+z+y=a$; & retranchant y de part & d'autre, j'ai $zy+z=a-y$; & divisant par $y+1$, j'ai $z=\frac{a-y}{y+1}$, ce qui remplit les conditions du problême ; cependant il me reste deux inconnuës qu'il ne m'est pas possible de réduire à une seule ; c'est pourquoi il m'est libre de prendre pour y tel nombre que je voudrai, à condition cependant qu'il soit moindre que a, car autrement le numérateur $a-y$ seroit une grandeur négative, & z le seroit par conséquent aussi.

$$zy+z+y=a$$
$$zy+z=a-y$$
$$z=\frac{a-y}{y+1}$$

Je fais donc $y=4$, & mettant cette valeur dans l'équation, j'ai $z=6$, & ces deux nombres satisfont au problême.

Et si j'avois fait $y=6$, j'aurois trouvé $z=4$, & j'aurois trouvé également une solution en mettant tout autre nombre au-dessous de 34 ; mais la difficulté, dans ces problêmes, est de trouver une solution en nombre entier lorsqu'elle en est susceptible, car souvent avant d'y parvenir on est obligé de substituer successivement plusieurs différens nombres à la place de l'indéterminée.

$$y=4$$
$$z=\frac{34-4}{4+1}=\frac{30}{5}=6$$

Il est bon de faire observer ici aux Commençans une chose qui les embarrasse ordinairement beaucoup lorsqu'il s'agit de dégager une inconnuë, & qui est cependant très-fréquente dans l'Analyse. Voici ce que c'est : Si une grandeur complexe contient dans chacun de ses termes un produit de deux ou plusieurs grandeurs simples, & que dans chaque produit la même lettre se trouve, c'est une marque certaine que la grandeur complexe est un produit de cette lettre par la somme de toutes les autres ; ainsi si l'on divise par cette somme, le quotient est nécessairement cette unique lettre ; par exemple, la grandeur $ax+cx+dx$ est un produit de x par $a+c+d$; & divisant cette grandeur par $a+c+d$, le quotient

eſt x ; de même, ſi l'on diviſe $aby - cdy + hfy$ par $ad - cd - hf$, le quotient ſera y, & ainſi des autres ; & ſi la lettre qui eſt dans chaque terme ſe trouve ſeule dans l'un de ces termes, alors il faut ſuppoſer qu'elle eſt multipliée par 1 dans ce terme ; & faiſant la diviſion, il faut ajouter l'unité aux autres lettres qui multiplient les autres termes ; ainſi ſi la grandeur complexe eſt $az + bz + z$, il faut ſuppoſer que le troiſiéme terme eſt $1z$, ce qui ne gâte rien, attendu que le multiplicateur 1 n'augmente ni ne diminuë la grandeur à multiplier ; & ſi l'on veut enſuite dégager l'inconnuë, on diviſera par $a + b + 1$, & le quotient ſera z ; de même, ſi la grandeur complexe eſt $zy + z$, comme dans ce problême, on ſuppoſera que le ſecond terme z eſt $1z$; & diviſant par $y + 1$, le quotient donnera l'inconnuë z ; & ainſi des autres.

Pour revenir au problême, ſi on nous avoit dit que la ſomme des deux nombres, retranchée de leur produit, faiſoit $24 = a$, nous aurions eu $zy - z - y = a$; & ajoutant y, nous aurions eu $zy - z = a + y$; & diviſant par $y - 1$, nous aurions eu $z = \frac{a+y}{y-1}$ ce qui nous fait voir que nous aurions pû prendre pour y tel nombre que nous aurions voulu, à condition qu'il eût été plus grand que l'unité ; car autrement le dénominateur $y - 1$ ſeroit une grandeur négative, & z le ſeroit par conſéquent auſſi.

$$zy - z - y = a$$
$$zy - z = a + y$$
$$z = \frac{a+y}{y-1}$$

Et ſi l'on nous diſoit que la différence des deux nombres ajoutée au produit, fait $26 = a$, nous aurions $zy + z - y = a$; & dégageant l'inconnuë z, nous aurions $z = \frac{a+y}{y+1}$ ce qui nous fait voir que z, en ce cas, devant être plus grand que y, ſa valeur $\frac{a+y}{y+1}$ eſt auſſi plus grande que y ; & pour déterminer juſqu'où peut monter la grandeur y, multiplions $\frac{a+y}{y+1}$ & y par $y + 1$, nous aurons $a + y$ & $yy + y$, & le premier produit $a + y$ ſera plus grand que le ſecond, puiſqu'il l'étoit avant la multiplication ; ôtons de part & d'autre y, nous aurons a & yy, & par conſéquent a eſt plus grand que yy, & $\sqrt{a}$ plus grand que y : donc y ne doit pas être plus grand que 5, qui eſt à peu près la racine quarrée de $26 = a$.

$$zy + z - y = a$$
$$zy + z = 1 + y.$$
$$z = \frac{a+y}{y+1}$$

Ainſi ſuppoſant $y=4$, nous aurions $z=\frac{26+4}{4+1}=\frac{30}{5}=6$; & ſi on nous diſoit que la différence des deux nombres étant ôtée du produit le reſte eſt $22=a$, nous aurions $zy-z+y=a$, & dégageant l'inconnuë, nous aurions $z=\frac{a-y}{y-1}$ où nous voïons qu'à cauſe du numérateur $a-y$, le nombre y doit être moindre que a; & qu'à cauſe du dénominateur $y-1$, ce même nombre y doit être plus grand que l'unité.

$zy-z+y=a$

$zy-z=a-y$

$z=\frac{a-y}{y-1}$

Et ſi l'on vouloit que z fût plus grand que y, nous aurions par conſéquent $\frac{a-y}{y-1}$ plus grand que y, & multipliant de part & d'autre par $y-1$, nous aurions $a-y$ plus grand que $yy-y$, & ajoutant y de part & d'autre, nous aurions a plus grand que yy, & $\sqrt{a}$ plus grand que y, ce qui nous fait voir que y ne devroit pas excéder 5, de même que ci-devant.

TROISIE'ME EXEMPLE.

On propoſe de trouver deux nombres, qui multipliés l'un par l'autre forment un cube parfait, dont la racine cubique ſoit égale au produit du premier par le quarré du ſecond.

Les conditions de ce problême me font d'abord connoître qu'il faut que l'un des deux nombres ſoit une fraction, car la racine du cube ſe trouve ici égale au produit du premier par le quarré du ſecond, tandis que le cube n'eſt égal qu'au produit du premier par le ſecond; & par conſéquent, ou le cube eſt moindre que ſa racine, ce qui ne ſauroit être, à moins que le cube ne ſoit une fraction; ou du moins l'un des deux nombres eſt un nombre rompu.

J'appelle donc le premier nombre z, le ſecond y, & la racine du cube x; ainſi j'ai par la premiere condition $zy=x^3$, & par la ſeconde $x=zyy$, & dégageant l'inconnuë z dans l'une & dans l'autre, j'ai $z=\frac{x^3}{y}=\frac{x}{yy}$; & comparant enſemble ces deux valeurs de z, j'en tire une valeur de y qui eſt $y=\frac{x}{x^3}$, ou $y=\frac{1}{x^2}$, car le numérateur x eſt la même choſe que $1x$.

Et mettant cette valeur de y dans la premiere valeur de $z=\frac{x^3}{y}$,

j'ai $z=\frac{x^5}{\frac{1}{xx}}=x^7$: on ſe ſouviendra de ce que nous avons dit dans nos remarques touchant les fractions, que ſi l'on diviſe un nombre entier par une fraction, il faut multiplier le nombre à diviſer par le dénominateur, & diviſer enſuite par le numérateur, lequel numérateur étant ici 1, qui ne diviſe point, le quotient eſt par conſéquent x^7.

$$zy=x^3 \qquad x=zyy$$
$$z=\frac{x^3}{y} \qquad z=\frac{x}{yy}$$
$$\frac{x^3}{y}=\frac{x}{yy}$$
$$x^3=\frac{xy}{yy}=\frac{x}{y}$$
$$yx^3=x$$
$$y=\frac{x}{x^3}$$
$$y=\frac{1}{xx}$$
$$z=\frac{x^3}{y}=\frac{x^3}{\frac{1}{xx}}=x^5=x^7$$

Toutes les conditions du problême ſont donc remplies, & cependant il me reſte trois inconnuës, deſorte qu'il faut néceſſairement déterminer x, laquelle eſt abſolument arbitraire, n'y aïant rien dans les valeurs de y & de z qui le limite.

Suppoſant donc $x=3$, j'ai $y=\frac{1}{9}$ & $z=243$, ainſi $zy=27$ & $zyy=3$.

Suppoſant de même $x=2$, j'ai $y=\frac{1}{4}$, $z=32$, $zy=8$ & $zyy=2$; & ainſi de même des autres ſuppoſitions qu'on pourroit faire.

QUATRIE'ME EXEMPLE.

Le nombre 100 *eſt un quarré parfait, & l'on demande de le couper en deux quarrés parfaits.*

Je nomme a le côté 10 du quarré 100, z le côté du premier inconnu, & x le côté du ſecond, ainſi j'ai $aa=zz+xx$, & toutes les conditions du problême ſont remplies; cependant il me reſte deux inconnuës, & je vois bien que je n'avancerai rien d'en déterminer une à diſcrétion; car ſuppoſons que j'appelle $x=4$ ſon quarré xx ſera 16, & ſi de 100 je retranche 16, le reſte 84 ne ſera pas un quarré parfait, il faut donc que je cherche une autre voïe; & pour cela, comme chaque côté des deux quarrés inconnus eſt moindre que le côté a du connu, j'appelle $zy-a$ le côté de xx, je puis faire cette ſuppoſition; car la grandeur y que j'introduis étant indéterminée, il eſt indubitable qu'il y a quelque nombre repréſenté par y, qui multipliant z, peut faire un produit duquel il faille ôter a, afin qu'il ſoit égal au côté x; d'ailleurs en prenant $zy-a$ pour

le côté x, je n'aurai plus que l'inconnuë z, & j'aurai en même-tems l'avantage qu'en faiſant les quarrés de z & $zy-a$, je pourrai réduire l'inconnuë z au premier degré, comme on verra bientôt : faiſant donc ces quarrés, j'ai zz & $zzyy-2azy+aa$; & par la condition du problême, j'ai l'équation $zz+zzyy-2azy+aa=aa$; je retranche aa de part & d'autre, & j'ajoute $2azy$, & j'ai $zz+zzyy=2azy$; je diviſe par z, & j'ai $z+zyy=2ay$; & diviſant par $1+yy$ ou par $yy+1$, j'ai $z=\frac{2ay}{y+1}$.

$zz+zzyy-2azy+aa=aa$
$zz+zzyy=2azy$
$z+zyy=2ay$
$z=\frac{2ay}{yy+1}$ valeur de z

Je mets cette valeur de z dans la valeur du côté x qui eſt $x=zy-a$, & j'ai $x=\frac{2ayy}{yy+1}-a$; & réduiſant tout en fractions, & corrigeant enſuite l'expreſſion, j'ai $x=\frac{ayy-a}{yy+1}$, & les conditions du problême ſont remplies ; deſorte qu'il faut néceſſairement que je détermine l'indéterminée y, de façon cependant qu'elle ſoit plus grande que l'unité ; car autrement le numérateur $ayy-a$ ſeroit égal à zero, & le côté x ſeroit nul.

$x=zy-a$
$x=\frac{2ayy}{yy+1}-a$
$x=\frac{2ayy-ayy-a}{yy+1}$
$x=\frac{ayy-a}{yy+1}$ valeur de x

Suppoſant donc $y=2$, j'ai $z=\frac{2ay}{yy+1}=\frac{40}{5}=8$, & $x=\frac{ayy-a}{yy+1}=\frac{40-10}{5}=\frac{30}{5}=6$: donc $zz=64$, & $xx=36$, & $64+36=100$.

Suppoſant de même $y=3$, j'ai $z=\frac{60}{10}=6$ & $x=\frac{90-10}{10}=\frac{80}{10}=8$, & ainſi des autres ſuppoſitions qu'on pourroit faire.

Or de ce problême-ci nous pouvons tirer une régle générale pour trouver tant de quarrés qu'on voudra, qui pris deux à deux ſoient égaux à un troiſiéme quarré, & pour cela prenons les valeurs de z & de x, qui ſont $\frac{2ay}{yy+1}$ & $\frac{ayy-a}{yy+1}$; ſuppoſons $a=1$ ces, deux valeurs ſe changeront en celles-ci $\frac{2y}{yy+1}$ & $\frac{yy-1}{yy+1}$; & multipliant de part & d'autre par $yy+1$, nous aurons $2y$ & $yy-1$, dont les quarrés joints enſemble ſeront encore égaux à un troiſiéme ; car le quarré de $2y$ eſt $4yy$, & celui de $yy-1$ eſt $y^4-2yy+1$, & la ſomme de ces quarrés eſt $y^4+2yy+1$, laquelle ſomme eſt un quarré parfait dont la racine eſt $yy+1$.

Comme donc la grandeur y eſt indéterminée, nous pouvons prendre tel nombre qu'il nous plaira au lieu de y, à condition cependant que ſon quarré ſoit au-deſſus de l'unité, à cauſe que ſans cela le côté $yy-1$ ſeroit égal à zero ſi y étoit égal à 1 & que ce même côté ſeroit une grandeur négative ſi y étoit moindre que 1.

$$\begin{array}{r} y^4-2yy+1 \\ 4yy \\ \hline y^4+2yy+1 \end{array}$$

Suppoſant donc $y=2$, & ſubſtituant cette valeur dans les côtés $2y$ & $yy-1$, nous aurons 4 & 3, dont les quarrés 16 & 9 ſont enſemble 25 qui eſt un nombre quarré.

Suppoſant de même $y=3$, & ſubſtituant cette valeur dans les côtés $2y$ & $yy-1$, nous aurons 6 & 8, dont les quarrés 36 & 64 ſont 100, qui eſt un nombre quarré.

Suppoſant encore $y=4$, nous aurons $2y=8$ & $yy-1=15$, dont les quarrés 64 & 225 ſont 289, qui eſt le quarré de 17.

Suppoſant de même $y=2\frac{1}{2}$, nous aurons $2y=5$ & $yy-1=6\frac{1}{4}-1=5\frac{1}{4}$, ou $2y=\frac{10}{4}$ & $yy-1=\frac{21}{4}$, dont les quarrés $\frac{400}{16}$ & $\frac{441}{16}$ ſont $\frac{841}{16}$, qui eſt le quarré de $\frac{29}{4}$ ou de $7\frac{1}{4}$.

Et ſuppoſant de même pour y tel nombre que l'on voudra, ſoit entier ſoit compoſé d'entiers & de fractions, on trouvera toujours deux quarrés dont la ſomme ſera égale à un troiſiéme quarré; & comme les nombres vont à l'infini, il s'enſuit qu'on peut trouver une infinité de quarrés, qui pris deux à deux forment un quarré parfait.

Or ceci nous fait voir une belle propriété des nombres qui ſont au-deſſus de l'unité, qui eſt que quelque nombre que l'on prenne, ſoit entier ſoit compoſé d'entiers & de fractions, & que nous appellerons a, ſi d'un côté l'on prend le double $2a$ de ce nombre, & que de l'autre on prenne $aa-1$, c'eſt-à-dire, ſon quarré diminué de l'unité, le quarré de $2a$ & celui de $aa-1$ ajoutés enſemble formeront toujours un quarré parfait, dont le côté ſera $aa+1$ ou le quarré du nombre a augmenté de l'unité. Ainſi, par exemple, ſi je prens 3, je connois d'abord que le quarré qui ſera égal aux deux autres aura pour racine le quarré 9 plus 1, c'eſt-à-dire 10, & que l'un des deux autres quarrés aura pour racine le même quarré 9 moins 1, c'eſt-à-dire 8.

Que ſi le grand quarré étoit déterminé, & qu'il fût un nombre entier, comme, par exemple, le nombre 100, je tirerois ſa racine 10 qui ſeroit $aa+1$; & retranchant 1, le reſte ſeroit 9; & comme 9 eſt un quarré parfait, cela me feroit voir que le quarré 100

peut être coupé en deux quarrés, chacun desquels seroit un nombre entier; car tirant la racine quarrée de 9, j'aurois $3=a$, & par conséquent $2a=6$ & $aa-1=9-1=8$: ainsi 36 & 64 seroient les deux quarrés cherchés.

Mais si le grand quarré étant un nombre entier, comme, par exemple 64, & qu'aïant ôté 1 de sa racine 8, il se trouvât que le reste $7=aa$ ne fût pas un nombre quarré, je pourrois bien prendre $a=\sqrt{7}$, & par conséquent $2a=2\sqrt{7}$ & $aa-1=7-1=6$; d'où je tirerois 28 & 36, c'est-à-dire, le quarré de $2\sqrt{7}$, & celui de 6 égaux à 64, ce qui fait voir que la propriété que je viens d'expliquer, subsiste dans tous les cas; cependant comme dans ces sortes de problêmes on demande des quarrés dont les racines soient commensurables, au lieu de se servir alors de ce que je viens de dire, il faudroit emploïer les formules $z=\frac{2ay}{yy+1}$ & $x=\frac{ayy-a}{yy+1}$ que nous avons trouvées ci-dessus, & déterminer y comme nous l'avons enseigné; ainsi supposant, par exemple $y=2$, la grandeur a seroit 8, qui est la racine de 64, & l'on auroit $z=\frac{32}{5}$ & $x=\frac{24}{5}$, & par conséquent $zz=\frac{1024}{25}$, & $xx=\frac{576}{25}$, & $\frac{1024}{25}+\frac{576}{25}=\frac{1600}{25}$; & ce quarré réduit en entier est en effet 64.

CINQUIE'ME EXEMPLE.

On demande de partager le quarré 100 *en deux quarrés parfaits, dont la racine de l'un soit entre* 2 *&* 5.

J'appelle la premiere limite $2=c$ & la seconde $5=d$, le premier quarré inconnu z & le second x; en suivant la méthode du problême précédent, j'aurai $z=\frac{2ay}{yy+1}$ & $x=\frac{ayy-a}{yy+1}$, qui seroient les côtés des deux quarrés inconnus, si l'on n'avoit pas ajouté que l'un de leurs côtés doit être entre 2 & 5; pour parvenir donc à connoître ce côté, je prens une grandeur indéterminée v que je suppose entre 2 & 5, & que je fais égale au côté z, ainsi j'ai $z=v=\frac{yy+1}{2ay}$; & multipliant de part & d'autre par $yy+1$, j'ai $vyy+v=2ay$, je divise par v; après quoi je retranche $\frac{2ay}{v}$ & 1, & j'ai $yy-\frac{2ay}{v}=-1$, qui est une équation du second degré; c'est pourquoi je prens la moitié du coefficient $\frac{2a}{v}$, qui est $\frac{a}{v}$; & faisant son

quarré

quarré $\frac{aa}{vv}$, je l'ajoute de part & d'autre ; & tirant la racine quarrée, j'ai $y-\frac{a}{v}=\sqrt{\frac{aa}{vv}-1}$; & réduisant 1 en fraction $y-\frac{a}{v}=\sqrt{\frac{aa-vv}{vv}}$, & ajoutant $\frac{a}{v}$ de part & d'autre, j'ai $y=\frac{a}{v}+\sqrt{\frac{aa-vv}{vv}}$.

Et mettant à la place de v, premierement la limite c, puis la limite d, ou leurs valeurs 2 & 5, je trouve $y=5+2\sqrt{6}$ & $y=2+\sqrt{3}$; desorte que l'arbitraire y est entre $5+2\sqrt{6}$ & $2+\sqrt{3}$, c'est-à-dire à peu près, entre $9\frac{1}{2}$ & $3\frac{1}{2}$; ainsi je puis prendre pour y tel nombre que je voudrai, qui sera renfermé entre ces deux limites.

$$v=\frac{2ay}{yy+1}$$
$$vyy+v=2ay$$
$$yy+1=\frac{2ay}{v}$$
$$yy-\frac{2ay}{v}=-1$$
$$yy-\frac{2ay}{v}+\frac{aa}{vv}=\frac{aa}{vv}-1$$
$$y-\frac{a}{v}=\sqrt{\frac{aa}{vv}-1}$$
$$y-\frac{a}{v}=\sqrt{\frac{aa-vv}{vv}}$$
$$y=\frac{a}{v}+\sqrt{\frac{aa-vv}{vv}}$$

Supposant donc $y=6$, & mettant sa valeur dans les équations $z=\frac{2ay}{yy+1}$ & $x=\frac{ayy-a}{yy+1}$, j'ai $z=\frac{120}{37}$ & $x=\frac{350}{37}$: or $z=\frac{120}{37}=3\frac{9}{37}$; & par conséquent le côté z est entre 2 & 5, comme le problême l'exige ; faisant donc les quarrés de $z=\frac{120}{37}$ & de $x=\frac{350}{37}$, j'ai $zz=\frac{14400}{1369}$ & $xx=\frac{122500}{1369}$; & ajoutant ces deux quarrés ensemble, j'ai $zz+xx=\frac{136900}{1369}=100$, ainsi qu'il est proposé.

$$y=\frac{a}{c}+\sqrt{\frac{aa-cc}{cc}} \qquad y=\frac{a}{d}+\sqrt{\frac{aa-dd}{dd}}$$
$$y=\frac{10}{2}+\sqrt{\frac{100-4}{4}} \qquad y=\frac{10}{5}+\sqrt{\frac{100-25}{25}}$$
$$y=5+\sqrt{24} \qquad y=2+\sqrt{3}$$
$$y=5+2\sqrt{6}$$

Supposant de même $y=8$, j'ai $z=\frac{160}{65}$ & $x=\frac{630}{65}$: or $z=\frac{160}{65}=2\frac{30}{65}$, & par conséquent le côté z est entre 2 & 5 ; de plus, faisant les quarrés de $z=\frac{160}{65}$ & de $x=\frac{630}{65}$, j'ai $zz=\frac{25600}{4225}$ & $xx=\frac{396900}{4225}$; & ajoutant ensemble ces deux quarrés, j'ai $zz+xx=\frac{422500}{4225}=100$, ainsi qu'il est proposé ; & il en seroit de même de toute autre supposition qu'on feroit en prenant pour y un nombre, soit entier, soit mêlé d'entiers & fractions, entre $9\frac{1}{2}$ & $3\frac{1}{2}$.

SIXIE'ME EXEMPLE.

On a deux quarrés 64 & 100, dont on propoſe de diviſer la ſomme 164 en deux autres quarrés parfaits.

Je nomme a le côté 10 du grand quarré 100, & b le côté 8 du petit quarré 64; il eſt évident que le côté de l'un des deux quarrés inconnus ſera moindre que le côté a, & que l'autre ſurpaſſera le côté b. J'appelle donc $a-z$ celui des côtés inconnus qui ſera moindre que a, & $yz-b$ celui qui ſera plus grand que b; la grandeur y eſt indéterminée, & par conſéquent elle peut être de telle grandeur, que multipliant la grandeur z, il faille retrancher b du produit, pour rendre ce produit égal à b.

Faiſant donc les quarrés de ces deux côtés, leur ſomme eſt égale à la ſomme $aa+bb$ des deux quarrés connus; & retranchant de part & d'autre $aa+bb$, & ajoutant $2az+2yzb$, j'ai $zz+yyzz=2az+2yzb$; & diviſant premierement par z, puis par $1+yy$ ou par $yy+1$, j'ai $z=\frac{2a+2yb}{yy+1}$; & comme tout eſt ici poſitif, je puis prendre pour y tel nombre qu'il me plaira, à condition que la valeur de z ſoit moindre que a, à cauſe que le côté du premier quarré inconnu eſt $a-z$.

$a-z$	$yz-b$
$a-z$	$yz-b$
$aa-2az+zz$	$yyzz-2yzb+bb$

$aa-2az+zz+yyzz-2yzb+bb=aa+bb$

$zz+yyzz=2az+2yzb$

$z+yyz=2a+2yb$

$z=\frac{2a+2yb}{yy+1}$

Mettant donc la valeur de z dans les deux côtés inconnus $a-z$ & $yz-b$, j'ai $a-z=a-\frac{2a-2yb}{yy+1}$ & $yz-b=\frac{2ay+2yyb}{yy+1}-b$.

Suppoſant donc $y=3$, j'ai $a-z=10-\frac{20-48}{10}=10-\frac{68}{10}=\frac{100-68}{10}=\frac{32}{10}$, & $yz-b=\frac{60+144}{10}-8=\frac{204}{10}-8=\frac{204-80}{10}=\frac{124}{10}$; & faiſant les quarrés de ces deux côtés, j'ai $\frac{1024}{100}$ & $\frac{15376}{100}$, leſquels ajoutés enſemble font $\frac{16400}{100}=164$, ainſi qu'il eſt propoſé.

J'ai dit qu'il faut déterminer y de telle ſorte que la valeur de z ſoit moindre que celle de a, parce qu'autrement le côté $a-z$ ſeroit une grandeur négative; & pour déterminer quelle doit être la limite de y, prenons la valeur trouvée du côté $a-z$, qui eſt a

$-\frac{2a-2by}{yy+1}$, & où la fraction repréſente z : donc a doit être plus grand que cette fraction. Réduiſons a en fractions, & au lieu de $a-\frac{2a-2by}{yy+1}$ nous aurons $\frac{ayy+a-2a-2by}{yy+1}$, & corrigeant l'expreſſion, nous aurons $\frac{ayy-a-2by}{yy+1}$; ainſi le premier terme ayy du numérateur doit être plus grand que les deux autres $a+2by$, ſi nous voulons que ce numérateur ſoit poſitif ; & diviſant par a de part & d'autre, yy ſera plus grand que $\frac{a+2by}{a}$; & retranchant $\frac{2by}{a}$ de part & d'autre, $yy-\frac{2by}{a}$ ſera plus grand que $\frac{a}{a}$; & ajoutant de part & d'autre le quarré $\frac{bb}{aa}$, qui eſt la moitié du coefficient $\frac{2b}{a}$, nous aurons $yy-\frac{2by}{a}+\frac{bb}{aa}$ plus grand que $\frac{a}{a}+\frac{bb}{aa}$ ou que $\frac{aa}{aa}+\frac{bb}{aa}$; & tirant la racine quarrée, nous aurons $y-\frac{b}{a}$ plus grand que $\sqrt{\frac{aa+bb}{aa}}$, ou que $\frac{\sqrt{aa+bb}}{a}$; car c'eſt la même choſe qu'un quarré ſoit diviſé par un autre, & qu'on en tire enſuite la racine quarrée, ou qu'on tire d'abord ſa racine, & qu'on diviſe cette racine par [illegible]e du quarré qui devoit la diviſer, & c'eſt cè que ſignifient ces deux différentes expreſſions $\sqrt{\frac{aa+bb}{aa}}$ & $\frac{\sqrt{aa+bb}}{a}$, à quoi on doit faire attention. Pour revenir donc, nous avons $y-\frac{b}{a}$ plus grand que $\frac{\sqrt{aa+bb}}{a}$; & ajoutant de part & d'autre $\frac{b}{a}$, nous aurons enfin y plus grand que $\frac{b+\sqrt{aa+bb}}{a}$; & mettant la valeur des lettres connuës, nous aurons y plus grand que $\frac{8+\sqrt{100+64}}{10}$, ou que $\frac{8+\sqrt{164}}{10}$; & comme la racine de 164 eſt environ $12\frac{1}{2}$ ou $\frac{25}{2}$, nous aurons $\frac{8+\sqrt{164}}{10}=\frac{\frac{16}{2}+\frac{25}{2}}{10}=\frac{41}{20}=2\frac{1}{20}$; ce qui fait voir que l'arbitraire y doit être au-deſſus de $2\frac{1}{20}$.

SEPTIE'ME EXEMPLE.

On demande deux nombres tels, que le premier ajouté au quarré du ſecond, & le ſecond ajouté au quarré du premier, faſſent deux quarrés parfaits.

J'appelle le premier nombre z, & le ſecond y: donc par les conditions $zz+y$ & $yy+z$ ſont des quarrés parfaits. Je prens donc $z+x$ pour le côté du premier quarré & $y+v$ pour celui du ſecond, ainſi faiſant les quarrés de ces côtés, j'ai les deux équations ſuivantes; je tire de l'une & de l'autre deux valeurs de y, & j'ai $y=2zx+xx$ & $y=\frac{z-vv}{2v}$.

$$zz+2zx+xx=zz+y \qquad yy+2yv+vv=yy+z$$
$$2zx+xx=y \qquad 2yv+vv=z$$
$$2yv=z-vv$$
$$\frac{y=z-vv}{2v}$$
$$2zx+xx=\frac{z-vv}{2v}$$
$$4vzx+2vxx=z-vv$$
$$2vxx+vv=z-4vzx$$
$$\frac{2vxx+vv=z}{1-4vx}$$

Je compare ces deux valeurs enſemble, je multiplie par $2v$, puis j'ajoute vv de part & d'autre, & je retranche $4vzx$; enfin, je diviſe par $1-4vx$, & j'ai $\frac{2vxx+vv}{1-4vx}=z$, qui eſt une valeur de z; & toutes les conditions du problême étant remplies, les deux grandeurs v & x ſont indéterminées ou arbitraires; mais à cauſe du dénominateur $1-4vx$, il faut que l'unité ſoit plus grande que $4vx$ ſi je veux que z ſoit une valeur poſitive.

Ainſi nous avons 1 plus grand que $4vx$; & diviſant de part & d'autre par 4, nous avons $\frac{1}{4}$ plus grand que vx, ce qui nous fait connoître que les deux arbitraires doivent être de telle nature que leur produit ſoit moindre que $\frac{1}{4}$; & par conſéquent il faut que toutes les deux ſoient des nombres rompus, ou que ſi l'une des deux eſt un nombre entier, ce ſoit la grandeur x; car autrement le numérateur $2vxx+vv$ ne ſeroit pas un nombre entier.

Suppoſant $v=\frac{1}{2}$, & $x=\frac{1}{3}$, nous aurons $z=\frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{36}+\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{13}{36}}{\frac{3}{6}}=\frac{39}{36}=\frac{13}{12}$, & $y=\frac{z-vv}{2v}=\frac{\frac{13}{12}-\frac{1}{4}}{1}=\frac{13}{12}-\frac{3}{12}=\frac{10}{12}$; &

par conſéquent nous aurons $=xx+y=\frac{169}{144}+\frac{10}{12}=\frac{169+120}{144}=\frac{289}{144}$, qui eſt un quarré parfait, dont la racine eſt $\frac{17}{12}$, & $yy+z=\frac{100}{144}+\frac{13}{11}=\frac{100+156}{144}=\frac{256}{144}$, qui eſt auſſi un quarré parfait : donc la racine eſt $\frac{16}{12}$.

Si l'on a bien compris la méthode que nous avons tenuë juſqu'ici pour la réſolution des problêmes indéterminés, on pourra aiſément en réſoudre grand nombre d'autres que je me diſpenſe de rapporter pour n'être pas trop long.

Nous avons dit ailleurs que le terme d'*égalité*, & celui d'*équation* ſignifioient la même choſe ; mais qu'ordinairement on ſe ſervoit de celui d'équation, réſervant celui d'égalité pour certains problêmes particuliers, dont il eſt à propos de donner ici la connoiſſance.

Lorſqu'on a deux grandeurs qui renferment une même inconnuë, & qu'on propoſe d'en faire deux quarrés parfaits, la régle qui réſout cette queſtion s'appelle *régle de double égalité* ; & ſi on avoit trois grandeurs, chacune deſquelles renfermât la même inconnuë, & qu'on demandât d'en faire trois quarrés, la régle s'appelleroit de *triple égalité*, & ainſi de même s'il y avoit quatre grandeurs, ou cinq, ou ſix, &c.

HUITIE'ME EXEMPLE.

Trois perſonnes ont chacune un certain nombre d'écus ; la premiere en a 8 ; la ſeconde 72, & le nombre de la troiſiéme, multipliant 8 & 72, donne pour produit deux quarrés parfaits : quel eſt le nombre du troiſiéme ?

C'eſt ici une queſtion de double égalité, & pour la réſoudre j'appelle $8=a$, $72=b$, & le nombre inconnu du troiſiéme z ; ainſi az & bz ſont deux quarrés parfaits ; je fais $az=yy$, & diviſant par a, j'ai $z=\frac{yy}{a}$; je fais de même $bz=xx$; & diviſant par b, j'ai $z=\frac{xx}{b}$; & comparant ces deux valeurs, j'ai $\frac{yy}{a}=\frac{xx}{b}$; je multiplie par a & par b, & j'ai $byy=axx$; diviſant par a, qui eſt

$az=yy$ $\quad$ $bz=xx$

$z=\frac{yy}{a}$ $\quad$ $z=\frac{xx}{b}$

$\frac{yy}{a}=\frac{xx}{b}$

$byy=axx$

$\frac{byy}{a}=xx$

$\sqrt{\frac{byy}{a}}=x$

$\frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=x$

la moindre des deux grandeurs connuës, j'ai $\frac{byy}{a}=xx$; & tirant la racine quarrée, j'ai $\sqrt{\frac{byy}{a}}=x$; & tirant le quarré yy hors du ſigne, j'ai $\frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=x$; & toutes les conditions du problême étant remplies, la grandeur y eſt arbitraire ; mais afin qu'on puiſſe réſoudre la queſtion, il faut que $\sqrt{\frac{b}{a}}$ ſoit commenſurable, c'eſt-à-dire, que $\frac{b}{a}$ ſoit un quarré parfait, dont on puiſſe tirer la racine tel qu'eſt ici $\frac{72}{8}=9$.

Suppoſant donc $y=2$, j'ai $x=y\sqrt{\frac{b}{a}}=2\sqrt{\frac{72}{8}}=2\sqrt{9}=6$: donc $z=\frac{xx}{b}=\frac{36}{72}=\frac{1}{2}$, & par conſéquent $az=8\times\frac{1}{2}=4$, qui eſt un quarré parfait, & $bz=72\times\frac{1}{2}=36$, qui eſt auſſi un quarré parfait.

Suppoſant de même $y=6$, j'ai $x=6\sqrt{9}=18$: donc $z=\frac{xx}{b}=\frac{324}{72}=4\frac{1}{2}$, & par conſéquent $az=8\times4\frac{1}{2}=36$, qui eſt un quarré, & $bz=72\times4\frac{1}{2}=324$, qui eſt le quarré de 18.

Suppoſant encore $y=12$, j'ai $x=12\sqrt{9}=36$: donc $z=\frac{xx}{b}=\frac{1296}{72}=18$, ainſi $az=8\times18=144$, qui eſt le quarré de 12, & $bz=72\times18=1296$, qui eſt le quarré de 36 ; & ainſi des autres.

Si au lieu de prendre la valeur de xx nous avions pris celle de yy, nous aurions eu $y=x\sqrt{\frac{a}{b}}=x\sqrt{\frac{8}{72}}$, & réduiſant la fraction en moindre dénomination $y=x\sqrt{\frac{1}{9}}$; & comme $\frac{1}{9}$ eſt un quarré parfait, nous aurions également réſolu la queſtion en prenant pour arbitraire la grandeur x.

Ainſi ſuppoſant $x=6$, nous aurions eu $y=x\sqrt{\frac{1}{9}}=6\sqrt{\frac{1}{9}}=2$: donc $z=\frac{yy}{a}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, & par conſéquent $az=8\times\frac{1}{2}=4$ quarré parfait, & $bz=72\times\frac{1}{2}=36$, autre quarré.

De même, ſuppoſant $x=18$, nous aurions eu $y=x\sqrt{\frac{1}{9}}=18\sqrt{\frac{1}{9}}=6$: donc $z=\frac{yy}{a}=\frac{36}{8}=4\frac{1}{2}$, & par conſéquent $az=8\times4\frac{1}{2}=36$, quarré parfait, & $bz=72\times4\frac{1}{2}=324$, qui eſt le quarré de 18 ; & ainſi des autres.

NEUVIE'ME EXEMPLE.

Quatre perſonnes ont partagé une certaine ſomme ; la premiere a eu 8 livres, la ſeconde 72 ; la troiſiéme 128 ; & le nombre de la quatriéme, multipliant chaque nombre des trois autres, donne pour produit trois quarrés parfaits : quel eſt le nombre de la quatriéme.

Cette queſtion eſt de triple égalité, & pour la réſoudre, j'appelle $8=a$, $72=b$, $128=c$; le nombre inconnu du troiſiéme z, & les trois quarrés xx, yy & vv ; ainſi j'ai $az=xx$, $bz=yy$, $cz=vv$, d'où je tire trois valeurs de z ; & comparant la premiere avec la ſeconde, j'en tire $y=x\sqrt{\frac{b}{a}}$.

$az=xx$ $\quad$ $bz=yy$ $\quad$ $cz=vv$

$z=\frac{xx}{a}$ $\quad$ $z=\frac{yy}{b}$ $\quad$ $z=\frac{vv}{c}$

Comparant de même la premiere & troiſiéme valeur, j'en tire $v=x\sqrt{\frac{c}{a}}$, &

$\frac{xx}{a}=\frac{yy}{b}$ $\quad$ $\frac{xx}{a}=\frac{vv}{c}$

$xV\frac{b}{a}=y$ $\quad$ $xV\frac{c}{a}=v$

toutes les conditions du problême étant remplies, la grandeur x eſt arbitraire ; mais afin que la queſtion puiſſe ſe réſoudre, il faut que les fractions $\frac{b}{a}$ & $\frac{c}{a}$ ſoient des quarrés parfaits.

Suppoſant donc $x=4$, j'ai $y=x\sqrt{\frac{b}{a}}=4V\frac{72}{8}=4V9=12$: donc $z=\frac{yy}{b}=\frac{144}{72}=2$, ainſi $az=8\times2=16$ quarré parfait, $bz=72\times2=144$ quarré de 12, & $cz=128\times2=256$ quarré de 16.

Suppoſant de même $x=12$, j'ai $y=x\sqrt{\frac{b}{a}}=12V9=36$: donc $z=\frac{yy}{b}=\frac{1296}{72}=18$; & par conſéquent $az=8\times18=144$ quarré de 12, $bz=72\times18=1296$ quarré de 36, & $cz=128\times18=2304$ quarré de 48 ; & ainſi des autres.

Ceux qui voudront pouſſer plus loin ces recherches, pourront conſulter le quatriéme Livre du ſecond Volume du Pere Preſtet, où il paroît avoir épuiſé cette matiere.

DIXIE'ME EXEMPLE.

Une compagnie de trente perſonnes, compoſée d'hommes, de femmes, d'enfans & de ſerviteurs, a dépenſé 100 *piſtoles; chaque homme en a dépenſé* 5; *chaque femme* 3; *chaque enfant* 2, *& chaque ſerviteur* 1: *combien y avoit-il d'hommes? combien de femmes, d'enfans & de ſerviteurs?*

La méthode que j'ai enſeignée dans la ſeconde Partie de cet Ouvrage, touchant ces ſortes de queſtions, eſt très-facile, & plus que ſuffiſante pour réſoudre ce problême dans tous les cas poſſibles; mais ſi l'on veut ſavoir comment on peut y appliquer l'Analyſe, je diviſe d'abord 100 par 30, & le quotient $3\frac{1}{3}$ ou $\frac{10}{3}$ eſt la dépenſe que chaque perſonne auroit fait, ſi chacun avoit païé également; ainſi $\frac{10}{3}$ eſt le prix moïen que j'appelle m; j'appelle auſſi la dépenſe des hommes a, celle des femmes $3=z$, celle des enfans $2=y$, & celle des ſerviteurs $1=x$, où réduiſant tout en fraction $a=\frac{15}{3}$, $z=\frac{9}{3}$, $y=\frac{6}{3}$, $x=\frac{3}{3}$; & comparant chacune de ces dépenſes avec la dépenſe moïenne $m=\frac{10}{3}$, je trouve quatre valeurs de m.

Pour réſoudre la queſtion, je prens d'abord le plus petit mélange qu'on puiſſe faire de ces quatre valeurs; ainſi je les prens chacune une fois, & j'ai une équation dont le ſecond membre eſt $4m$; mais dans le premier membre il ſe trouve des excès & des défauts, & pour les faire évanoüir, j'ajoute enſemble les excès $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ & $\frac{7}{3}$, ce qui fait $\frac{12}{3}$; & retranchant le défaut $\frac{5}{3}$ de $\frac{12}{3}$, il reſte $\frac{7}{3}$; & ſi j'ajoute $a-\frac{5}{3}$, j'aurai encore $\frac{2}{3}$ de plus; & ajoutant encore un $a-\frac{5}{3}$, j'aurai $\frac{3}{3}$ de moins; mais ajoutant trois fois $z+\frac{1}{3}$, les excès & les défauts diſparoîtront totalement: ainſi j'aurai $3a+4z+y+x=9m$, qui eſt le moindre mélange qu'on puiſſe faire des quatre dépenſes; & cette équation fait voir qu'une compagnie de trois hommes, quatre femmes, un enfant & un ſerviteur, qui font en tout neuf, auroient autant dépenſé que neuf perſonnes, chacune deſquelles auroit païé $\frac{10}{3}$ de piſtoles.

$$m=a-\frac{5}{3}$$
$$m=z+\frac{1}{3}$$
$$m=y+\frac{4}{3}$$
$$m=x+\frac{7}{3}$$
$$a-\frac{5}{3}+z+\frac{1}{3}+y+\frac{4}{3}+x+\frac{7}{3}=4m$$
$$3a+4z+y+x=9m$$

Mais comme il s'agit d'une compagnie de trente perſonnes, & non

non pas de ſept, je fais le plus petit mélange que l'on puiſſe faire. 1°. Des deux premieres dépenſes $a=1\frac{1}{3}$, $z=\frac{2}{3}$, avec le prix moïen $m=1\frac{0}{3}$. 2°. De la premiere & de la troiſiéme. 3°. De la premiere & de la quatriéme. 4°. Des deux premieres & de la troiſiéme. 5°. Des deux premieres & de la quatriéme. 6°. Enfin, de la premiere & des deux dernieres; ces mélanges étant les ſeuls qu'on puiſſe faire, attendu qu'il n'y a que la premiere qui ait un défaut $-\frac{1}{3}$.

Et pour faire ces mélanges, j'écris pour les deux premieres $a-\frac{5}{3}+z+\frac{1}{3}=2m$, où je trouve $\frac{1}{3}$ de défaut & $\frac{1}{3}$ d'excès, ce qui fait $\frac{4}{3}$ de défaut; ainſi prenant $z+\frac{1}{3}$ quatre fois, il n'y aura plus ni excès, ni défaut, & le mélange ſera $a+5z=6m$.

$a-\frac{5}{3}+z+\frac{1}{3}=2m$
$a+5z=6m$ premier mélange.

$a-\frac{1}{3}+y+\frac{4}{3}=2m$
$4a+5y=9m$ ſecond mélange.

$a-\frac{5}{3}+x+\frac{7}{3}=2m$
$7a+5x=12m$ troiſiéme mélange.

$a-\frac{1}{3}+z+\frac{1}{3}+y+\frac{4}{3}=3m$
$a+z+y=3m$ quatriéme mélange.

$a-\frac{1}{3}+z+\frac{1}{3}+x+\frac{7}{3}=3m$
$2a+3z+x=6m$ cinquiéme mélange.

$a-\frac{1}{3}+y+\frac{4}{3}+x+\frac{7}{3}=3m$
$3a+2y+x=6m$ ſixiéme mélange.

De même pour la premiere & troiſiéme, j'écris $a-\frac{5}{3}+y+\frac{4}{3}=2m$, où il y a $\frac{1}{3}$ de défaut; & pour le faire diſparoître, je prens $y+\frac{4}{3}$ quatre fois, ce qui donnera $\frac{16}{3}$ de plus; duquel retranchez $\frac{1}{3}$ de défaut, il reſtera $\frac{15}{3}$ de plus; mais prenant $a-\frac{5}{3}$ encore trois fois, ce qui fera $\frac{15}{3}$ de défaut, il n'y aura plus ni excès, ni défaut, & le mélange ſera $4a+5y=9m$.

Où l'on voit que j'ai ajouté $y+\frac{4}{3}$ autant de fois que le numérateur 5 du défaut $\frac{1}{3}$ contient d'unités, & que j'ai ajouté $a-\frac{5}{3}$ autant de fois que le numérateur 4 de l'excès $\frac{4}{3}$ contient d'unités, & cela eſt une régle générale lorſqu'il ne s'agit que de deux grandeurs à allier; ainſi l'on fera les autres alliages qu'on voit ici de la même façon.

Et pour faire le mélange de la premiere avec la ſeconde, & la troiſiéme, j'écris $a-\frac{5}{3}+z+\frac{1}{3}+y+\frac{4}{3}=3m$, & la ſomme des excès étant compenſée par le défaut $\frac{5}{3}$, j'efface les uns & les autres, & le mélange eſt $a+z+y=3m$.

De même, pour mélanger la premiere avec la ſeconde & qua-

triéme, j'écris $a-\frac{1}{3}+z+\frac{1}{3}+x+\frac{7}{3}=3m$ où la ſomme des excès eſt $\frac{8}{3}$, de laquelle ôtant le défaut $\frac{1}{3}$, reſte $\frac{1}{3}$ de plus; prenant donc $a-\frac{1}{3}$ une fois, nous aurons $\frac{1}{3}$ de défaut; ainſi prenant deux fois $z+\frac{1}{3}$ les défauts & les excès diſparoîtront, & ce mélange ſera $2a+3z+x=6m$. On fera de la même façon le dernier mélange $3a+2y+x=6m$, en obſervant toujours de ne prendre d'abord chaque grandeur qu'une fois, & de n'en ajouter qu'autant qu'il en faut pour faire diſparoître les excès & les défauts, attendu que ces mélanges doivent être les moindres que l'on puiſſe faire.

Ces petits mélanges étant faits, je prens le premier mélange que nous avons d'abord fait, & que j'appellerai le moindre mélange total, parce qu'il contient les quatre dépenſes, & j'y ajoute autant des autres mélanges qu'il en faut pour faire en tout $30m$.

Ainſi prenant deux fois le moindre total, une fois le ſecond & une fois le quatriéme, j'ai $11a+9z+8y+2x=30m$, ce qui réſout la queſtion; & par conſéquent, il y avoit onze hommes, neuf femmes, huit enfans & deux domeſtiques.

De même prenant une fois le moindre total, une fois le premier, une fois le quatriéme, une fois le cinquiéme & une fois le ſixiéme, j'ai $10a+13z+4y+3x=30m$, ce qui réſout encore la queſtion.

$3a+4z+y+x=9m$	mélange total.
$3a+4z+y+x=9m$	
$4a+5y=9m$	ſecond mélange.
$a+z+y=3m$	quatriéme mélange.
$11a+9z+8y+2x=30m$	réſolution.

De même, prenant une fois le moindre total, une fois le ſecond, une fois le cinquiéme & une fois le ſixiéme, j'ai $12a+7z+8y+3x=30m$, qui eſt une troiſiéme réſolution.

$3a+4z+y+x=9m$	mélange total.
$a+5z=6m$	premier mélange.
$a+z+y=3m$	quatriéme mélange.
$2a+3z+x=6m$	cinquiéme mélange.
$3a+2y+x=6m$	ſixiéme mélange.
$10a+13z+4y+3x=30m$	réſolution.

Et prenant une fois le moindre total, une fois le troiſiéme, une fois le quatriéme & une fois le cinquiéme, j'ai $13a+8z+2y+7x=30m$, qui eſt une quatriéme réſolution; & mettant dans celle-ci le ſixiéme mélange au lieu du cin-

$12a+7z+8y+3x=30m$	troiſiéme réſolut.
$13a+8z+2y+7x=30m$	quatriéme réſolut.
$14a+5z+4y+7x=30m$	cinquiéme réſolut.
$12a+10z+2y+6x=30m$	ſixiéme réſolut.
&c.	

quiéme, j'ai $14a+5x+4y+7x=30m$, cinquiéme réſolution.

Et mettant dans celle-ci le premier mélange au lieu du ſixiéme, j'ai $12a+10z+2y+6x=30m$, ſixiéme réſolution.

Et l'on prendra de la même façon grand nombre d'autres réſolutions, en obſervant toujours que dans chacune de ces réſolutions le moindre total y ſoit au moins une fois, parce que ce mélange eſt le ſeul qui contienne les quatre dépenſes, & qu'il faut que dans la réſolution chaque dépenſe ſe trouve.

Et ſi après avoir trouvé toutes les réſolutions poſſibles par cette voïe, on en vouloit encore d'autres, on prendroit les quatre dépenſes $a=\frac{15}{3}$, $z=\frac{9}{3}$, $y=\frac{6}{3}$ & $x=\frac{3}{3}$, on les compareroit enſemble, de façon que deux valuſſent toujours le double d'une; ainſi on auroit $a+x=2z$ & $z+x=2y$, après quoi prenant une réſolution déja trouvée par la voïe précédente, comme, par exemple, la cinquiéme ci-deſſus, on mettroit $2z$ au lieu de $a+x$, une fois, deux fois, trois fois, &c. juſqu'à ſix fois, parce qu'il faut laiſſer au moins un a & un x, & qu'il n'y a que $7x$ dans cette réſolution, & l'on auroit ſix nouvelles réſolutions, comme on voit ici.

Et ſubſtituant de même $2z$ pour $a+x$ dans la quatriéme réſolution ci-deſſus, on trouveroit ſix autres réſolutions, & dans la ſixiéme on en trouveroit cinq autres, & dans la troiſiéme deux autres, &c.

$13a+7z+4y+6x=30m$	ſeptiéme réſolut.
$12a+9z+4y+5x=30m$	huitiéme réſolut.
$11a+11z+4y+4x=30m$	neuviéme réſolut.
$10a+13z+4y+3x=30m$	dixiéme réſolut.
$9a+15z+4y+2x=30m$	onziéme réſolut.
$8a+17z+4y+x=30m$	douziéme réſolut.

De même, ſubſtituant $2y$ au lieu de $z+x$ dans la quatriéme réſolution, on trouveroit ſix nouvelles réſolutions; & dans la cinquiéme, on en trouveroit quatre; & dans la ſixiéme, on en trouveroit cinq, & ainſi des autres; ce qui peut varier extrêmement lorſque la queſtion propoſée comprend un plus grand nombre de perſonnes.

ONZIE'ME EXEMPLE.

Il y a un certain nombre de loüis dans une bourſe, & l'on dit que ſi on diviſe ce nombre par 7, il ne reſte rien; ſi on le diviſe par 6, il reſte 5; ſi on le diviſe par 5, il reſte 2, & ſi on le diviſe par 4, il reſte 1: quel eſt ce nombre?

J'appelle x le quotient de la diviſion par 7; z celui de la diviſion par 6; y celui de la diviſion par 5, & v celui de la diviſion par 4, ainſi j'ai $7x=6z+5=5y+2=4v+1$: or la premiere équa-

tion me fait voir qu'il faut que je prenne un nombre qui ſoit diviſible exactement par 7, & duquel retranchant 5, le reſte ſoit $7x=6z+5=5y+2=4v+1$ diviſible par 6, & comme $7=6+1$, ſi je prens 5 fois 7, j'aurai $35=5\times6+5=30+5$; deſorte que 35 diviſé par 7 ne laiſſera rien, & diviſé par 6 il laiſſera 5: voilà donc déja la premiere condition du problême remplie.

Pour remplir la ſeconde, je vois qu'il faut que le nombre que je cherche diviſé par 5 laiſſe 2, & 35 diviſé par 5 ne laiſſe rien; mais comme $7=5+2$, il faut que je prenne 7 un certain nombre de fois, enſorte que ce multiple diviſé par 5 laiſſe 2, & cependant qu'étant diviſé par 6 il laiſſe 5; ainſi je multiplie 7 par 6, ce qui fait $42=6\times5+6\times2=30+12=42$, & ce nombre diviſé par 5 laiſſe 2; car 30 diviſé par 5 ne laiſſe rien, & 12 diviſé par 5 laiſſe 2, & le même nombre 42 diviſé par 7 ne laiſſe rien; mais comme étant diviſé par 6 il ne laiſſe rien, au lieu qu'il devoit laiſſer 5; j'ajoute 42 au premier nombre trouvé 35, ce qui fait 77, & ce nombre remplit les deux premieres conditions, à cauſe que 35 diviſé par 5 ne laiſſoit rien.

Enfin pour remplir la troiſiéme, je diviſe 77 par 4, & trouvant qu'il laiſſe 1, ainſi qu'il eſt propoſé par le problême, je vois que 77 eſt le nombre de loüis contenu dans la bourſe.

On voit ici que pour trouver le premier nombre 35, après avoir fait l'équation $7=6+1$, j'ai cherché un nombre, qui, multipliant cette équation, donnât 5 au lieu de +1 qui eſt au ſecond membre; car il eſt viſible qu'après cette multiplication, le premier membre ſera diviſible par 7, au lieu que le ſecond diviſé par 6 laiſſera 5.

Enſuite pour trouver le ſecond nombre 42, après avoir fait l'équation $7=5+2$, j'ai cherché un nombre, qui, multipliant cette équation, augmentât +2 qui eſt dans le ſecond membre de telle façon, qu'étant diviſé par 5 après cette augmentation, il laiſsât 2; & comme un multiplicateur pair eſt plus commode pour cela, j'ai pris le nombre 6, d'autant mieux qu'après la multiplication, l'équation diviſée par 7 ne laiſſera rien, par 6 ne laiſſera rien, & par 5 elle laiſſera 2; après quoi ajoutant le produit 42 au produit précédent 35, qui diviſé par 5 ne laiſſe rien, il eſt viſible que les deux premieres conditions ont dû être remplies; quant à la troiſiéme, elle s'eſt trouvée d'elle-même; & par conſéquent la queſtion eſt réſoluë.

On peut toujours réſoudre les queſtions de cette nature par la même méthode ; mais comme il arrive quelquefois que ces recherches fatiguent beaucoup, on peut s'en diſpenſer, en prenant tous les multiples du diviſeur exact, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui diviſé par les autres diviſeurs, laiſſe les reſtes propoſés. Ainſi dans la queſtion préſente, on fera les multiples de 7 qui ſont 14, 21, 28, 35, &c. & l'on tentera ſur chacun d'eux la diviſion par 6, par 5 & par 4, juſqu'à ce qu'on trouve le multiple 77, qui diviſé par ces trois nombres, laiſſe les trois reſtes 5, 2 & 1, portés par les conditions du problême.

7
14
21
28
35
42
49
56
63
70
77

Et ſi l'on propoſoit la queſtion, enſorte qu'il n'y eût point de diviſeur exact, mais que chaque diviſeur laiſsât un reſte, comme, par exemple, ſi l'on demandoit de trouver un nombre, qui diviſé par 7 laiſsât 1, par 5 il laiſsât 3, par 4 il laiſsât 2 & par 3 il laiſsât 1, on appelleroit le quotient du premier diviſeur x, celui du ſecond z, celui du troiſiéme y & celui du quatriéme v ; ainſi on auroit $7x+1=5z+3=4y+2=3v+1$; & retranchant 1 de toutes parts, on auroit $7x=5z+2=4y+1=3v$; & par conſéquent il s'agiroit de chercher un nombre, qui diviſé par 7 ne laiſsât rien, par 5 il laiſsât 2, par 4 il laiſsât 1, & par 3 il ne laiſsât rien ; & le nombre 7 remplit d'abord la premiere condition, car ce nombre diviſé par 5 laiſſe 2.

Et pour la ſeconde, comme $7=4+3$, & que le nombre 7 que nous avons pris pour la premiere diviſion diviſé par 4 laiſſe 3 au lieu de 1 qu'il faudroit qu'il laiſsât, ce qui fait 2 de plus qu'il ne faut, il faut que je multiplie cette équation par un nombre qui augmente $+3$ qui eſt dans le ſecond membre ; deſorte qu'étant diviſé par 4, il laiſſe 3, lequel ajouté au reſte 2 que j'ai déja, fera 5, qui diviſé par 4 laiſſe un, comme on le demande : c'eſt pourquoi je multiplie l'équation par 5, & j'ai $35=4\times5+3\times5=20+15$; & ajoutant le premier 7 à 35, j'ai 42, qui diviſé par 7 ne laiſſe rien, par 5 laiſſe 2 & par 4 laiſſe 1. Voilà donc les deux premieres conditions.

Et pour remplir la quatriéme condition, je diviſe 42 par 3, & je trouve qu'il ne laiſſe rien, c'eſt pourquoi toutes les conditions ſont remplies ; ainſi j'ai 42, qui diviſé par 7 & par 3 ne laiſſe rien, & diviſé par 5 il laiſſe 2, & diviſé par 4 il laiſſe 1 ; mais comme on demandoit que ce nombre diviſé par 7 laiſsât 1, par 5 il laiſsât

3, par 4 il laiſsât 2, & par 3 il laiſsât 1, j'augmente 42 d'une unité, ce qui fait 43, & ce nombre eſt celui qu'on demande.

DOUZIE'ME EXEMPLE.

Une femme aïant porté des œufs au marché en a vendu à une perſonne la moitié de ce qu'elle avoit, plus la moitié d'un œuf; enſuite elle a vendu à une autre la moitié de ſon reſte, plus la moitié d'un œuf; & enfin à une troiſiéme la moitié du reſte, plus la moitié d'un œuf, & cependant chacune de ces perſonnes en a emporté un nombre entier: l'on demande comment cela a pû ſe faire?

Suppoſons x le nombre d'œufs que la femme a porté au marché, la premiere vente ſera donc $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, & ſon premier reſte $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; donc ſa ſeconde vente ſera $\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$; & ſi du premier reſte $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ nous ôtons cette ſeconde vente $\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$, le ſecond reſte ſera $\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$, & la troiſiéme vente ſera $\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$, & réduiſant toutes les fractions au même dénominateur 8, les trois ventes ſeront $\frac{4}{8}x+\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}x+\frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$; & ajoutant ces trois ventes enſemble, la vente totale ſera $\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}$; ainſi cette vente ſera égale aux trois partiales, & nous aurons l'équation qu'on voit ici; & multipliant tout par 8, & ôtant 7 de part & d'autre, nous aurons $7x=4x+2x+x$; & diviſant tout par x, nous aurons $7=4+2+1$, c'eſt-à-dire, la vente totale 7 égale aux trois ventes particulieres 4, 2 & 1, & la premiere vente 4 eſt la moitié de 7, plus $\frac{1}{2}$; car la moitié de 7 eſt $3\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$ fait 4; ainſi le premier reſte a été trois, dont la moitié eſt $1\frac{1}{2}$; à quoi ajoutez $\frac{1}{2}$, vous aurez 2 qui eſt la ſeconde vente; & ſi du premier reſte 3 vous ôtez la ſeconde vente 2, le reſte ſera 1, dont la moitié eſt $\frac{1}{2}$, à laquelle ajoutez $\frac{1}{2}$, la troiſiéme vente eſt 1; & par conſequent chaque perſonne a emporté un nombre entier d'œufs.

$$\begin{array}{rl} \frac{4}{8}x+\frac{4}{8} & \text{premiere vente.} \\ \frac{2}{8}x+\frac{2}{8} & \text{ſeconde vente.} \\ \frac{1}{8}x+\frac{1}{8} & \text{troiſiéme vente.} \\ \hline \frac{7}{8}x+\frac{7}{8} & \text{vente totale.} \end{array}$$

$$\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}=\frac{4}{8}x+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}x+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$$
$$7x+7=4x+4+2x+2+1x+1$$
$$7x=4x+2x+1x$$
$$7=4+2+1$$

Et comme ce problême eſt indéterminé, ſi l'on veut en avoir d'autres réſolutions, on obſervera que le dénominateur 8 de la

vente totale $\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}$ eſt le cube du nombre 2, & que ſon numérateur 7 eſt égal à ce cube, moins 1 : donc ſi l'on multiplie le dénominateur 8 par 2, par 3, par 4, par 5, &c. à l'infini, & que de chaque produit on retranche l'unité, les reſtes 15, 23, 31, 39, &c. ſatisferont de même à la queſtion ; car ſi l'on ſuppoſe que la femme aïe porté 15 œufs au lieu de 7, la premiere vente ſera $7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 8, & le premier reſte ſera 7 : donc la ſeconde vente ſera $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 4, & le ſecond reſte ſera 3 ; & par conſéquent la troiſiéme vente ſera $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 2, & les trois ventes 8, 4, 2, ne faiſant que 14, il reſtera un œuf à cette femme.

De même ſi nous ſuppoſons le nombre d'œufs 23, la premiere vente ſera $11\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 12, & le premier reſte ſera 11 : donc la ſeconde vente $5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=6$, & le ſecond reſte ſera 5 ; ainſi la troiſiéme vente ſera $2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$; & comme ces trois ventes 12, 6, 3, ne font que 21, il reſtera deux œufs à cette femme ; & ainſi des autres.

Que ſi on nous diſoit que cette femme a vendu à une quatriéme perſonne la moitié de ſon troiſiéme reſte, plus la moitié d'un œuf, & que toutes les quatre perſonnes en ont emporté chacune un nombre entier ; retranchant la troiſiéme vente $\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$ du ſecond reſte $\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$, nous aurions $\frac{1}{8}x-\frac{7}{8}$ qui ſeroit le troiſiéme reſte ; & la quatriéme vente ſeroit par conſéquent $\frac{1}{16}x-\frac{7}{16}+\frac{1}{2}=\frac{1}{16}x+\frac{1}{16}$; & réduiſant les fractions des trois reſtes précédens au dénominateur commun 16, nous aurions pour la vente totale $\frac{15}{16}x+\frac{15}{16}$ où le dénominateur 16 eſt la quatriéme puiſſance de 2, & le numérateur eſt cette même quatriéme puiſſance diminuée de l'unité.

$\frac{8}{16}x+\frac{8}{16}$	premiere vente.
$\frac{4}{16}x+\frac{4}{16}$	ſeconde vente.
$\frac{2}{16}x+\frac{2}{16}$	troiſiéme vente.
$\frac{1}{16}x+\frac{1}{16}$	quatriéme vente.
$\frac{15}{16}x+\frac{15}{16}$	vente totale.

Ainſi ſuppoſant 15 pour le nombre des œufs portés au marché, la premiere vente ſeroit $7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$, & le premier reſte ſeroit 7 : donc la ſeconde vente ſeroit $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$, le ſecond reſte 3 ; ainſi la troiſiéme vente ſeroit $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$, & le troiſiéme reſte ſeroit 1 ; & par conſéquent la quatriéme vente ſeroit $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, & il ne reſteroit rien.

Et pour avoir d'autres réſolutions, on multiplieroit le dénominateur 16 par 2, par 3, par 4, &c. & ôtant de chaque produit l'unité, les reſtes 31, 47, 63, &c. ſatisferoient également à la queſtion, en ſuppoſant que chacun d'eux repréſentât ſucceſſivement le nombre d'œufs portés au marché.

Et ſi on ajoutoit encore que cette femme a vendu à une cinquiéme perſonne la moitié de ſon quatriéme reſte, plus un œuf, & que chacun en a cependant emporté un nombre entier; on trouveroit, en agiſſant comme ci-deſſus, que la ſomme totale des reſtes ſeroit $\frac{31}{32}x+\frac{31}{32}$: donc le dénominateur 32 eſt la cinquiéme puiſſance de 2, & le numérateur 31 eſt cette même cinquiéme puiſſance, moins l'unité.

$\frac{16}{32}x+\frac{16}{32}$	premiere vente.
$\frac{8}{32}x+\frac{8}{32}$	ſeconde vente.
$\frac{4}{32}x+\frac{4}{32}$	troiſiéme vente.
$\frac{2}{32}x+\frac{2}{32}$	quatriéme vente.
$\frac{1}{32}x+\frac{1}{32}$	cinquiéme vente.
$\frac{31}{32}x+\frac{31}{32}$	vente totale.

D'où l'on tire une régle générale, *que pour trois perſonnes, il faut prendre le cube de 2, ou ſes multiples; & que ce cube ou ſes multiples diminués de l'unité, donneront autant de réſolutions que l'on voudra en trouver, que pour quatre perſonnes, il faut prendre la quatriéme puiſſance de deux, ou ſes multiples, & diminuer cette quatriéme puiſſance, ou ſes multiples d'une unité; que pour cinq perſonnes, il faut prendre la cinquiéme puiſſance de 2, ou ſes multiples, &c. deſorte que la puiſſance de deux qu'il faut prendre eſt toujours exprimée par le nombre de perſonnes.*

Suppoſons, par exemple, huit perſonnes à qui cete femme eût vendu, toujours de la même façon, je prens la huitiéme puiſſance de 2, qui eſt 256, je la diminuë d'une unité, & le reſte 255 étant pris pour le nombre d'œufs portés au marché, ſatisfait à la queſtion; car la premiere vente ſeroit $127\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=128$, & le premier reſte 127; la ſeconde vente ſeroit $63\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=64$, & le ſecond reſte 63; la troiſiéme vente ſeroit $31\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=32$, & le troiſiéme reſte 31; la quatriéme vente ſeroit $15+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}16$, & le quatriéme reſte 15; la cinquiéme vente ſeroit $7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$, & le cinquiéme reſte 7; la ſixiéme vente ſeroit $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=4$, & le ſixiéme reſte 3; la ſeptiéme vente ſeroit $1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$, & le ſeptiéme reſte 1; enfin, la huitiéme vente ſeroit $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, & il ne reſteroit rien.

$\frac{128}{256}x+\frac{128}{256}$	premiere vente.
$\frac{64}{256}x+\frac{64}{256}$	ſeconde vente.
$\frac{32}{256}x+\frac{32}{256}$	troiſiéme vente.
$\frac{16}{256}x+\frac{16}{256}$	quatriéme vente.
$\frac{8}{256}x+\frac{8}{256}$	cinquiéme vente.
$\frac{4}{256}x+\frac{4}{256}$	ſixiéme vente.
$\frac{2}{256}x+\frac{2}{256}$	ſeptiéme vente.
$\frac{1}{256}x+\frac{1}{256}$	huitiéme vente.
$\frac{255}{256}x+\frac{255}{256}$	vente totale.

Et ſi je voulois d'autres réſolutions, je prendrois ſucceſſivement les

les multiples du dénominateur 256; & retranchant 1 de chaque multiple, chaque reſte ſatisferoit à la queſtion, en le prenant ſucceſſivement pour le nombre d'œufs portés au marché.

Où l'on doit obſerver que la premiere vente eſt toujours égale à la moitié du dénominateur; la ſeconde à la moitié de cette moitié, c'eſt-à-dire au quart du dénominateur; la troiſiéme à la moitié de ce quart, c'eſt-à-dire au huitiéme du dénominateur; & ainſi de ſuite, prenant toujours la moitié de la derniere moitié; & ceci facilite encore les différentes réſolutions; car ſi je prens le double 512 du dénominateur 256, & qu'en aïant retranché l'unité, je prenne le reſte 511 pour le nombre d'œufs portés au marché, je vois que la premiere vente ſera la moitié du dénominateur 512, c'eſt-à-dire 256; par conſéquent la ſeconde étant la moitié de celle-ci, ſera 128; la troiſiéme étant la moitié de la ſeconde, ſera 64; la quatriéme 32; la cinquiéme 16; la ſixiéme 8; la ſeptiéme 4, & la huitiéme 2; & ces huit ventes ne faiſant que 510, il reſteroit un œuf à cette femme, & ainſi des autres.

TREIZIE'ME EXEMPLE.

Trois femmes ont vendu au marché, à un même prix, l'une 10 *pommes; l'autre* 25, *& l'autre* 30; *& cependant chacune en a rapporté la même ſomme d'argent: on demande comment cela a-pû arriver?*

Ce problême, de la façon dont il eſt énoncé, paroît d'abord impoſſible; mais ſi l'on ajoute, comme on devroit ajouter, que ces femmes ont vendu à diverſes repriſes, & chaque fois à divers prix, quoique chaque fois elles aïent vendu chacune au même prix; dès-lors on ſent bien que l'une pouvant avoir vendu plus ou moins que les autres la premiere fois, il peut s'être fait une compenſation qui rende égale la vente totale, & il ne s'agit plus que d'en trouver la ſolution.

Monſieur Ozanam l'a donnée dans ſon premier volume des Récréations Mathématiques, & je crois qu'on ne ſera pas fâché de trouver ici les explications dont elle peut avoir beſoin.

Appellons donc x le nombre des pommes que la premiere femme a vendu la premiere fois; v le prix auquel elle les a venduës, & p le prix auquel elle a vendu ſon reſte la ſeconde fois, lequel reſte ſera par conſéquent $10-x$; ainſi multipliant x par v, & $10-x$ par p, la ſomme totale qu'elle aura remportée ſera $vx+10p-px$.

Appellons de même z le nombre des pommes que la ſeconde femme a vendu la premiere fois ; v le prix auquel elle les a venduës, puiſque ce doit être le même que celui auquel la premiere femme a vendu, & par conſéquent p le prix auquel elle a vendu ſon reſte, qui eſt $25-z$; ainſi multipliant z par v, & $25-z$ par p, la ſomme totale qu'elle aura remportée ſera $zv+25p-pz$.

Par la même raiſon, nommons y le nombre des pommes venduës la premiere fois par la troiſiéme femme, ſon reſte ſera $30-y$, & la ſomme totale qu'elle aura remportée ſera $yv+30p-py$.

Et comme ces trois ſommes totales ſont égales, nous aurons les trois valeurs ſuivantes qui forment trois équations.

Et prenant la premiere équation, j'en retranche $10p$ de part & d'autre, & j'ai $vx-px=vz-pz+15p$; & diviſant par $v-p$, j'ai $x=z+\frac{15p}{v-p}$, premiere valeur de v.

Et comparant la ſomme totale de la premiere femme, avec celle de la troiſiéme, j'en tire une ſeconde valeur de x, en retranchant d'abord $10p$ de part & d'autre & diviſant par $v-p$, & j'ai $x=y+\frac{20p}{v-p}$.

$$vx+10p-px=vz+25p-pz=vy+30p-py$$
$$vx+10p-px=vz+25p-pz$$
$$vx-px=vz+15p-pz=vz-pz+15p$$
$$x=z+\frac{15p}{v-p}$$ premiere valeur de x.

$$vx+10p-px=vy+30p-py$$
$$vx-px=vy-py+20p$$
$$x=y+\frac{20p}{v-p}$$ ſeconde valeur de x.

Et comparant enſemble ces deux valeurs de x, j'en retranche $\frac{15p}{v-p}$ de part & d'autre, & j'ai $z=y+\frac{5p}{v-p}$ valeur de z ; & comme je trouverois la même valeur de z, ſi je comparois la ſomme totale de la ſeconde femme avec celle de la troiſiéme, toutes les conditions du problême ſont remplies, & les grandeurs y, p & v ſont arbitraires ; mais comme z marque le nombre de pommes que la ſeconde femme a vendu la premiere fois, z eſt par conſéquent un nombre entier, attendu qu'on ne vend pas des fractions de pommes ; ainſi ſa valeur $y+\frac{5p}{v-p}$ doit être un nombre entier, & la grandeur y étant

$$z+\frac{15p}{v-p}=y+\frac{20p}{v-p}$$
$$z=y+\frac{5p}{v-p}$$ valeur de z.

un nombre entier, puiſqu'elle marque le nombre de pommes que la troiſiéme femme a vendu la premiere fois, il faut néceſſairement que la fraction $\frac{5p}{v-p}$ ſoit un nombre entier. Suppoſant donc $\frac{5p}{v-p}=1$, & multipliant par $v-p$, nous aurons $5p=v-p$; & ajoutant p de part & d'autre, nous aurons $6p=v$; & faiſant encore $p=1$, nous aurons $6=v$; mettant ces valeurs de v & de p dans la valeur de z, nous aurons $z=y+\frac{5p}{v-p}=y+\frac{5}{6-1}=y+1$; & mettant cette valeur de z, & celles de v & p dans les deux valeurs de x déja trouvées, nous aurons $x=z+\frac{15p}{v-p}=y+1+\frac{15}{6-1}=y+4$; & de même $x=y+\frac{20p}{v-p}=y+\frac{20}{6-1}=y+4$; ainſi les deux valeurs de x ſe réduiſent à une ſeule $x=y+4$; & pour déterminer la grandeur arbitraire y, je ſuppoſe $y=1$, & par conſéquent $z=y+1=2$, & $x=y+4=5$: les trois arbitraires y, p, v ſont donc 1, 1 & 6, & les valeurs de z & de x ſont 2 & 5.

Mettant donc ces valeurs dans les ſommes totales des trois femmes, nous trouverons que chaque femme aura remporté 35 deniers, en ſuppoſant que le premier prix a été 6 deniers & le ſecond 1 den. & que la troiſiéme femme en a vendu une la premiere fois.

$vx+10p+px=30+10-5=35$ deniers.	ſomme de la premiere.
$vz+25p-pz=12+25-2=35$	ſomme de la ſeconde.
$vy+30p-py=6+30-1=35$	ſomme de la troiſiéme.

Et ſi nous ſuppoſons que cette femme en ait vendu deux la premiere fois, c'eſt-à-dire $y=2$, nous aurons $z=y+1=3$ & $x=y+4=6$; & mettant ces valeurs de y, z, x, p & v dans les ſommes ci-deſſus, nous trouverons que chaque femme a remporté quarante deniers.

$vx+10p-px=36+10-6=40$	deniers
$vz+25p-pz=18+25-3=40$	
$vy+30p-py=12+30-2=40$	

Et ſuppoſant de même $y=3$, $y=4$, $y=5$, $y=6$, je trouverois quatre autres ſolutions; après quoi, comme en ſuppoſant $y=6$ nous avons $x=10$, nous ne pourrions plus ſuppoſer $y=7$, ni $y=8$, &c. parce que x étant le nombre que la premiere femme a vendu la premiere fois, & cette femme n'aïant en tout que 10 pommes, x ne peut être égal tout au plus qu'à 10.

Mais si nous voulions trouver d'autres solutions, au lieu de supposer, comme nous avons fait $\frac{5p}{v-p}=1$, nous ferions $\frac{5p}{v-p}=2$; & multipliant par $v-p$, nous aurions $5p=2v-2p$ ou $7p=2v$; & faisant $p=2$, nous aurions $14=2v$, ou divisant par 2, $7=v$; & mettant ces valeurs de p & de v dans celles de x & de z, nous aurions $x=z+\frac{15p}{v-p}=z+\frac{30}{5}=z+6, x=y+\frac{20p}{v-p}=y+\frac{40}{5}=y+8$, & $z=y+\frac{5p}{v-p}=y+\frac{10}{5}=y+2$.

Et supposant $y=1$, nous aurions $z=3$ & $x=9$; & mettant ces valeurs de y, p, v, z & x dans les sommes ci-dessus, nous trouverions que chaque femme auroit remporté 65 deniers.

$$vx+10p-px=63+20-18=65$$
$$vz+25p-pz=21+50-6=65$$
$$vy+30p-py=7+60-2=65$$

Et supposant encore $y=2$, nous aurions une autre solution, après laquelle nous ne pourrions plus supposer $y=3$, ni $y=4$, &c. parce que celle-ci donneroit $x=10$.

Au reste, on en auroit encore trouvé deux en supposant ci-dessus $y=0$.

De la résolution des équations composées du second & du troisiéme degré.

XXVII. Pour bien comprendre la nature & la formation des équations composées, il faut d'abord faire passer toutes les grandeurs qui les composent d'un même côté, ensorte que le second membre soit zero, & considérer ensuite ces équations comme étant le produit de deux ou de plusieurs équations simples.

Si nous supposons d'une part $x=a$, & de l'autre $x=b$; & qu'aïant tout fait passer d'un même côté, nous multiplions $x-a=0$ par $x-b=0$, nous aurons $xx-ax+ab=0$ qui est une équation du second degré, où nous avons mis $-ax$ & $-bx$ l'un sous l'autre, parce que l'inconnuë x étant au même degré dans l'un & dans l'autre, ces deux termes n'en forment qu'un, ce qu'il faut toujours observer.

On dit qu'une équation est *ordonnée* lorsqu'on range ses termes de telle sorte, que celui où se trouve le plus haut degré de l'inconnuë est le premier, que le second est celui où l'inconnuë est au degré immédiatement inférieur, & ainsi de suite jusqu'au dernier terme qui ne contient que des grandeurs connuës; ainsi l'équation $x^3+axx+aax+ab=0$ est une équation ordonnée: & ainsi des autres.

Les équations ſimples, qui en ſe multipliant produiſent les équations compoſées, s'appellent *les racines* de ces équations ; & ces racines peuvent être ou poſitives, ou négatives, $x=a$ ou $x-a=0$ eſt une racine poſitive ; au contraire $x=-a$ ou $x+a=0$ eſt une racine négative.

Lorſque les deux racines d'une équation du ſecond degré ſont poſitives, les termes de l'équation ont alternativement les ſignes plus ou moins.

Lorſqu'elles ſont toutes deux négatives, tous les termes ont le ſigne plus.

Et ſi l'une des racines eſt négative, & l'autre eſt poſitive, le troiſiéme terme a toujours le ſigne moins ; & le ſecond a le ſigne moins, lorſque la racine poſitive eſt plus grande que la négative, & le ſigne plus, lorſque la négative eſt plus grande que la poſitive ; tout cela eſt évident par la formation même des équations, comme on le voit ici ; où l'on doit encore obſerver que ſi la négative eſt égale à la poſitive, le ſecond terme manque, & le troiſiéme a le ſigne moins.

Lorſqu'il manque un terme dans une équation, on met à ſa place une petite étoile ou un aſcétique.

Quand les deux racines ſont toutes deux poſitives, ou toutes deux négatives, le coefficient du ſecond terme de l'équation eſt la ſomme des deux grandeurs connuës des racines compoſantes, & quand l'une eſt poſitive & l'autre eſt négative, le coefficient du ſecond terme eſt la différence des deux grandeurs connuës, & le troiſiéme terme eſt toujours un produit de ces deux grandeurs.

Ordinairement, pour abréger & rendre l'expreſſion plus nette, on ſuppoſe n égal au coefficient du ſecond terme, & p égal au troiſiéme terme ; ainſi tous

$$x-a=0$$
$$x-b=0$$
$$xx-ax$$
$$-bx+ab$$
$$xx-ax+ab=0$$
$$-bx$$

$$x+a=0$$
$$x+b=0$$
$$xx+ax+ab=0$$
$$+bx$$

$$x-4=0$$
$$x+2=0$$
$$xx-4x$$
$$+2x-8$$
$$xx-2x-8=0$$

$$x+4=0$$
$$x-2=0$$
$$xx+4x$$
$$-2x-8$$
$$xx+2x-8=0$$

$$x+4=0$$
$$x-4=0$$
$$xx+4x$$
$$-4x-16$$
$$xx \ast -16=0$$

les cas du ſecond degré ſe réduiſent aux quatre formules ſuivantes.

1e Cas.	2e Cas	3e Cas.	4e Cas.
$xx-nx+p=0$	$xx+nx+p=0$	$xx-nx-p=0$	$xx+nx-p=0$

La premiere, marque que les deux racines ſont poſitives; la ſeconde, qu'elles ſont négatives; la troiſiéme, que l'une eſt poſitive & l'autre négative, mais que la poſitive ſurpaſſe la négative; & la quatriéme, que la négative ſurpaſſe la poſitive.

Je ne parle point ici du cinquiéme cas où le ſecond terme eſt évanoüi, parce que la réſolution en eſt très-facile, n'y aïant qu'à faire paſſer la grandeur connuë de l'autre côté, & tirer enſuite la racine quarrée; ainſi ſi l'équation eſt $xx-16=0$, on aura $xx=16$ & $x=4$, qui ſera la racine poſitive, & $x=-4$ qui ſera la négative.

Lorſque les trois racines d'une équation du troiſiéme degré ſont poſitives, les termes de l'équation ont alternativement le ſigne plus & le ſigne moins.

Lorſqu'elles ſont toutes trois négatives, tous les termes ont le ſigne plus.

Si deux racines ſont poſitives, & la troiſiéme eſt négative, le dernier terme a toujours le ſigne plus; le ſecond a le ſigne moins, ſi la ſomme des deux poſitives eſt plus grande que la négative, & le ſigne plus, ſi cette ſomme eſt moindre; de même le troiſiéme terme a encore le ſigne moins, ſi le produit des deux poſitives, l'une par l'autre, eſt moindre que le produit des deux poſitives par la négative; & il a le ſigne plus, ſi le produit des deux poſitives, l'une par l'autre, eſt plus grand que celui des deux poſitives par la négative.

$$\begin{array}{l} x-a=0 \\ x-b=0 \\ \hline xx-ax+ab \\ \quad -bx \\ x-c=0 \\ \hline x^3-axx+abx-abc=0 \\ \quad -bxx+acx \\ \quad -cxx+cbx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+a=0 \\ x+b=0 \\ \hline xx+ax+ab \\ \quad +bx \\ x+c=0 \\ \hline x^3+axx+abx+abc=0 \\ \quad +bxx+acx \\ \quad +cxx+cbx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x-a=0 \\ x-b=0 \\ \hline xx-ax+ab \\ \quad -bx \\ x+c=0 \\ \hline x^3-axx+abx+abc=0 \\ \quad -bxx-acx \\ \quad +cxx-bcx \end{array}$$

Si deux racines ſont négatives & l'autre eſt poſitive, le troiſiéme terme a toujours le ſigne moins; le ſecond a le ſigne plus quand la ſomme des négatives eſt plus grande que la poſitive, & le ſigne moins quand cette ſomme eſt moindre; & le troiſiéme a le ſigne moins, quand le produit de la poſitive, par les deux négatives, eſt plus grand que le produit des négatives, l'une par l'autre; & il a le ſigne plus quand il arrive le contraire.

$x+a=0$
$x+b=0$

$xx+ax+ab$
$+bx$

$x-c=0$

$x^3+axx+abx-acb=0$
$-acx$
$+bxx-bcx$
$-cxx$

Cependant, comme il eſt rare que la ſomme de deux racines n'excéde pas la troiſiéme; & que le produit des deux racines, par une troiſiéme, n'excéde pas le produit de deux l'une par l'autre, on peut regarder comme une régle générale, qu'autant de fois qu'on trouve le même ſigne dans deux termes qui ſe ſuivent, autant il y a de racines négatives; ainſi dans ce dernier cas, il y a deux racines négatives, parce que le premier & le ſecond terme ont le ſigne plus, & que le troiſiéme & le quatriéme ont le ſigne moins.

$x+6=0$
$x-2=0$

$xx+6x$
$-2x-12$
$x-4=0$

$x^3+6xx-12x+48$
$-2xx-24x$
$-4xx+8x$

$x^3 * -28x+48=0$

Et dans le cas précédent, il n'y a qu'une racine négative, parce qu'il n'y a que le ſecond & le troiſiéme terme qui aïent le même ſigne moins.

Enfin, ſi la ſomme des deux poſitives eſt égale à la négative, le ſecond terme manque dans l'équation, le troiſiéme a le ſigne moins, & le dernier le ſigne plus.

Et ſi la ſomme des deux négatives eſt égale à la poſitive, le ſecond terme manque, & le troiſiéme & le quatriéme ont le ſigne moins.

$x-6=0$
$x+2=0$

$xx-6x-12$
$+2x$
$x+4$

$x^3-6xx-12x-48$
$+2xx-24x$
$+4xx+8x$

$x^3 * -28x-48=0$

Quand les trois racines ſont toutes poſitives, ou toutes négatives, le ſecond terme contient leur ſomme, le troiſiéme leurs produits alternatifs de deux en deux, & le dernier leur ſolide ou produit de toutes les trois.

Quand les unes ſont poſitives & les autres négatives, & que la ſomme des poſitives n'eſt pas égale à la négative, ou la ſomme des négatives à la poſitive, le ſecond terme contient la différence des négatives & des poſitives; le troiſiéme la différence de leurs produits alternatifs, & le dernier contient toujours leur ſolide.

Si nous faiſons n égal au coefficient du ſecond terme, p égal à celui du troiſiéme, & q égal au quatriéme terme, nous aurons les formules ſuivantes pour tous les cas du troiſiéme degré.

1e Cas.	2e Cas.	3e Cas.
$x^3 - nxx + px - q = 0$	$x + nxx + px + q = 0$	$x^3 - nxx - px + q = 0$

4e Cas.	5e Cas.
$x^3 + nxx + px - q = 0$	$x^3 * - px + q = 0$

La premiere marque que les trois racines ſont poſitives; la ſeconde qu'elles ſont toutes trois négatives; la troiſiéme qu'il y en a deux poſitives, & une négative; la quatriéme qu'il y a deux négatives, & une poſitive; & la cinquiéme que la ſomme des deux négatives eſt égale à la poſitive, ce qui eſt marqué par le ſigne plus du dernier terme; ou que la ſomme des négatives eſt égale à la poſitive, ce qui eſt marqué par le ſigne moins écrit ſous le ſigne plus du dernier terme: les deux ſignes plus & moins joints enſemble, marquent toujours deux cas.

Tout ce que nous avons dit ici, au ſujet des ſignes plus & moins, eſt également vrai, ſoit que les racines ſoient commenſurables, ſoit qu'elles ne le ſoient pas; mais il y a une autre eſpéce de racines, qu'on appelle racines *imaginaires*, qui ne ſuivent pas les mêmes régles.

Ces racines ſont appellées imaginaires, parce qu'elles contiennent des grandeurs impoſſibles, ainſi $\sqrt{-a}$ eſt une racine imaginaire; car la grandeur $-a$, qui eſt ſous le ſigne, étant un quarré, il n'eſt pas poſſible qu'il y ait aucun nombre qui produiſe un tel quarré; en effet, ſuppoſons que ſa racine ſoit y, ſi cette racine a le ſigne plus, le quarré ſera donc $+yy$, & aura le ſigne plus au lieu du ſigne moins; & ſi cette racine a le ſigne moins, le quarré aura encore

core le ſigne plus, attendu que $-y$ par $-y$, fait $+yy$ ſelon la régle de la multiplication des ſignes.

Les racines imaginaires ſont ou ſimples, ou mixtes; l'imaginaire ſimple n'a qu'un terme, & ce terme eſt ſous le ſigne radical $\sqrt{-a}$ ou $\sqrt{-4}$ ſont des imaginaires ſimples; l'imaginaire mixte contient deux termes, l'un commenſurable, & l'autre ſous le ſigne radical $a-\sqrt{-b}$ ou $b+\sqrt{-3}$ ſont des imaginaires mixtes.

Si une équation du ſecond degré, qui n'eſt affectée d'aucun ſigne radical, contient cependant quelque racine imaginaire ſimple, il faut néceſſairement que ſes deux racines ſoient imaginaires & égales, mais que l'une ait le ſigne moins devant le ſigne radical, & l'autre le ſigne plus; & alors l'équation n'a point de ſecond terme, & le troiſiéme terme a toujours le ſigne plus, à la différence du cinquiéme cas ci-deſſus, où l'équation n'aiant point de ſecond terme, le troiſiéme a le ſigne moins, à cauſe que les deux racines ſont réelles & non imaginaires.

$$\begin{array}{l} x-\sqrt{-b}=0 \\ x+\sqrt{-b}=0 \\ \hline xx-x\sqrt{-b} \\ \quad +x\sqrt{-b}+b \\ \hline xx \quad * \quad +b=0 \end{array}$$

Et pour faire voir pourquoi le troiſiéme doit toujours avoir le ſigne plus lorſque les deux racines ſont imaginaires & égales, mais avec différens ſignes devant le ſigne radical; ſuppoſons $x-\sqrt{-b}=0$ & $x+\sqrt{-b}=0$, & multiplions ces deux racines l'une par l'autre, x par x, donnera xx; enſuite x par $-\sqrt{-b}$ donnera $-x\sqrt{-b}$, mais x par $+\sqrt{-b}$ donnera $+x\sqrt{-b}$; & ces deux grandeurs $-x\sqrt{-b}$ & $+x\sqrt{-b}$ ſe détruiſant l'une & l'autre, le ſecond terme ſera nul. Après $-\sqrt{-b}$ par $+\sqrt{-b}$ donneroit à la vérité le ſigne moins, ſi on ne conſidéroit que les ſignes qui ſont devant le ſigne radical, mais comme $\sqrt{-b}$ par $\sqrt{-b}$ donne encore $-b$, on a donc $--b$, qui ſignifie qu'il faut retrancher le défaut $-b$: or comme on ne retranche un défaut qu'en mettant ſon contraire, il s'enſuit que $--b = +b$, & par conſéquent le troiſiéme terme doit avoir le ſigne plus.

Si une équation du ſecond degré, qui n'eſt affectée d'aucun ſigne radical, contient quelque racine imaginaire mixte, il faut néceſ-

fairement que ſes deux racines ſoient imaginaires & égales, mais que les parties radicales aïent différens ſignes devant le radical, & que les parties commenſurables aïent le même ſigne, ſoit en plus, ſoit en moins, & alors l'équation a tous ſes termes; le ſecond a le ſigne moins, ſi les parties commenſurables ont le ſigne moins, & le ſigne plus, ſi elles ont le ſigne plus; & le troiſiéme terme a toujours le ſigne plus.

$$\begin{array}{l} x+a-\sqrt{-b} \\ x+a+\sqrt{-b} \\ \hline xx+ax-x\sqrt{-b} \\ \quad +ax \qquad +aa-a\sqrt{-b} \\ \qquad +x\sqrt{-b} \quad +a\sqrt{-b}+b \\ \hline xx+2ax \qquad +aa=0 \\ \qquad\qquad\quad +b \end{array}$$

Si nous ſuppoſons n égal au coefficient du ſecond terme, & p égal au troiſiéme terme, nous aurons pour le ſecond cas $xx-nx+p=0$, & pour le premier $xx+nx+p=0$; & la premiere de ces deux formules eſt la même que celle que nous avons trouvée ci-deſſus pour les racines poſitives, & la ſeconde eſt la même que celle des racines négatives.

$$\begin{array}{l} x-a-\sqrt{-b} \\ x-a+\sqrt{-b} \\ \hline xx-ax-x\sqrt{-b} \\ \quad -ax \qquad +aa+a\sqrt{-b} \\ \qquad +x\sqrt{-b} \quad -a\sqrt{-b}+b \\ \hline xx-2ax \qquad +aa=0 \\ \qquad\qquad\quad +b \end{array}$$

Si une équation du troiſiéme degré, qui n'eſt affectée d'aucun ſigne radical, contient quelque imaginaire ſimple, elle en a néceſſairement deux égales, mais dont l'une a le ſigne moins devant le ſigne radical, & l'autre le ſigne plus; & alors ſi la troiſiéme racine eſt poſitive, les termes de l'équation ont alternativement le ſigne plus & le ſigne moins; & ſi la troiſiéme racine eſt négative, tous les termes ont le ſigne plus.

$$\begin{array}{l} x-\sqrt{-b}=0 \\ x+\sqrt{-b}=0 \\ \hline xx-x\sqrt{-b} \\ \quad +x\sqrt{-b}+b \\ \quad x-c=0 \\ \hline x^3-xx\sqrt{-b} \\ \quad +xx\sqrt{-b}+xb \\ \quad -cxx \\ \qquad\qquad -cx\sqrt{-b} \\ \qquad\qquad +cx\sqrt{-b}-cb \\ \hline x^3-cxx \quad +xb \quad -cb=0 \end{array}$$

Et faiſant n égal au coeffi-

cient du ſecond terme, p à celui du troiſiéme & q égal au quatriéme, nous aurons pour ces deux cas $xx-nx+px-q=0$ & $xx+nx+px+q=0$; & la premiere de ces formules eſt la même que celle que nous avons trouvée pour trois racines poſitives, & la ſeconde eſt la même que celle des trois racines négatives.

Si une équation du troiſiéme degré, qui n'eſt affectée d'aucun ſigne, contient quelqu'imaginaire mixte, elle en a néceſſairement deux égales, mais dont les parties radicales ont des ſignes différens devant les ſignes radicaux, & les parties commenſurables ont le même ſigne, ſoit en plus, ſoit en moins; & alors il arrive que le quatriéme terme a le ſigne moins ſi la troiſiéme racine eſt poſitive; que le troiſiéme a le ſigne plus, & le ſecond a le ſigne plus ſi la ſomme des parties cõmenſurables que nous ſuppoſons négatives eſt plus grande que la troiſiéme racine, & le ſigne moins ſi cette ſomme eſt moindre, & il eſt nul ſi la ſomme eſt égale à la troiſiéme racine.

$$x-\sqrt{-b}=0$$
$$x+\sqrt{-b}=0$$

$$xx-x\sqrt{-b}$$
$$+x\sqrt{-b}+b$$

$$xx \quad * \quad +b$$
$$x+c$$

$$x^3 \quad +bx$$
$$+cxx \quad +cb$$

$$x^3+cxx+bx+cb=0$$

$$x+a-\sqrt{-b}$$
$$x+a+\sqrt{-b}$$

$$xx+ax-x\sqrt{-b}$$
$$+ax \quad +aa-a\sqrt{-b}$$
$$+x\sqrt{-b} \quad +a\sqrt{-b}+b$$

$$xx+2ax \quad +aa=0$$
$$+b$$
$$x-c$$

$$x^3+2axx+aax \quad -aac=0$$
$$-cxx+bx \quad -bc$$
$$-2acx$$

$$xx+2ax+aa=0$$
$$+b$$
$$x+c$$

$$x^3+2axx \quad +aax \quad +aac$$
$$+cxx \quad +bx \quad +bc$$
$$+2acx$$

Et ſi la troiſiéme racine eſt négative de même que les deux parties commenſurables, tous les termes ont le ſigne plus.

Et ſi les deux parties commenſurables ſont poſitives, & la troiſiéme racine auſſi, les termes de l'équation ont alternativement les ſignes plus & moins.

Enfin, ſi les deux parties commenſurables ſont poſitives, & la troiſiéme racine eſt négative; le troiſiéme & quatriéme terme ont le ſigne plus, & le ſecond a le ſigne moins ſi la ſomme des parties commenſurables eſt plus grande que la troiſiéme racine, & le ſigne plus ſi cette ſomme eſt moindre, & il eſt nul ſi la ſomme eſt égale à la troiſiéme racine.

$x-a-\sqrt{-b}=0$

$x-a+\sqrt{-b}=0$

$xx-ax-x\sqrt{-b}$

$-ax \quad +aa+a\sqrt{-b}$

$+x\sqrt{-b} \quad -a\sqrt{-b}+b$

$xx-2ax \quad +aa=0$

$+b$

$x-c$

$x^3-2axx \quad +aax \quad -aac=0$

$-cxx \quad +bx \quad -bc$

$+2acx$

Dernier Cas.

$xx-2ax+aa=0$

$+b$

$x+c$

$x^3-2axx+aax \quad +aac=0$

$+bx \quad +bc$

$+cxx$

$-2acx$

Et mettant dans tous ces cas n au lieu du coefficient du ſecond terme p pour celui du ſecond, & q pour celui du troiſiéme, nous aurons pour le premier cas $x^3 \pm nxx+px-q=0$; pour le ſecond $x^3+nxx+px+q=0$; pour le troiſiéme $x^3-nxx+px-q=0$, & pour le quatriéme $x^3 \pm nxx+px+q=0$; & de ces quatre formules, la ſeconde eſt la même que celle que nous avons trouvée ci-deſſus pour trois racines négatives, & la troiſiéme eſt la même que nous avons trouvée pour trois racines poſitives.

Et pour les cas où la ſomme des parties commenſurables eſt égale à la troiſiéme racine, nous aurons $x^3 * +px-q=0$ & $x^3 * +px+q=0$; & ces deux formules différent de celle que nous avions trouvée ci-deſſus où le ſecond terme manquoit auſſi, en ce que le troiſiéme terme a le ſigne plus, au lieu qu'il a le ſigne moins lorſque les racines ne ſont pas imaginaires.

Ainſi ce qu'il y a principalement à obſerver touchant les équations du troiſiéme degré qui ont des racines imaginaires, c'eſt que le troiſiéme terme en eſt toujours poſitif.

Les méthodes que nous allons donner pour la réſolution des équations du ſecond & du troiſiéme degré, ſuppoſent que le premier terme n'a point de coefficient, qu'il n'y a point de termes qui ſoient affectés de fractions, ni de ſignes radicaux, & en parti-

culier pour les équations du troiſiéme degré, que le ſecond terme ſoit évanoüi ; & comme toutes les équations qu'on peut ſe propoſer de réſoudre n'ont pas ces qualités, nous allons parler des préparations qu'il faut faire pour les leur donner.

De la transformation des équations.

XXVIII. Transformer une équation, c'eſt la changer en une autre, de façon que les racines de la ſeconde ſoient égales à celles de la premiere, ou qu'elles aïent un rapport connu avec elles.

Soit l'équation $xx+nx+p=0$, ſi au lieu de x je mets y, l'équation ſera $yy+ny+p=0$, & celle-ci ſera la transformée de la premiere, & les racines de l'une égales aux racines de l'autre.

Mais ſi je fais $x=y+a$, & qu'au lieu de x je mette cette valeur $y+a$ dans l'équation, j'aurai la transformée telle qu'on voit ici ; & il eſt viſible que les racines y de la transformée ſeront moindres que celles de la premiere équation de la quantité connuë a, puiſque $y=x-a$.

$$\begin{array}{rrr} xx= & yy+2ay+aa & =0 \\ +nx= & +ny+na & \\ +p= & +p & \end{array}$$

Et ſi je fais $x=y-a$, & que je ſubſtituë $y-a$ au lieu de x dans l'équation, les racines y de la transformée ſeront plus grandes que celles de la premiere équation de la quantité connuë a, puiſque $y=x+a$.

$$\begin{array}{rrr} xx= & yy-2ay+aa & =0 \\ +nx= & +ny-na & \\ +p= & +p & \end{array}$$

Et l'on pourroit de même diminuer ou augmenter, comme on voudroit, les racines de l'équation $xx+nx+p=0$; mais il faut obſerver que ſi on vient à réſoudre la transformée, & à découvrir ſes racines, on doit avoir ſoin d'ajouter ou de retrancher de ces racines les grandeurs connuës qui les rendent moindres ou plus grandes que celles de la propoſée, & cette addition ou cette ſouſtraction donnera la valeur des racines de la propoſée ; ainſi ſi on a ſuppoſé $x=y+a$, & qu'on vienne à découvrir que $y=3$, on aura par conſéquent $x=3+a$; & ſi $a=2$, ou aura $x=3+2$ ou $x=5$.

Et de même, ſi je fais $y=\frac{x}{a}$, ce qui donne $ay=x$, & qu'au lieu de x je ſubſtituë ay, la transformée ſera $aayy+any+p$, & les racines de cette transformée ſeront égales aux racines de la propoſée diviſées par a, puiſque $y=\frac{x}{a}$, & ainſi des autres.

Les préparations qu'on eſt obligé de faire avant de réſoudre une équation compoſée, ſe font ordinairement par le moïen de ces ſortes de transformations, ainſi qu'on va voir.

Faire évanoüir le ſecond terme d'une équation.

XXIX. Soit l'équation $x^3+nxx+px-q=0$, je vois que le ſecond terme de cette équation a le ſigne plus; ainſi il faut que je la transforme en un autre où le ſigne moins ſe trouvant au ſecond terme, faſſe diſparoître le ſigne plus; & pour cela, je ſuppoſe $x=y-z$; ainſi ſubſtituant $y-z$ au lieu de x dans la propoſée, j'ai la transformée qu'on voit ici.

$$\begin{array}{rrrr} x^3= & y^3 & -3zyy & +3zzy-z^3 \\ +nxx= & +nyy & -2nzy & +nzz \\ +px= & & +py & -pz \\ -q= & & & -q=0 \end{array}$$

Or afin que le ſecond terme ſoit évanoüi, je ſuppoſe le ſecond terme $-3zyy+nyy=0$; & ajoutant de part & d'autre $3zyy$, j'ai $nyy=3zyy$; & diviſant par yy, j'ai $n=3z$; & diviſant par 3, j'ai $\frac{n}{3}=z$; ce qui me fait voir que la grandeur z que je dois retrancher de l'inconnuë pour avoir une transformée ſans ſecond terme, doit être égale au coefficient du ſecond terme de la propoſée diviſé par 3, qui eſt l'expoſant du degré de l'équation. La régle générale eſt donc qu'il faut prendre le coefficient du ſecond terme de la propoſée, & après l'avoir diviſé par l'expoſant du degré de l'équation, il faut la retrancher de y, ſi le ſecond terme de la propoſée a le ſigne $+$, & l'ajouter à y ſi ce ſecond terme a le ſigne moins; enſuite faire la transformation.

Ainſi je prens $y-\frac{n}{3}$, & mettant $y-\frac{n}{3}$ au lieu de x dans la propoſée, j'ai

$$\begin{array}{rrrr} x^3= & y^3 & -nyy+\frac{3nny}{9} & -\frac{n^3}{27} \\ +nxx= & +nyy & -\frac{2nny}{3} & +\frac{n^3}{9} \\ +px= & & +py & -\frac{pn}{3} \\ -q= & & & -q=0 \end{array}$$

$$y^3 \;\&\; -\frac{3nny}{9}+\frac{2n^3}{27}+py-\frac{pn}{3}-q=0$$

Et ſi la propoſée avoit eu au ſecond terme $-nxx$, j'aurois fait $x=y+\frac{n}{3}$, & j'aurois ſubſtitué $y+\frac{n}{3}$ au lieu de x.

Oter les fractions d'une équation, dont le premier terme n'a point de coefficient.

XXX. Soit l'équation proposée $x^3 - \frac{n}{a}xx + \frac{px}{b} - \frac{q}{c} = 0$, je multiplie toutes les racines par le produit abc des trois dénominateurs, c'est-à-dire, je fais $abcx = y$, & par conséquent $x = \frac{y}{abc}$; & je substituë cette valeur de x dans l'équation, ainsi j'ai la transformée qu'on voit ici.

$$\begin{array}{rl} x^3 = & \frac{y^3}{a^3b^3c^3} \\ -\frac{nxx}{a} = & -\frac{nyy}{a^3b^2c^2} \\ +\frac{px}{b} = & +\frac{py}{abbc} \\ -\frac{q}{c} = & -\frac{q}{c} = 0 \end{array}$$

$$y^3 - bcnyy + aabccpy - a^3b^3ccq = 0$$

Je multiplie tout par le dénominateur $a^3b^3c^3$ du premier terme, & le produit me donne une autre transformée où il n'y a point de fractions.

Et si les fractions étoient exprimées en chiffres, comme dans la transformée que nous avons trouvée dans l'article précédent, je supposerois pour abréger le dénominateur $3 = a$, ainsi $9 = aa$ & $27 = a^3$; & après quoi faisant le produit de ces dénominateurs, j'aurois a^6 & supposant $a^6y = z$, & par conséquent $y = \frac{z}{a^6}$; je substituerois $\frac{z}{a^6}$ au lieu de y dans l'équation, & j'aurois une premiere transformée dont je multiplierois tous les termes par le dénominateur a^{18} du premier terme, & le produit me donneroit une transformée sans fractions, qui seroit

$$y^3 * -\frac{3nny}{9} + \frac{2n^3}{27} + py - \frac{pn}{3} - q = 0$$

$$\begin{array}{rl} y^3 = & \frac{z^3}{a^{18}} \\ -\frac{3nny}{aa} = & -\frac{3nnz}{a^8} \\ +py = & +\frac{pz}{a^6} \\ +\frac{2n^3}{a^3} = & +\frac{2n^3}{a^3} \\ -\frac{pn}{a} = & -\frac{pn}{a} \\ -q = & -q = 0 \end{array}$$

$$z^3 * -3a^{10}nnz + 2a^{15}n^3 + a^{12}pz - a^{17}pn - q = 0$$

Transformer une équation, dont le premier terme a un coefficient, en un autre dont le premier terme n'en ait point.

XXXI. Soit la proposée $ax^3 - nxx + px - q = o$, je suppose $ax = y$ & par conséquent $x = \frac{y}{a}$; & mettant $\frac{y}{a}$ au lieu de x dans la proposée, j'ai une premiere transformée dont je multiplie tous les termes par a^3 dénominateur du premier terme; & divisant ensuite par a, j'ai une nouvelle transformée, dont le premier terme n'a point de coefficient.

$$\begin{array}{rll} ax^3 = & \frac{ay^3}{a^3} & \\ -nxx = & -\frac{nyy}{aa} & \\ +px = & -\frac{py}{a} & \\ -q = & -q & = o \end{array}$$

$$y^3 - nyy + apy - aaq = o$$

Transformer une équation à qui il manque quelques-uns de ses termes, en une autre qui ait tous ses termes.

XXXII. Soit la proposée $x^3 + q = o$, je suppose $x = y - a$ ou $x = y + a$, l'un & l'autre est indifférent, & substituant cette valeur de x dans la proposée, j'ai la transformée que je cherche.

$$\begin{array}{rll} x^3 = & y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 & \\ -q = & & -q = o \end{array}$$

Oter le second terme d'une équation, dont le premier terme a un coefficient.

XXXIII. Soit la proposée $ax^3 + nxx + px - q = o$, si le premier terme n'avoit point de coefficient, je supposerois $x = y - \frac{n}{3}$, ainsi qu'on a vû ci-dessus; & par conséquent je dois faire $x = \frac{y}{a} - \frac{n}{3a}$; & substituant cette valeur de x dans la proposée, & corrigeant ensuite l'équation, j'ai la transformée qu'on voit ici où le second terme $-\frac{nyy}{aa} + \frac{nyy}{aa}$ est nul; &

$$\begin{array}{rlllll} ax^3 = & \frac{y^3}{aa} & -\frac{nyy}{aa} & +\frac{nny}{3aa} & -\frac{n^3}{27aa} & \\ +nxx = & & +\frac{nyy}{aa} & -\frac{2nny}{3aa} & +\frac{nn}{9aa} & \\ +px = & & & +\frac{py}{a} & -\frac{pn}{3a} & \\ -q = & & & & -q & = o \end{array}$$

$$y^3 * -\frac{nny}{3} - \frac{n^3}{27} + apy + \frac{nn}{9} - \frac{apn}{3} - aaq = o$$

pour

pour ôter les fractions, je multiplie tous les termes par le dénominateur aa du premier terme, & j'ai une transformée où il n'y a ni second terme, ni coefficient au premier, ni fraction littérale; & l'on pourroit en ôter encore les fractions numériques, c'eſt-à-dire exprimées par des chiffres, de la façon que nous avons enſeignée ci-devant.

Oter les incommenſurables d'une équation.

XXXIV. Ordinairement on ne peut délivrer une équation des incommenſurables dont elle eſt affectée, qu'en l'élevant à des degrés bien au-deſſus du troiſiéme; & comme je n'ai entrepris de parler ici que de la réſolution du ſecond & du troiſiéme degré, je ne dirai rien de cette méthode qu'on peut voir dans l'Analyſe du Pere Regnaud, & dans les Ouvrages des autres Auteurs; mais il y a certains cas où l'on peut ôter les incommenſurables ſans élever l'équation à un degré plus haut, & c'eſt ce qu'il eſt bon d'examiner.

Soit donc la propoſée $xx-x\sqrt{n+q}=0$, où l'incommenſurable ne ſe trouve que dans le ſecond terme, j'obſerve qu'il faut néceſſairement que les deux racines de cette équation ſoient affectées du ſigne radical, attendu que s'il n'y en avoit qu'une, le troiſiéme terme auroit auſſi le ſigne radical, au lieu qu'il ne l'a pas; & pour faire mieux entendre ceci, ſuppoſons pour un moment que ſes deux racines ſoient $x-a\sqrt{c}$ & $x-a\sqrt{c}$, multipliant ces racines l'une par l'autre, on voit bien que le ſigne radical n'eſt point dans le troiſiéme terme.

$$\begin{array}{r} x-a\sqrt{c} \\ x-a\sqrt{c} \\ \hline xx-a\sqrt{c} \\ \quad -a\sqrt{c}+ac \\ \hline xx-2a\sqrt{c}+ac=0 \end{array}$$

Et ſi au contraire nous voulions ſuppoſer que les racines fuſſent $x-a\sqrt{c}$ & $x-a$, enſorte que l'une des deux n'eût point de ſigne radical, on voit en multipliant ces deux racines, que ce ſigne eſt également au ſecond & au troiſiéme terme.

$$\begin{array}{r} x-a\sqrt{c} \\ x-a \\ \hline xx-ax\sqrt{c}+a\sqrt{c}= \\ \quad -ax \end{array}$$

Cela ſuppoſé, j'obſerve encore que ſi je multiplie les deux racines par la grandeur radicale, l'équation n'aura plus de ſigne radical, ce qui eſt encore évident dans la ſuppoſition que nous avons faite des deux racines $x-a\sqrt{c}$ & $x-$

$a\sqrt{c}$; car multipliant ces racines par la grandeur $\sqrt{c}$, les produits ſeront $x-ac$ & $x-ac$, & l'équation compoſée de ces deux-ci ſera $xx-2acx+aacc$, où il n'y a point d'incommenſurable.

Ainſi pour dégager la propoſée $xx-x\sqrt{n}+q=0$ de la grandeur incommenſurable $\sqrt{n}$, je n'ai qu'à multiplier ſes racines par $\sqrt{n}$ en ſuppoſant $x\sqrt{n}=y$, ce qui donne $x=\frac{y}{\sqrt{n}}$; & mettant cette valeur de x dans la propoſée, je trouve une premiere transformée dont je multiplie tous les termes par le dénominateur n du premier terme, & j'ai la transformée $yy-ny+nq=0$ qui n'a plus de ſigne radical;

$$\begin{aligned} xx &= \frac{yy}{n} \\ -x\sqrt{n} &= -\frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\ +q &= +q=0 \end{aligned}$$

& l'on pourra toujours dégager de la même façon une équation du ſecond degré, lorſque le ſigne radical ne ſe trouvera que dans ſon ſecond terme.

Quant à celles du troiſiéme, ſuppoſons que la propoſée ſoit $x^3-xx\sqrt{n}+px-q\sqrt{n}=0$, j'obſerve de même que les trois racines de cette équation doivent être affectées du ſigne radical; car s'il n'y en avoit qu'une, la grandeur incommenſurable ſe trouveroit auſſi dans le troiſiéme terme, attendu que ce troiſiéme contenant les produits alternatifs des racines, deux de ces produits ſeroient affectés, & s'il n'y en avoit que deux, le dernier terme étant le produit des trois racines, n'auroit point d'incommenſurables; & pour en être mieux convaincu, ſuppoſons pour un moment que ſes trois racines ſoient $x-a\sqrt{c}$, $x-b\sqrt{c}$ & $x-d\sqrt{c}$, on verra, en faiſant le produit de ces trois racines, que l'équation n'a le ſigne radical qu'au ſecond & au quatriéme terme, de même que la propoſée; & dans toute autre ſuppoſition cela n'arrivera pas.

$$\begin{array}{l} x-a\sqrt{c} \\ x-b\sqrt{c} \\ \hline xx-ax\sqrt{c}+abc \\ \quad -bx\sqrt{c} \\ \hline x-d\sqrt{c} \\ \hline x^3-axx\sqrt{c}+abcx-abcd \\ \quad -bxx\sqrt{c}+adcx \\ \quad -dxx\sqrt{c}+bdcx-abcd\sqrt{c} \end{array}$$

Donc ſi je multiplie toutes les racines de la propoſée par $\sqrt{n}$, en faiſant $x\sqrt{n}=y$, ce qui donne $\frac{y}{\sqrt{n}}$, la ſubſtitution de $\frac{y}{\sqrt{n}}$ au lieu de x donnera une premiere transformée, dont tous les termes

étant multipliés par le dénominateur $n\sqrt{n}$ du premier terme, donneront la transformée que je cherche $y^3 - nyy + pny - nnq = 0$, où il n'y aura plus d'incommensurable, & cette équation sera encore du troisiéme degré.

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{y^3}{n\sqrt{n}} \\ -xx\sqrt{n} &= -\frac{yy\sqrt{n}}{n} \\ +px &= +\frac{py}{\sqrt{n}} \\ -q\sqrt{n} &= -q\sqrt{n} = 0 \end{aligned}$$

On voit par-là qu'on peut toujours dégager une équation du second ou du troisiéme degré, quand toutes leurs racines sont affectées de la même grandeur radicale; & cela se connoît lorsqu'il n'y a que le second terme qui soit affecté dans les équations du second degré, & lorsqu'il n'y a que le second & le quatriéme dans celle du troisiéme degré.

Résoudre les équations du second degré.

XXXV. Nous avons vû que toutes les équations du second degré se réduisent à ces quatre formules $xx - nx + p = 0$, $xx + nx + p = 0$, $xx - nx - p = 0$ & $xx + nx - p = 0$, dont la premiere marque que les deux racines sont positives, soit qu'elles soient réelles, soit qu'elles soient imaginaires; la seconde marque deux négatives réelles ou imaginaires; la troisiéme une positive & une négative moindre que la positive; & la derniere une positive & une négative plus grande que la positive: commençons par les équations de la premiere formule.

PREMIER CAS.

Soit la proposée $xx - nx + p = 0$, je suppose que la somme de ses deux racines est $2a$ & la différence $2d$, dont la premiere sera $a + d$ & la seconde $a - d$; & faisant $z = a + d$ & $z = a - d$, nous aurons en transposant $z - a - d = 0$ & $z - a + d = 0$; & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, nous aurons une équation $zz - 2az + aa = 0$, qui sera la même que la proposée; comparant donc chaque terme de l'une à chaque terme de l'autre, nous aurons d'abord $xx = zz$, d'où nous ne pouvons rien tirer; mais

$$\begin{array}{l} z - a - d = 0 \\ z - a + d = 0 \\ \hline zz - az - dz \\ \quad -az \quad +aa + ad \\ \quad\quad +dz \quad -ad - dd \\ \hline zz - 2az + aa = 0 \\ \quad\quad\quad -dd \end{array}$$

comparant les deux ſeconds termes, nous aurons $-nx=-2az$, ou par tranſpoſition $2az=nx$; & comme $z=x$, nous aurons $2a=n$, & diviſant par 2, $a=\frac{1}{2}n$.

Et comparant de même les deux troiſiémes termes, nous aurons $p=aa-dd$, & ajoutant dd de part & d'autre $p+dd=aa$, & ôtant p de part & d'autre $dd=aa-p$; & comme nous avons trouvé $a=\frac{1}{2}n$, donc $aa=\frac{1}{4}nn$; & mettant $\frac{1}{4}nn$ pour aa dans $dd=aa-p$, nous aurons $dd=\frac{1}{4}nn-p$; & tirant la racine quarrée $d=\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$; & mettant ces valeurs de a & de d dans les équations $z-a-d=0$ & $z-a+d=0$, qui marquent les deux racines, la premiere racine eſt $z-a-d=z-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=0$, & la ſeconde $z-a+d=z-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=0$; ainſi $x=z=+\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$ premiere racine, & $x=z=+\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$ ſeconde racine.

Et en effet, ſi on multiplie $z-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=0$ par $z-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=0$, le produit ſera préciſément la propoſée, en mettant x pour z.

Or en conſidérant la formule de ces racines, je vois qu'afin que l'une & l'autre ſoiét poſitives, il faut que la grandeur $\frac{1}{4}nn$ qui eſt ſous le ſigne ſoit plus grande que la grandeur p qui eſt ſous le même ſigne, car autrement $\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$ ſeroit une grandeur négative: ainſi quand $\frac{1}{4}nn$ eſt plus grand que p, les deux racines ſont réelles, & quand il eſt moindre, les deux racines ſont imaginaires.

$$z-\tfrac{1}{2}n-\sqrt{\tfrac{1}{4}nn-p}=0$$
$$z-\tfrac{1}{2}n+\sqrt{\tfrac{1}{4}nn-p}=0$$

$$zz-\tfrac{1}{2}nz-z\sqrt{\tfrac{1}{4}nn-p}$$
$$-\tfrac{1}{2}nz \qquad +\tfrac{1}{4}nn+\tfrac{1}{2}n\sqrt{\tfrac{1}{4}nn-p}$$
$$+z\sqrt{\tfrac{1}{4}nn-p} \qquad -\tfrac{1}{2}n\sqrt{\tfrac{1}{4}nn-p}$$
$$-\tfrac{1}{4}nn+p$$

$$zz-nz+p=0$$
$$xx-nx+p=0$$

Soit donc l'équation à réſoudre $xx-9x+18=0$, je fais $n=9$. & $p=18$; & mettant ces valeurs de n & de p dans la formule des racines que je viens de trouver, j'ai $x=\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}-18}=\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$ premiere racine, & $x=\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=3$ ſeconde racine; & en effet, multipliant $x-3=0$ par $x-6=0$, on aura $xx-9x+18=0$ qui eſt la propoſée.

Soit encore la propoſée $xx-10x+16=0$, je fais $n=10$, $p=16$; & ſubſtituant ces valeurs de n & p, j'ai $x=\frac{10}{2}+\sqrt{\frac{100}{4}-16}=\frac{10}{2}+\sqrt{\frac{36}{4}}=\frac{10}{2}+\frac{6}{2}=8$ premiere racine, & $x=\frac{10}{2}-\sqrt{\frac{36}{4}}=\frac{10}{2}-\frac{6}{2}=2$ ſeconde racine.

Enfin, ſoit la propoſée $xx-6x+20=0$, je fais $n=6$, $p=20$; & ſubſtituant ces valeurs, j'ai $x=\frac{6}{2}+\sqrt{\frac{36}{4}-20}=\frac{6}{2}+\sqrt{-\frac{44}{4}}=3+\sqrt{-11}$ premiere racine, & $x=3-\sqrt{-11}$ ſeconde racine; & ces deux racines ſont imaginaires, attendu que $\sqrt{-11}$ contient un quarré impoſſible.

DEUXIE'ME CAS.

Soit la propoſée $xx+nx+p=0$ dont les deux racines ſont négatives, je ſuppoſe leur ſomme $-2a$, leur différence $-2d$: donc la premiere eſt $-a-d$ & la ſeconde $-a+d$; & prenant une inconnuë z pour l'inconnuë x, nous aurons $z+a+d=0$ premiere racine, & $z+a-d=0$ ſeconde racine; & leur produit $zz+2az+aa-dd=0$ ſera égal à la propoſée; & comparant les deux ſeconds termes, nous aurons $n=2a$ ou $a=\frac{1}{2}n$: donc $aa=\frac{1}{4}nn$.

Et comparant les deux troiſiémes termes, nous aurons $p=aa-dd$; & ajoutant dd & ôtant p, nous aurons $dd=aa-p$; & mettant $\frac{1}{4}nn$ pour aa, $dd=\frac{1}{4}nn-p$, & tirant la racine quarrée $d=\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$: donc la premiere racine $z+a+d=z+\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=0$, & la ſeconde $z+a-d=z+\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}=0$.

Donc $x=z=-\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$ premiere racine.

Et $x=z=-\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$ ſeconde racine.

Où l'on voit encore que ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt plus petit que p, les racines ſeront imaginaires.

Soit donc la propoſée $xx+7x+12=0$, je fais $n=7$, $p=12$; & ſubſtituant ces valeurs, j'ai:

$x=-\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}-12}=-\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=-4$ premiere racine.

Et $x=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}=-3$ ſeconde racine; & ces deux racines ſont négatives.

Soit de même la propoſée $xx+8x+18=0$, je fais $n=8$, $p=18$; & ſubſtituant ces valeurs, j'ai:

$x=-\frac{8}{2}-\sqrt{\frac{64}{4}-18}=-\frac{8}{2}-\sqrt{-\frac{8}{4}}=-4-\sqrt{-2}$ premiere racine.

Et $x=-4+\sqrt{-2}$ ſeconde racine; & ces deux racines ſont imaginaires.

TROISIE'ME CA'S.

Soit la propoſée $xx-nx-p=0$, où la diſpoſition des ſignes me fait voir qu'il y a une racine négative moindre que la poſitive : je ſuppoſe pour un moment que les deux racines ſont poſitives, & que leur ſomme eſt $2a$ & leur différence $2d$: donc la plus grande eſt $a+d$ & la moindre eſt $a-d$; & comme c'eſt celle-ci qui eſt la négative, je mets $-a+d$ au lieu de $a-d$; & prenant $z=x$, j'ai $z=a+d$ ou $z-a-d=0$ pour la racine poſitive, & $z=-a+d$ ou $z+a-d=0$ qui eſt la négative ; & le produit de ces deux racines donne l'égalité $zz-2zd+aa=0$, qui eſt la transformée de la propoſée. $+dd$

Comparant les deux ſeconds termes, j'ai $-2d=-n$ ou $2d=n$, & $d=\frac{1}{2}n$: donc $dd=\frac{1}{4}nn$.

Comparant de même les deux troiſiémes, j'ai $-p=-aa+dd$ ou $aa-p=dd$; & ajoutant p de part & d'autre $aa=dd+p$, & mettant $\frac{1}{4}nn$ pour dd, j'ai $aa=\frac{1}{4}nn+p$; & tirant la racine quarrée $a=\sqrt{\frac{1}{4}nn+p}$.

Donc $z-a-d=z-\sqrt{\frac{1}{4}nn+p}-\frac{1}{2}n=0$ & $z+a-d=z+\sqrt{\frac{1}{4}nn+p}-\frac{1}{2}n=0$; & par conſéquent $x=z=\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn+p}$ racine poſitive, & $x=z=\frac{1}{2}n-\sqrt{\frac{1}{4}nn+p}$ racine négative.

Et comme les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical ſont toutes deux poſitives, il ne ſauroit y avoir d'imaginaires dans ce troiſiéme cas.

Soit donc la propoſée $xx-3x-10=0$, je fais $n=3$ & $p=10$; & ſubſtituant ces valeurs de n & de p, j'ai $x=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+10}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$ racine poſitive, & $x=\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{4}{2}=-2$ racine négative.

QUATRIE'ME CAS.

Soit la propoſée $xx+nx-p=0$, où la diſpoſition des ſignes me fait voir qu'il y a une racine négative plus grande que la poſitive, je les ſuppoſe toutes deux poſitives pour un moment, & je fais leur ſomme $2a$, & leur différence $2d$; ainſi la grande eſt $a+d$ & la petite $a-d$: mais comme la grande eſt négative, je mets $-a-d$ au lieu de $a+d$; & faiſant $z=x$, j'ai $z=-a-d$ ou $z+a+d=0$ qui eſt la racine négative, & $z=a-d$ ou $z-a+d=0$ qui

eſt la poſitive ; & le produit de ces deux racines donne l'égalité $zz + 2dz - aa + dd = 0$, qui eſt la transformée de la propoſée.

Et comparant les deux ſeconds termes, j'ai $2d = n$ ou $d = \frac{1}{2}n$: donc $dd = \frac{1}{4}nn$. Comparant de même les deux troiſiémes termes, j'ai $-p = -aa + dd$; & ajoutant aa & p, j'ai $aa = dd + p$; & mettant $\frac{1}{4}nn$ pour dd, j'ai $aa = \frac{1}{4}nn + p$; & tirant la racine quarrée $a = \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$.

Donc $z + a + d = z + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} + \frac{1}{2}n = 0$ & $z - a + d = z - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} + \frac{1}{2}n = 0$; & par conſéquent $x = z = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ racine négative, & $x = z = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ racine poſitive.

Et les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical étant toutes deux poſitives, font voir qu'il ne ſauroit y avoir d'imaginaires dans ce quatriéme cas.

Soit donc la propoſée $xx + 3x - 10 = 0$, je fais $n = 3$, $p = 10$; & ſubſtituant ces valeurs, j'ai $x = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5$, racine négative ; & $x = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$, racine poſitive.

Toutes les équations du ſecond degré & leurs racines, ſe réduiſent donc aux formules ſuivantes, qui ſont une récapitulation de ce qui a été dit.

Equations.	Racines.	
	Pour le premier Cas.	
$xx - nx + p = 0$	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} \\ x = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} \end{cases}$	Dans les deux premiers cas, les racines ſont imaginaires ſi $\frac{1}{4}nn$ eſt moindre que p.
	Pour le deuxiéme Cas.	
$xx + nx + p = 0$	$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} \\ x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} \end{cases}$	
	Pour le troiſiéme Cas.	
$xx - nx - p = 0$	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} \\ x = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} \end{cases}$	
	Pour le quatriéme Cas.	
$xx + nx - p = 0$	$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} \\ x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} \end{cases}$	

On pourroit auſſi réſoudre toutes les équations du ſecond degré, en faiſant évanoüir leur ſecond terme; ſoit, par exemple la propoſée $xx-nx+p=0$, qui eſt l'équation du premier cas, faiſant $x=y+\frac{n}{2}$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, on auroit une premiere transformée, où mettant $-\frac{2nn}{4}$ pour $-\frac{nn}{2}$, ce qui eſt la même choſe; & corrigeant enſuite l'expreſſion, on auroit la transformée $yy \ast -\frac{nn}{4}+p=0$; & ajoutant $\frac{nn}{4}$, & retranchant p, on auroit $yy=\frac{nn}{4}-p$; & tirant la racine quarrée $y=\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$, & mettant au lieu de y, ſa valeur $x-\frac{n}{2}$, on auroit $x-\frac{1}{2}n=\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$; & donnant $\frac{1}{2}n$, on auroit $x=\frac{1}{2}n+\sqrt{\frac{1}{4}nn-p}$, qui eſt la premiere des deux racines trouvées ci-deſſus; & cette racine trouvée, on diviſeroit la propoſée par cette racine & le quotient ſeroit la ſeconde racine; mais comme cette diviſion ne laiſſe pas d'être embarraſſante, il vaut mieux ſe ſervir de la méthode que nous venons de donner, ou de la méthode générale que nous avons enſeignée plus haut, & qui eſt très-commode dans la pratique.

$$\begin{array}{rrr} xx= & yy+ny+\frac{nn}{4} & \\ -nx= & -ny-\frac{nn}{2} & - \\ +p= & +p=0 & \\ \hline & yy \ast -\frac{nn}{4}+p=0 & \end{array}$$

Réſoudre les équations du troiſiéme degré.

XXXVI. Pour réſoudre les équations du troiſiéme dégré, on en fait évanoüir auparavant le ſecond terme, & comme cela ne peut arriver ſans que la ſomme de deux racines poſitives ne devienne égale à la négative, ou ſans que celle de deux négatives ne ſoit égale à la poſitive: toutes les équations du troiſiéme degré, qui n'ont point de ſecond terme, ſe réduiſent aux quatre formules ſuivantes.

$$x^3 \ast -px+q=0 \quad x^3 \ast -px-q=0 \quad x^3 \ast +px+q=0 \quad x^3 \ast +px-q=0$$

La premiere marque qu'il y a deux racines poſitives, dont la ſomme eſt égale à la négative; la ſeconde, que la ſomme des deux négatives eſt égale à la poſitive; la troiſiéme, qu'il y a deux imaginaires

ginaires & une réelle négative ; & la quatriéme, qu'il y a deux imaginaires & une réelle positive : outre cela, la premiere & la seconde peuvent contenir deux imaginaires que l'Analyse va nous faire découvrir.

PREMIER CAS.

Soit la proposée $x^3 * -px+q=0$, où la disposition des signes me fait voir qu'il y a deux racines positives & une négative, supposé qu'il n'y en ait point d'imaginaires.

Je suppose que la somme des deux positives est $2f$, & leur différence $2g$, dont la premiere est $f+g$ & la seconde $f-g$; & comme la négative égale leur somme, elle est donc $-2f$; & prenant l'inconnuë $z=x$, j'ai $z-f-g=0$, premiere positive ; $z-f+g$, seconde positive, & $z+2f$ négative ; & faisant le produit de ces trois racines, j'ai la transformée $z^3-3ffz+2f^3=0$ qui est égale à la proposée ; & comparant les deux seconds termes ensemble, j'ai $p=3ff+gg$; & divisant par 3, j'ai $\frac{p}{3}=ff+\frac{gg}{3}$.

$$\begin{array}{l} z-f-g=0 \\ z-f+g=0 \\ \hline zz-fz-gz \\ \quad -fz \quad +ff+fg \\ \quad +gz \quad -fg-gg \\ \hline zz-2fz+ff=0 \\ \quad -gg \\ \hline z+2f \\ \hline z^3-2fzz+ffz+2f^3 \\ +2fzz-ggz+2ggf \\ -4ffz \\ \hline z^3 * -3ffz+2f^3=0 \\ -ggz-2ggf, \end{array}$$

Comparant de même les deux troisiémes termes, j'ai $q=2f^3-2ggf$; & divisant par 2, j'ai $\frac{q}{2}=f^3-ggf$.

Et afin que l'inconnuë f de ces deux équations soit du même degré, je fais le cube de la premiere $\frac{p}{3}=ff+\frac{gg}{3}$, & le quarré de la seconde $\frac{q}{2}=f^3-ggf$; & j'ai, en corrigeant les expressions $f^6+ggf^4+\frac{g^4ff}{3}+\frac{g^6}{27}=\frac{p^3}{27}$, & $f^6-2ggf^4+g^4ff=\frac{qq}{4}$; & retranchant la seconde de la premiere, j'ai $3ggf^4-\frac{2g^4ff}{3}+\frac{g^6}{27}=\frac{p^3}{27}-\frac{qq}{4}$.

Or en examinant cette derniere équation, je vois que chaque

membre eſt poſitif; car comme f eſt plus grand que g, à cauſe que f repréſente la moitié de la ſomme des deux poſitives, & g ne repréſente que la moitié de leur différence; ſi je diviſe les termes $3ggf^4$ & $-\frac{2g^4ff}{3}$, l'un & l'autre par $ggff$, le quotient $3ff$ ſera plus grand que le quotient $-\frac{2gg}{3}$; & par conſéquent comme il n'y a que $-\frac{2g^4ff}{3}$ qui ſoit négatif dans le premier membre, ce membre eſt donc poſitif, & le ſecond qui lui eſt égal doit l'être auſſi.

Donc quand la ſomme de deux racines poſitives & inégales entr'elles, eſt égale à la racine négative, $\frac{p^3}{27}$ eſt plus grand que $\frac{qq}{4}$, c'eſt-à-dire, que le cube du tiers du coefficient du troiſiéme terme de la propoſée, eſt plus grand que le quarré de la moitié du dernier terme.

Et ſi l'on ſuppoſe que les deux poſitives ſoient égales, alors la différence g ſera zero, & tous les termes de la transformée, où g ſe trouve, ſeront zero; ainſi elle ſera changée en celle-ci $z^3 * - 3ffzz + 2f^3 = 0$, comme on peut s'en convaincre en multipliant les trois racines $z-f$, $z-f$ & $z+2f$ les unes par les autres; ainſi la comparaiſon des termes donnera $p = 3ff$ ou $\frac{p}{3} = ff$, & $q = 2f^3$ ou $\frac{q}{2} = f^3$; & élevant la premiere de ces équations au cube, & la ſeconde au quarré, afin que l'inconnuë f ſoit du même degré, on aura $\frac{p^3}{27} = f^6$. & $\frac{qq}{4} = f^6$, par conſéquent $\frac{p^6}{27} = \frac{qq}{4}$, c'eſt-à-dire, que quand les deux racines poſitives ſont égales, le cube du tiers du coefficient du troiſiéme terme de la propoſée eſt égal au quarré de la moitié du dernier terme.

D'où il ſuit que ſi l'on trouvoit $\frac{p^3}{27}$ moindre que $\frac{qq}{4}$, il y auroit néceſſairement deux imaginaires.

Maintenant ſi nous ſuppoſons que les deux racines poſitives ſoient égales, l'équation $3ff + gg = p$ que nous avons trouvée, en comparant le ſecond terme de la propoſée au ſecond terme de la transformée, ſe réduit à celle-ci $3ff = p$, puiſque la différence g eſt zero, donc $ff = \frac{p}{3}$; & de même l'équation $q = 2f^3 - 2ggf$ que nous avons trouvée, en comparant le troiſiéme terme de la pro-

poſée avec le troiſiéme de la transformée, ſe réduit par la même raiſon à $2f^3 = q$, d'où l'on tire $f^3 = \frac{q}{2}$; & diviſant cette équation par l'équation $ff = \frac{p}{3}$, c'eſt-à-dire, le premier membre par le premier, & le ſecond par le ſecond, nous aurons $f = \frac{3q}{2p}$; & comme f repréſente l'une des racines poſitives, & que la négative eſt égale aux deux poſitives, la négative $-2f = -\frac{6q}{2p}$ ou $-2f = -\frac{3q}{p}$; & les deux poſitives $f = \frac{3q}{2p}$ & $f = \frac{3q}{2p}$.

Soit donc la propoſée $xx * -12x + 16 = 0$, j'examine ſi $\frac{p^3}{27}$ eſt égal à $\frac{qq}{4}$, en prenant le $\frac{1}{3}$ du troiſiéme terme 12, lequel tiers eſt 4; & faiſant le cube de 4, j'ai $64 = \frac{p^3}{27}$; je prens de même la moitié 8 du troiſiéme terme, & faiſant ſon quarré, j'ai $64 = \frac{qq}{4}$, ainſi $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$, donc les deux racines poſitives ſont égales; & pour les trouver, je prens le triple 48 du dernier terme 16; & le diviſant par le double 24 du troiſiéme terme 12, le quotient eſt $2 = f$: donc l'autre racine poſitive eſt auſſi $2 = f$, & la négative eſt $-4 = -2f$; & multipliant ces trois racines $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$ & $x + 4 = 0$, le produit eſt égal à la propoſée.

Mais ſi on ſuppoſe que les trois racines ſont inégales, je prens les équations $p = 3ff + gg$ & $q = 2f^3 - 2ggf$ que nous avons trouvées, en comparant les termes de la propoſée avec ceux de la transformée; & faiſant le quarré $4ff$ de la grandeur $2f$, qui repréſente la racine négative, je retranche de ce quarré le ſecond membre $3ff + gg$ de la premiere équation, & le reſte $ff - gg$ diviſe exactement le ſecond membre $2f^3 - 2ggf$ de la ſeconde équation, & donne pour quotient $2f$, qui eſt la racine du quarré $4ff$.

D'où il ſuit que ſi la racine négative eſt commenſurable, on trouvera toujours un quarré plus grand que p, c'eſt-à-dire, que le coefficient du troiſiéme terme de la propoſée, duquel quarré p étant ôté, le reſte diviſera exactement q, c'eſt-à-dire, le troiſiéme terme de la propoſée, & le quotient ſera la racine du quarré; & cette racine étant miſe avec le ſigne moins, ſera la racine négative.

De même si l'on prend le quarré de la premiere racine positive $f+g$, lequel quarré est $ff+2gf+gg$; & qu'on retranche ce quarré de la valeur de p, c'est-à-dire de $3ff+gg$, le reste $2ff-2gf$ divise exactement la valeur de q, c'est-à-dire $2f^3-2ggf$, & donne pour quotient $f+g$ qui est la racine du quarré.

Et si l'on avoit le quarré de la seconde racine positive $f-g$, on auroit trouvé de même que ce quarré étant ôté de la valeur de p, le reste auroit divisé exactement la valeur de q, & auroit donné pour quotient $f-g$ racine du quarré.

D'où il suit que si les deux positives sont commensurables, on trouvera toujours un quarré moindre que le coefficient p du troisiéme terme de la proposée, lequel quarré étant ôté de p, le reste divisera exactement le quatriéme terme q de la proposée, & donnera pour quotient la racine du quarré, qui sera en même-tems l'une des racines positives.

Soit donc la proposée $x^3*-19x+30=0$, où je vois par la disposition des signes qu'il y a deux positives & une négative, s'il n'y a point d'imaginaires; je prens un quarré plus grand que 19, & ce quarré est 25; j'en retranche 19, le reste est 6; & divisant le dernier terme 30 par 6, le quotient est 5 qui est la racine du quarré 25, ainsi je suis assuré que la racine négative est -5; & pour trouver les deux autres, je divise la proposée par $x+5=0$, c'est-à-dire par la racine trouvée, & le quotient $xx-5x+6$ est l'équation du second degré qui contient les deux autres racines; ainsi je résous cette équation par la méthode enseignée ci-dessus, & je trouve les deux racines $x-2=0$ & $x-3=0$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3*-19x+30 & xx-5x+6 \\
\hline
x\ +5 & \\
\hline
0\ -5xx-19x+30 & \\
\quad x\ +5 & \\
\hline
\quad 0\ +6x+30 & \\
\quad\quad x+5 & \\
\hline
\quad\quad 0\ \ 0 &
\end{array}
$$

Que si je voulois trouver les deux autres racines d'une autre façon, je prendrois un quarré moindre que le coefficient 19 du troisiéme terme de la proposée, ce quarré est 16; je retrancherois 16 de 19, & le reste seroit 3; mais comme en divisant le dernier terme 30 par ce reste 3, le quotient 10 ne seroit pas la racine de 16; je prendrois un autre quarré moindre, par exemple 9, & retranchant 9 du coefficient 19, le reste seroit 10; & divisant le dernier

terme 30 par ce reſte 10, le quotient 3 ſeroit la racine du quarré 9, & par conſéquent 3 ſeroit l'une des racines poſitives; & comme les deux racines poſitives ſont égales à 5, qui eſt le nombre de la négative, la ſeconde poſitive ſeroit donc 2; ainſi les trois racines ſeroient $x-2$, $x-3$ & $x+5$.

Si en cherchant la racine négative, on ne trouve point de quarré plus grand que le coefficient du troiſiéme terme de la propoſée, duquel aïant ôté ce coefficient, le reſte diviſe exactement le dernier terme, & donne pour quotient la racine du quarré: c'eſt une marque certaine que cette racine eſt incommenſurable.

Et ſi en cherchant l'une ou l'autre des poſitives, on ne trouve point de quarré moindre que le coefficient du troiſiéme terme de la propoſée, lequel étant ôté de ce coefficient, le reſte diviſe exactement le dernier terme, & donne pour quotient la racine du quarré, c'eſt une marque certaine que ces deux racines ſont auſſi incommenſurables.

Et quand les trois racines ſont réelles, inégales & toutes trois incommenſurables, on n'a point encore trouvé de moïen pour réſoudre ces équations par l'Analyſe, autrement que par approximation, & c'eſt-là ce qu'on appelle le cas irréductible du troiſiéme degré; cependant la Géométrie réſout ces cas auſſi facilement que les autres.

DEUXIE'ME CAS.

Soit la propoſée $x^3 * -px-q=0$, où la ſomme des négatives eſt égale à la poſitive; je ſuppoſe la ſomme des négatives $-2f$, leur différence $-2g$: donc la premiere eſt $-f-g$, la ſeconde $-f+g$ & la poſitive $2f$; & ſuppoſant $z=x$, j'ai $z+f+g=0$, premiere négative; $z+f-g=0$, ſeconde négative & $z=-2f$ poſitive; & le produit de ces trois racines eſt une tranſformée égale à la propoſée; & comparant les deux troiſiémes termes, j'ai $-p=-3ff-gg$ ou $3ff+gg=p$; &

$$z+f+g=0$$
$$z+f-g=0$$

$$zz+fz+gz$$
$$+fz \quad +ff+fg$$
$$-gz \quad -fg-gg$$

$$zz+2fz \quad +ff-gg=0$$
$$z-2f$$

$$z^3+2fzz \quad +ffz-2f^3$$
$$-2fzz \quad -ggz+2ggf$$
$$-4ffz$$

$$z^3 * \quad -3ffzz-2f^3=0$$
$$-ggz+2ggf$$

diviſant par 3, j'ai $ff+\frac{gg}{3}=\frac{p}{3}$; & comparant les deux quatriémes termes, j'ai $-q=-2f^3+2ggf$ ou $2f^3-2ggf=q$; & diviſant par 2, $f^3-ggf=\frac{q}{2}$.

Et élevant ces deux équations, la premiere au cube & la ſeconde au quarré, afin que l'inconnuë z ſoit du même degré dans l'une & dans l'autre; & corrigeant les expreſſions, j'ai $f^6+ggf^4+\frac{g^4ff}{3}+\frac{g^6}{27}=\frac{p^3}{27}$ & $f^6-2ggf^4+g^4ff=\frac{qq}{4}$, de même que nous avons trouvé dans le cas précédent; & ôtant par conſéquent l'une de l'autre, nous aurons encore $3ggf^4-\frac{2g^4ff}{3}+\frac{g^6}{27}=\frac{p^3}{27}-\frac{qq}{4}$.

Et faiſant la même obſervation que dans le cas précédent, nous trouverons que les deux membres de cette équation ſont poſitifs; & par conſéquent que $\frac{p^3}{27}$ eſt plus grand que $\frac{qq}{4}$, c'eſt-à-dire, que lorſque la ſomme de deux inégales entr'elles eſt égale à la racine poſitive, le cube du tiers du coefficient du troiſiéme terme de la propoſée eſt plus grand que le quarré de la moitié du dernier terme.

Et ſi on veut ſuppoſer que les deux poſitives ſoient égales entr'elles, alors la différence g étant nulle, tous les termes de la transformée où g ſe trouve ſeront nuls; & cette transformée ſera $z^3-3ffzz-2f^3=0$; & la comparaiſon des termes donnera $p=3ff$ ou $\frac{p}{3}=ff$, & $q=2f^3$ ou $\frac{q}{2}=f^3$; & cubant la premiere de ces équations & quarrant la ſeconde, on aura $\frac{p^3}{27}=f^6$; & $\frac{qq}{4}=f^6$, & par conſéquent $\frac{p^3}{27}=\frac{qq}{4}$; ce qui fait voir que quand les deux négatives ſont égales, le cube $\frac{p^3}{27}$ eſt égal au quarré $\frac{qq}{4}$, de même que dans le cas précédent.

Il ſuit encore de-là que ſi $\frac{p^3}{27}$ eſt moindre que $\frac{qq}{4}$, l'équation contient néceſſairement deux imaginaires.

Maintenant ſi on ſuppoſe les deux négatives égales, je prens l'équation $p=3ff+gg$ que nous avons trouvée en comparant les troiſiémes termes de la transformée & de la propoſée; & comme la différence g eſt zero, nous avons $p=3ff$, & diviſant par 3, $\frac{p}{3}=ff$.

Et de même l'équation $q=2f^3-2ggf$ tirée de la comparaiſon des quatriémes termes ſe réduit à $q=2f^3$; & diviſant par 2, nous avons $\frac{q}{2}=f^3$; & diviſant cette équation par $\frac{p}{3}=ff$, c'eſt-à-dire, chaque membre par chaque membre, nous avons $f=\frac{3q}{2p}$, de même que dans le cas précédent; & comme f repréſente l'une des négatives, & que l'autre lui eſt égale, la poſitive ſera donc $2f=\frac{3q}{p}$ & les deux négatives $-f=-\frac{3q}{2p}$ & $-f=-\frac{3q}{2p}$, ce qui ne différe du cas précédent que par les ſignes plus & moins.

Soit donc la propoſée $xx-48x-128=0$, je prens le tiers de 48 qui eſt 16, & j'en fais le cube qui eſt 4096; je prens auſſi la moitié de 128 qui eſt 64, & faiſant le quarré de 64, je trouve encore 4096; deſorte que $\frac{p^3}{27}=\frac{qq}{4}$, ainſi les deux négatives ſont égales; c'eſt pourquoi je multiplie le dernier terme 128 par 3, & j'ai 384 que je diviſe par le coefficient 48 du troiſiéme terme, & le quotient 8 eſt la racine poſitive $2f=\frac{3q}{p}$; ainſi les deux négatives ſont $x+4=0$ & $x+4=0$.

Mais ſi les deux négatives ſont inégales, je prens les deux équations $p=3ff+gg$ & $q=2f^3-2ggf$ que nous avons trouvées en comparant les termes de la transformée & de la propoſée; & faiſant le quarré $4ff$ de la poſitive $2f$, je retranche de ce quarré la valeur de p qui eſt $3ff+gg$, & le reſte $ff-gg$ diviſe exactement la valeur de q qui eſt $2f-2ggf$, & donne pour quotient $2f$ qui eſt la racine du quarré $4ff$.

Et ſi je prenois de même le quarré de l'une des négatives $-f-g$, qui eſt $ff+2gf+gg$, & que je retranchaſſe ce quarré de la valeur de p, le reſte ſeroit $2ff-2gf$, lequel diviſeroit exactement la valeur de q, & donneroit pour quotient $f+g$ racine du quarré.

D'où il ſuit de même, que dans le premier cas, que ſi la racine poſitive n'eſt pas incommenſurable, on trouvera toujours un quarré plus grand que le coefficient du troiſiéme terme de la propoſée, duquel aïant ôté ce coefficient, le reſte diviſera exactement le dernier terme, & donnera pour quotient la racine du quarré, qui ſera par conſéquent la racine poſitive de l'équation; & ſi les deux négatives ſont commenſurables, on trouvera toujours un quarré moindre que le coefficient p, lequel étant ôté de p, le reſte divi-

ſera exactement le dernier terme, & donnera pour quotient la racine du quarré, laquelle ſera par conſéquent l'une des négatives.

Soit donc la propoſée $z^3 * -28z - 48 = 0$, où il y a deux négatives; comme le cube de 9, qui eſt le $\frac{1}{3}$ du coefficient 28, eſt plus grand que le quarré de 24 qui eſt la moitié du dernier terme; je prens un quarré plus grand que 28, & ce quarré eſt 36; j'en retranche 28, & le reſte eſt 8; & diviſant 48 par 8, le quotient eſt 6, qui eſt préciſément la racine du quarré 36; ainſi 6 eſt la racine poſitive.

Pour trouver les négatives, je prens un quarré moindre que 28, & ce quarré eſt 25, lequel étant ôté de 28, le reſte eſt 3; & diviſant 48 par 3, le quotient eſt 16, qui n'eſt pas la racine de 25; ainſi je prens un autre quarré moindre, c'eſt-à-dire 16, & retranchant 16 de 28, le reſte eſt 12; diviſant donc 48 par 12, le quotient eſt 4, qui eſt préciſément la racine du quarré 16; ainſi l'une des racines négatives eſt -4; & puiſque les deux doivent faire -6, la ſeconde eſt par conſéquent -2: les trois racines ſont donc $x-6=0$, $x+4=0$ & $x+2=0$.

Que ſi en cherchant à reconnoître les racines, on ne trouve point de quarré plus grand que 28 qui ait les qualités requiſes, c'eſt marque que la racine poſitive eſt incommenſurable; & ſi on ne trouve point de quarré moindre que 28 qui puiſſe ſatisfaire au problême, c'eſt marque que les deux négatives ſont incommenſurables.

Et quand les trois racines ſont réelles, inégales & incommenſurables, l'équation eſt irréductible par l'Analyſe: ainſi ce ſecond cas ne différe du premier que par la différence des ſignes, & je ne l'ai traité à part qu'afin qu'on vît mieux ce que cette différence pouvoit y influer.

Remarque touchant les imaginaires.

Nous venons de voir que dans les deux premiers cas il y a des imaginaires, lorſque $\frac{p^3}{27}$ eſt moindre que $\frac{qq}{4}$; & nous avons dit plus haut que les deux autres cas, c'eſt-à-dire, ceux de la troiſiéme & quatriéme formule n'en étoient jamais exempts; & comme ces imaginaires ne ſauroient être que deux à deux dans une équation non affectée du ſigne radical, & qu'outre cela il faut, afin que l'équation n'ait point de ſecond terme, qu'elles ſoient ou toutes

toutes deux positives, ou toutes deux négatives; ensorte que la troisiéme qui est réelle & égale à la somme, soit positive si elles sont négatives, ou négative si elles sont positives. Nous allons examiner tout ceci en détail, afin de reconnoître mieux ce qui convient à chacun des quatre cas.

Mais auparavant il faut prévenir un doute qui vient naturellement dans l'esprit, quand on entend dire qu'une racine réelle est égale à la somme de deux imaginaires, ce qui paroît d'abord un paradoxe, il faut donc faire attention qu'on n'entend ici parler que des racines imaginaires mixtes; car par rapport aux simples, il est inconteſtable que la somme de deux ne sauroit être égale à une grandeur réelle; & c'est pour cela même qu'il n'est pas possible de faire une équation du troisiéme degré dont le second terme manque, & qui ne soit point affectée, en n'emploïant que des imaginaires simples: mais par rapport aux imaginaires mixtes, comme elles ne sauroient composer une équation du troisiéme degré non affectée, & dont le second terme manque, qu'à moins que leurs parties commensurables n'aïent le même signe & que les incommensurables aïent des signes différens, & qu'outre cela la grandeur qui est sous le signe doit être la même; il est sûr que la somme de deux semblables imaginaires peut être égale à une grandeur réelle. Et en effet, supposons que l'une soit $+a-\sqrt{-bb}$, & que l'autre soit $+a+\sqrt{-bb}$, on voit manifestement que l'une étant ajoutée à l'autre, leur somme est $2a$ qui est une grandeur réelle: quant aux équations du troisiéme degré, qui sans être affectées d'aucun signe, sont cependant composées de deux imaginaires simples, nous avons vû que ces équations avoient tous leurs termes; & je ferai voir bien-tôt qu'on peut aussi les résoudre en faisant évanoüir leur second terme, mais que ce second terme évanoüi fait que les imaginaires deviennent mixtes de simples qu'elles étoient.

Cela supposé, prenons deux imaginaires négatives $x+f+\sqrt{-3gg}=0$ & $x+f-\sqrt{-3gg}=0$, & une racine réelle $x-2f=0$ qui soit égale à leur somme; & faisons le produit de ces trois racines, on verra bien-tôt pourquoi nous supposons $-3gg$ pour la grandeur qui est sous le signe; ce produit, après avoir corrigé l'équation, sera

$$x^3 - 3ffx - 2f^3 = 0 + 3ggx - 6ggf$$

Et faisant attention à ce produit, nous trouverons que si $3ff$ est plus

grand que $3gg$, le troiſiéme terme aura le ſigne moins, & l'équation répondra à la formule $x^3 * - px - q = o$ du ſecond cas ; & ſi $3ff$ eſt moindre que $3gg$, le troiſiéme terme aura le ſigne plus, & l'équation répondra à la formule $x^3 * + px - q = o$ du quatriéme cas ; & enfin, ſi $3ff$ eſt égal à $3gg$, le troiſiéme manquera de même que le ſecond, & l'équation répondra à auquel cas on feroit paſſer $-q$ dans le ſecond membre ; après quoi, tirant la racine cubique, on auroit $x = \sqrt[3]{q}$, ainſi cette troiſiéme forme eſt trop facile pour en parler davantage. Au reſte, les comparaiſons que nous venons de faire de $3ff$ avec $3gg$, font voir pourquoi nous avons choiſi cette expreſſion $3gg$; & nous découvrons en même-tems que lorſque trois quarrés de la partie commenſurable ſont plus grands que la grandeur qui eſt ſous le ſigne, l'équation a la même forme que celle du ſecond cas.

$x^3 - q = o$.
$x^3 = q$
$x = \sqrt[3]{q}$

Pour le ſecond Cas.

Maintenant ſuppoſons $3ff$ plus grand que $3gg$, & que la propoſée ſoit par conſéquent $x - px + q = o$, la comparaiſon des troiſiémes termes donne $-p = -3ff + 3gg$, d'où l'on tire $ff - gg = \frac{p}{3}$.

Et la comparaiſon des derniers termes donne $-q = -2f^3 + 6ggf$, d'où l'on tire $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$.

Je prens $4ff$ quarré de la racine réelle $2f$, & y ajoutant la valeur de $-p$ qui eſt $-3ff + 3gg$, la ſomme eſt $ff + 3gg$; & diviſant la valeur de q qui eſt $2f^3 + 6ggf$, par cette ſomme le quotient eſt $2f$ racine du quarré $4ff$.

Par conſéquent ſi la troiſiéme racine n'eſt pas incommenſurable, on trouvera toujours un quarré, duquel aïant ôté le coefficient du troiſiéme terme de la propoſée, le reſte diviſera exactement le dernier terme, & le quotient ſera la racine du quarré, & par conſéquent la racine réelle.

Soit donc la propoſée $xx * - 25x - 66 = o$, aïant reconnu qu'il y a deux imaginaires, à cauſe que le cube du tiers de 25 eſt moindre que le quarré de la moitié de 66 ; je prens un quarré plus grand que 25, & ce quarré eſt 36 ; j'en retranche 25, & diviſant 66 par le reſte 11, le quotient eſt 6, qui eſt la racine de 36, & par conſéquent la racine réelle eſt $x - 6 = o$; & ſi je veux connoître les imaginaires,

je divise la proposée par $x-6$, & le quotient $xx+6x+11=0$ est l'équation du second degré qui contient les deux imaginaires: je résous cette équation par la méthode enseignée ci-dessus, & je trouve que les deux imaginaires sont $x+3-\sqrt{-2}$ & $x+3+\sqrt{-2}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-25x-66 & xx+6x+11 \\ \hline x-6 & \\ \hline 0+6xx-25x-66 & \\ \quad x-6 & \\ \hline 0+11x-66 & \\ \quad x-6 & \\ \hline 0\quad 0 & \end{array}$$

Mais si en cherchant la racine réelle, je ne trouve point de quarré qui ait les conditions requises, la racine réelle est incommensurable; & voici la façon de la trouver.

Je prens les équations $ff-gg=\frac{p}{3}$ & $f^3+3ggf=\frac{q}{2}$ que la comparaison des termes m'a fait trouver, j'éleve la premiere au cube & la seconde au quarré, & j'ai $f^6-3ggf^4+3g^4ff-g^6=\frac{p^3}{27}$ & $f^6+6ggf^4+9g^6ff=\frac{qq}{4}$.

Et comme $\frac{p^3}{27}$ est moindre que $\frac{qq}{4}$, j'ôte la premiere de ces équations de la seconde, & le reste est $9ggf^4+6g^4ff+g^6=\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}$: je tire la racine quarrée, & j'ai $3gff+g^3=\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}$.

J'ajoute cette derniere équation à l'équation $f^3+3ggf=\frac{q}{2}$, & la somme est $f^3+3gff+3ggf+g^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}$; & tirant la racine cubique, j'ai $f+g=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}}$.

Et divisant l'équation $ff-gg=\frac{p}{3}$ par la racine cubique que je viens de trouver, j'ai $f-g=\frac{\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}}}$.

Et ajoutant enſemble $f+g$ & $f-g$, & leurs valeurs, j'ai :

$$2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{qq}{4}-\frac{p^3}{27}}}^{\frac{1}{3}p} \text{ racine réelle.}$$

Soit donc la propoſée $x^3-6x-16=0$, qui a deux imaginaires, je fais $6=p$ & $16=q$: donc $\frac{p^3}{27}=8$ & $\frac{qq}{4}=64$; j'ôte 8 de 64, & le reſte eſt 56 ; je tire la racine quarrée de ce reſte 56, qui eſt $\sqrt{56}$, & j'ajoute cette racine à $\frac{q}{2}=8$, & la ſomme eſt $8+\sqrt{56}$, dont je tire la racine cubique qui eſt $\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}$, & ceci eſt la premiere partie de la racine ; & diviſant $\frac{1}{3}p=2$ par cette partie, j'ai $\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}^{\frac{1}{3}p}$; & ajoutant ce quotient à la premiere partie, j'ai enfin la racine réelle $x=\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}+\sqrt[3]{8+\sqrt{56}}^{\frac{1}{3}p}$.

Pour le quatriéme Cas.

Soit la propoſée $x^3*+px-q=0$, prenant la transformée ci-deſſus, je ſuppoſe $3ff$ moindre que $3gg$; & alors cette transformée eſt égale à la propoſée.

$$x^3* \quad -3ffx \quad -2f^3=0$$
$$+3ggx-6ggf$$

Comparant donc les termes, j'ai $p=-3ff+3gg$, ou $\frac{p}{3}=-ff+gg$, & $-q=-2f^3-6ggf$, ou $\frac{1}{2}q=f^3+3ggf$; or à cauſe du dernier terme $-q$ qui a le ſigne moins, la racine réelle eſt poſitive, & eſt par conſéquent $+2f$; je prens ſon quarré $4ff$, je lui ajoute la valeur de p qui eſt $-3ff+gg$, & la ſomme eſt $ff+3gg$; & diviſant la valeur de q qui eſt $2f^3+3ggf$, par cette ſomme, le quotient eſt la racine réelle $2f$, ainſi j'agirai ici comme dans le cas précédent.

Soit donc la propoſée $x^3*+3x-76=0$ qui a deux imaginaires ; je prens le quarré 4, l'ajoutant au coefficient 3, la ſomme eſt 7 ; mais ſi je diviſe le troiſiéme 76 par 7, le quotient ne ſera pas la racine de 4 ; je prens donc le quarré 9, lequel ajouté à 3 fait 12, & 76 diviſé par 12 ne donne point la racine de 9 ; je prens donc le quarré 16, lequel ajouté à 3 fait 19, & 76 diviſé par 19

donne 4, qui eſt la racine du quarré 16; ainſi la racine réelle eſt $x-4=0$; & diviſant la propoſée par $x-4=0$, le quotient $xx+4x+19=0$ eſt l'équation qui contient les deux imaginaires; & ſi on réſout cette équation, on trouvera que les imaginaires ſont $x+2-\sqrt{-15}$, & $x+2+\sqrt{-15}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x-76 & xx+4x+19 \\ \hline x-4 & \\ \hline 0+4xx+3x-76 & \\ \quad x-4 & \\ \hline 0+19x-76 & \\ \quad x-4 & \end{array}$$

Et ſi en cherchant la racine réelle, je ne trouve point de quarré qui ait les conditions requiſes, la racine réelle eſt incommenſurable, & pour la trouver,

Je prens les équations $\frac{1}{3}p=-ff+gg$ & $\frac{1}{2}q=f^3+3ggf$, & tranſpoſant la premiere pour avoir la même lettre f, poſitive de part & d'autre, j'ai $ff-gg=-\frac{1}{3}p$; & élevant celle-ci au cube, & l'autre au quarré, j'ai $f^6-3ggf^4+3g^4ff-g^6=-\frac{1}{27}p^3$ & $f^6+6ggf^4+9g^4ff=\frac{1}{4}qq$; & retranchant la premiere de la ſeconde, j'ai $9ggf^4+6g^4ff+g^6=\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$; & tirant la racine quarrée, j'ai $3ggf+g^3=\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$.

Et ajoutant cette équation à l'équation $f^3+3ggf=\frac{1}{2}q$, j'ai $f^3+3ggf+3gff+g^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$; & tirant la racine cubique, j'ai $f+g=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$; & diviſant $ff-gg=-\frac{1}{3}p$ par cette derniere équation, j'ai $f-g=-\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$; & ajoutant $f+g$ avec $f-g$, & leurs valeurs enſemble, j'ai

$$+2f=+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}}$$ racine réelle.

Où l'on voit que la différence de ce cas au précédent, eſt que la ſeconde partie de la racine eſt ôtée de la premiere, au lieu qu'elle y étoit ajoutée; de plus, que ſous le ſecond ſigne radical $\frac{1}{27}p^3$ eſt ajouté à $\frac{1}{4}qq$, au lieu qu'il y étoit retranché.

Ainſi la régle eſt que ſi l'équation contient $-p$, il faut ôter $\frac{p}{27}p^3$ de $\frac{1}{4}qq$, tirer la racine quarrée du reſte, ajouter à cette racine $\frac{1}{2}q$, tirer la racine cubique, & c'eſt la premiere partie; enſuite diviſer $\frac{1}{3}p$ par cette partie, & le quotient ſera la ſeconde partie; & l'on voit aiſément par la formule précédente ce qu'il faut faire quand l'équation contient $+p$.

Pour le premier & le troiſiéme Cas.

Comme ces deux cas-ci ſuppoſent qu'il y a deux racines poſitives & une négative, prenons pour les deux imaginaires $x-f-\sqrt{-3gg}=0$ & $x-f+\sqrt{-3gg}=0$, & pour la réelle $x+2f=0$; & multipliant ces trois racines, nous aurons

$$x^3 * -3ffx + 2f^3 = 0 \\ + 3ggx + 6ggf$$

Et conſidérant cette équation, nous trouverons que ſi $3ff$ eſt plus grand que $3gg$, le troiſiéme terme aura le ſigne moins, & l'équation répondra à la formule du premier cas $x^3-px+q=0$; & au contraire, ſi $3ff$ eſt moindre que $3gg$, le troiſiéme terme aura le ſigne plus; & l'équation répondra à la formule du troiſiéme cas $x^3 * +px+q=0$; enfin, ſi $3ff=3gg$ le troiſiéme terme manquera, & l'équation répondra à cette formule $x^3 * * +q=0$; & ce cas-ci eſt très-facile à réſoudre, n'y aïant qu'à faire paſſer q dans le ſecond membre & tirer enſuite la racine cubique, ce qui donnera $x=\sqrt[3]{-q}$.

Soit donc la propoſée $x^3 * -px+q=0$, qui eſt la formule du premier cas; la comparaiſon des termes donnera $-p=-3ff+3gg$, d'où l'on tire $ff-gg=\frac{1}{3}p$ & $q=2f^3+6ggf$, d'où l'on tire $\frac{1}{2}q=f+3ggf$; & ſi la racine réelle eſt commenſurable, prenant le quarré $4ff$ de cette racine, & y ajoutant la valeur de $-p$ qui eſt $-3ff+3gg$, & diviſant la valeur de q par la ſomme, le quotient donnera $2f$ qui eſt la racine du quarré $4ff$.

Et ſi la racine réelle eſt incommenſurable, on prendra les équations $ff-gg=\frac{1}{3}p$ & $\frac{1}{2}q=f+3ggf$ tirées de la comparaiſon des termes, & achevant le reſte comme nous avons fait pour le ſecond cas, on trouvera $-2f=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$ qui ſera la racine réelle; ainſi tout viendra de même qu'au ſecond cas.

Et ſi la propoſée eſt $x^3 * +px+q=0$ qui eſt la formule du troiſiéme cas, la comparaiſon des termes donnera $p=-3ff+3gg$, d'où l'on tirera $ff-gg=-\frac{1}{3}p$, & $q=2f^3+6ggf$, ou $\frac{1}{2}q=f+3ggf$; & ſi la racine réelle eſt commenſurable, on ajoutera la valeur de p au quarré $4ff$ de la racine réelle; & diviſant la valeur de q par la ſomme, le quotient ſera la racine $2f$ du quarré de même que pour le quatriéme cas.

Et ſi la racine eſt incommenſurable, on prendra les équations

$ff - gg = -\frac{1}{3}p$ & $\frac{1}{2}q = f^3 + 3ggf$ tirées de la comparaiſon des termes ; & achevant le reſte comme pour le quatriéme cas, on trouvera $-2f = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ qui ſera la racine réelle.

Deſorte donc que les quatre cas ſe réduiſent à deux, c'eſt-à-dire, le premier & le ſecond ſont la même choſe, à la ſeule différence que la racine réelle eſt négative dans le premier & poſitive dans le ſecond ; & le troiſiéme & le quatriéme ſont encore le même à l'exception que la racine réelle eſt négative dans le troiſiéme & poſitive dans le quatriéme.

Et la régle générale eſt que ſi la racine réelle eſt commenſurable, & qu'il y ait $-p$ dans l'équation, on trouvera toujours un quarré, duquel retranchant p, (car ajouter $-p$ c'eſt le retrancher) le reſte diviſera exactement le dernier terme, & donnera pour quotient la racine du quarré, qui ſera par conſéquent la racine réelle, & cette racine ſera poſitive s'il y a $-q$, & négative s'il y a $+q$; & ſi l'équation contient $+p$, on trouvera toujours un quarré, auquel ajoutant p la ſomme diviſera le dernier terme, & le quotient ſera la racine du quarré & par conſéquent de la racine réelle, laquelle ſera poſitive s'il y a $-q$ & négative s'il y a $+q$.

Et ſi on ne trouve point de quarré qui ait les conditions requiſes, la racine réelle, lorſqu'il y aura $-p$, s'exprimera par la formule :

$$\mp x = 2f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}}$$

& cette racine ſera poſitive quand il y aura $-q$, & négative quand il y aura $+q$.

Et lorſque l'équation aura $+p$, la racine réelle s'exprimera par la formule :

$$\mp x = 2f = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

& cette racine ſera poſitive quand il y aura $-q$, & négative quand il y aura $+q$.

Voilà donc tout ce qui regarde les équations du troiſiéme degré ; quant à ce qui concerne les équations de ce degré, qui ſans être affectées contiennent deux imaginaires ſimples, comme ces équations ont toujours leur ſecond terme, on les fait évanoüir,

& alors les imaginaires deviennent mixtes ; & pour en être convaincu, ſuppoſons les trois racines $x-\sqrt{-2}=0$, $x+\sqrt{-2}=0$ & $x-3=0$, l'équation ſera $x^3-3xx+2x-6=0$; faiſons évanoüir le ſecond terme en ſuppoſant, comme nous avons enſeigné $x=y+\frac{1}{3}$, ce qui eſt la même choſe que $x=y+1$, la tranſformée ſera $y^3 * +1y+2=0$: donc toutes les racines ſeront moindres d'une unité que celle de la propoſée, puiſque $y=x-1$; par conſéquent ſes racines ſeront $y+1-\sqrt{-2}$, $y+1+\sqrt{-2}$ & $y+1-3=y-2$; & les deux imaginaires, comme on voit, ſont devenuës mixtes de ſimples qu'elles étoient.

$x-\sqrt{-2}$
$x+\sqrt{-2}$

$xx * +2$
$x-3$

$x^3-3xx+2x-6=0$

$x^3=y^3+3yy+3y+1$
$-3xx=-3yy-6y-3$
$+2x=+2y+2$
$+6=+6$

$y^3 * +1y+6=0$

Et cette équation ſe réſoudra en prenant le quarré 4, duquel le coefficient 1 étant ôté, le reſte eſt 3 ; & diviſant 6 par 3, le quotient eſt 2, racine de 4 ; & par conſéquent la racine eſt $y-2=0$, & elle eſt poſitive à cauſe qu'il y a -6.

Diviſant enſuite la transformée $y^3-y-6=0$ par la racine trouvée $y-2$, le quotient $yy+2y+3=0$ ſera l'équation du ſecond degré qui contient les deux imaginaires ; & réſolvant cette équation, par la méthode ci-deſſus, on trouvera $y=-1-\sqrt{1-3}=1-\sqrt{-2}$ & $y=1+\sqrt{-2}$; ainſi les trois racines ſont $y-2=0$ $y+1-\sqrt{-2}=0$ & $y+1+\sqrt{-2}=0$; & mettant au lieu de y, ſa valeur $x-1$, on aura $x-3=0$, $x-\sqrt{-2}=0$ & $x+\sqrt{-2}=0$ qui ſeront les racines de la propoſée.

$y^3-y-6 \mid yy+2y+3$

$y-2$

$0+2yy-y-6$
$y-2$

$0+3y-6$
$y-2$

$0 \quad 0$

J'ajouterai ici deux ou trois exemples pour faire voir l'uſage qu'on peut faire de la réſolution des équations du troiſiéme degré.

PREMIER

PREMIER EXEMPLE.

Deux perſonnes veulent partager 6 loüis de telle ſorte, qu'en faiſant les cubes de ce qu'elles auront pris, la différence de ces cubes ſoit 56.

J'appelle $2a$ la ſomme de 6 loüis, $2y$ la différence des deux parts & $2b$ la différence de leurs cubes; la premiere part ſera donc $a+y$ & la ſeconde $a-y$; & faiſant les cubes de ces deux parts, & retranchant enſuite l'un de l'autre, la différence ſera $6aay+2y^3$ ou $2y^3+6aay$; & cette différence ſera égale à $2b$, ainſi on aura $2y^3+6aay=2b$; & diviſant par 2, on aura $y^3+3aay=b$ qui eſt une équation du troiſiéme degré, laquelle eſt $y^3*+3aay-b=0$; & la diſpoſition des ſignes me fait voir qu'il y a deux imaginaires & une réelle poſitive: & comme $a=3$ & $b=28$, le coefficient $3aa$ eſt donc 27; je prens donc le quarré 1, & l'ajoutant au coefficient 27, la ſomme eſt 28; & diviſant le troiſiéme terme 28 par la ſomme 28, le quotient 1 eſt la racine du quarré 1, ainſi la racine réelle eſt $y-1=0$, donc $y=1$; & par conſéquent la part du premier $a+y=3+1=4$, & celle du ſecond $a-y=3-1=2$; & en effet, le cube de 4 eſt 64 & celui de 2 eſt 8, & leur différence eſt 56.

$a^3+3aay+3ayy+y^3$ cube de la premiere.
$a^3-3aay+3ayy-y^3$ cube de la ſeconde.

$+6aay+2y^3$ différence des cubes.

$2y^3+6aay=2b$

$y^3+3aay=b$

$y^3*+3aay-b=0$

Et ſi on avoit dit que la ſomme à partager étoit 8, & la différence des cubes des parts étoit 98, on auroit eu $3aa=48$ & $b=49$; & prenant le quarré 1, on l'auroit ajouté à 48, ce qui auroit fait 49; & diviſant le troiſiéme terme 49 par la ſomme 49, le quotient 1 auroit été la racine du quarré 1; & par conſéquent la racine réelle auroit été $y-1=0$ & $y=1$: donc la part du premier $a+y=4+1=5$, & celle du ſecond $a-y=4-1=3$; & les cubes de ces deux parts ſont 125 & 27, dont la différence eſt 98.

SECOND EXEMPLE.

Un homme ſe trouvant en compagnie avec un Mathématicien qui lui paroît faire un trop grand éloge des Mathématiques, parie con-

tre lui dix écus qu'il ne devinera pas le nombre de jettons qu'il a dans chacune de ſes mains, quoiqu'il lui diſe que l'une différe de l'autre de 3; & que ſi l'on fait la quatriéme puiſſance de ce qui eſt dans l'une & la quatriéme puiſſance de ce qui eſt dans l'autre, la différence de ces quatriémes puiſſances ſera 609: on demande comment le Mathématicien doit réſoudre la queſtion pour gagner le pari?

Appellons zz la ſomme compriſe dans les deux mains, $2a$ la différence 3 de l'un à l'autre & $2b$ la différence des quatriémes puiſſances; ce qui eſt dans une main ſera donc $z+a$, & ce qui eſt dans l'autre ſera $z-a$; & faiſant les quatriémes puiſſances de $z+a$ & de $z-a$; & prenant leur différence, on aura pour cette différence $8az^3+8a^3z$, & par la condition du problême $8az^3+8a^3z=2b$; & diviſant par 2, puis par $4a$, on aura $z^3+aaz=\frac{b}{4a}$, & par tranſpoſition $z^3+aaz-\frac{b}{4a}=0$, qui eſt une équation du troiſiéme degré, où il y a deux imaginaires & une racine réelle poſitive.

$z^4+4az^3+6aaz^2+4a^3z+a^4$
$z^4-4az^3+6aaz^2-4a^3z+a^4$

$8az^3$	$+8a^3z$	différence.

$8az^3+8a^3z=2b$
$4az^3+4a^3z=b$
$z^3+aaz=\frac{b}{4a}$
$z^3+aaz-\frac{b}{4a}=0$

Et comme $a=\frac{3}{2}$, donc $aa=\frac{9}{4}$; & comme $b=304\frac{1}{2}$, donc $\frac{b}{4a}=\frac{304\frac{1}{2}}{6}$; & multipliant tout par 2, j'ai $\frac{b}{4a}=\frac{609}{12}$; & réduiſant cette fraction au dénominateur 4, j'ai $\frac{b}{4a}=\frac{203}{4}$, ce qui ſe fait en diviſant tout par 3; cela fait, je prens un quarré, qui ajouté à $\frac{9}{4}$ & diviſant enſuite $\frac{203}{4}$, donne au quotient la racine du quarré; & après avoir tenté inutilement les quarrés $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{36}{4}$; je prens enfin le quarré $\frac{49}{4}$, lequel ajouté à $\frac{9}{4}$ fait $\frac{58}{4}$; & diviſant $\frac{203}{4}$ par $\frac{58}{4}$, le quotient eſt $3\frac{29}{58}$ ou $3\frac{1}{2}$ qui eſt la racine de $\frac{49}{4}$; car la racine de $\frac{49}{4}$ eſt $\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$, ainſi la racine réelle eſt $z-\frac{7}{2}=0$; & par conſéquent $z=\frac{7}{2}$: donc dans l'une des mains il y a $z+a=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$; & dans l'autre il y a $z-a=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2$; & les quatriémes puiſſances de 5; & de 2 ſont 625 & 16: donc la différence eſt 609.

TROISIE'ME EXEMPLE.

Un pere voulant exciter l'émulation de ſes enfans, qui étudient les Mathématiques, met une certaine ſomme dans une bourſe, & promet de la donner à celui qui devinera ce qu'il y a dedans, en diſant que le cube de cette ſomme, moins 76 fois cette ſomme, eſt égal à 240; l'un d'eux le devine : comment a-t-il fait?

J'appelle la ſomme z, & par les conditions du problême j'ai l'équation $z^3 - 76z = 240$ ou $z^3 - 76z - 240 = 0$ qui eſt une équation du troiſiéme degré, où il y a deux racines négatives & une poſitive; & pour m'aſſurer s'il n'y a point d'imaginaires, je prens le $\frac{1}{3}$ de 76 qui eſt $25\frac{1}{3}$, & la moitié de 240 qui eſt 120; & comme le cube de $25\frac{1}{3}$, qui eſt $16258\frac{10}{27}$, eſt plus grand que le quarré de 120 qui eſt 14400, je ſuis aſſuré que $\frac{p^3}{27}$ eſt plus grand que $\frac{qq}{4}$, & par conſéquent qu'il n'y a point d'imaginaires, d'autant mieux que le troiſiéme terme a le ſigne moins, & que les deux racines négatives ſont inégales; car autrement $\frac{p^3}{27}$ feroit égal à $\frac{qq}{4}$; ainſi je prens un quarré plus grand que le coefficient 76, duquel aïant ôté 76, le reſte diviſe le dernier terme 240, & donne pour quotient la racine du quarré; je prens donc 81, mais comme ce quarré n'a pas les conditions requiſes, je prens 100, duquel ôtant 76, le reſte eſt 24; & diviſant le dernier terme 240 par 24, le quotient eſt 10 qui eſt la racine de 100; ainſi la racine poſitive eſt $x - 10 = 0$; donc $x = 10$, & il y avoit par conſéquent 10 livres dans la bourſe.

Tandis que l'un de ces enfans devinoit par cette voïe la ſomme contenuë dans la bourſe, les deux autres, encore novices dans leur Science, s'aviſerent de chercher les racines négatives, ce qu'ils firent en prenant des quarrés moindres que le coefficient du ſecond terme, leſquels étant retranchés de ce coefficient, & le reſte diviſant le troiſiéme terme, le quotient fût la racine de quelqu'un de ces quarrés; ainſi l'un après avoir tenté inutilement les quarrés 64 & 49, prit enfin le quarré 36, lequel ôté de 76, le reſte eſt 20; & diviſant 240 par 20, il trouva 6 qui étoit le quarré de 36, & crut par conſéquent avoir deviné, en diſant qu'il y avoit 6 livres dans la bourſe.

Le troiſiéme voulant auſſi deviner, tenta la ſolution par le quarré 25, mais n'en pouvant venir à bout, il prit le quarré 16, lequel ôté de 76 le reſte eſt 60 ; & diviſant 240 par 60, il trouva que le quotient étoit 4, racine de 16; ainſi il crut avoir deviné, en diſant qu'il y avoit 4 livres dans la bourſe ; mais l'un & l'autre ſe trompoient, en ce qu'ils ne prenoient pas garde que les racines de l'équation, qu'ils trouvoient par cette voïe, étoient des racines négatives, & qu'il étoit queſtion de chercher la poſitive.

Fin de la troiſiéme Partie.

L'ARITHMETIQUE DES GÉOMÉTRES.

QUATRIE'ME PARTIE.

Qui traite des Raiſons, Proportions & Progreſſions Arithmetiques & Géométriques ; des Raiſons compoſées ; de quelques propriétés des Nombres & de leur Diviſion, & de ce qu'on doit ſavoir touchant les Incommenſurables.

Ce que c'eſt que Raiſon, Proportion & Progreſſion.

I. QUAND on compare deux grandeurs enſemble pour ſavoir ce que l'une eſt à l'égard de l'autre, la connoiſſance qu'on en tire eſt ce qu'on appelle *raiſon* de ces grandeurs ; & comme on peut examiner deux choſes dans la comparaiſon de deux grandeurs, dont la premiere conſiſte à connoître de combien une grandeur ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par l'autre ; & la ſeconde, à ſavoir combien de fois l'une contient ou eſt contenuë dans l'autre : de-là naiſſent deux ſortes de raiſons, dont l'une s'appelle raiſon Arithmétique & l'autre raiſon Géométrique.

La raiſon Arithmétique conſiſte dans l'excès dont une grandeur

ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par l'autre, & elle ſe trouve en retranchant la moindre des deux grandeurs de la plus grande. La raiſon de 7 à 3 eſt l'excès 4 dont 7 ſurpaſſe 3, & l'on trouve cet excès en retranchant 3 de 7. Communément on appelle la raiſon Arithmétique *différence*, parce que l'excès dont une grandeur ſurpaſſe une autre n'eſt autre choſe que la différence de ces grandeurs.

La raiſon Géométrique conſiſte dans la maniere dont une grandeur contient ou eſt contenuë par l'autre; & on la trouve en diviſant la plus grande par la moindre. La raiſon de 2 à 6 eſt 3, que l'on trouve en diviſant 6 par 2; ce quotient 3 s'appelle auſſi l'*expoſant* des deux grandeurs, ou l'*expoſant* de la raiſon.

Quand les deux grandeurs comparées ſont égales, la raiſon s'appelle *raiſon d'égalité*; & quand elles ſont inégales, la raiſon s'appelle *raiſon d'inégalité*: ainſi la raiſon de 2 à 2 eſt une raiſon d'égalité, & celle de 2 à 3 eſt une raiſon d'inégalité.

La raiſon d'inégalité s'appelle *raiſon de plus grande inégalité* quand la premiere grandeur eſt plus grande que la ſeconde, & on l'appelle *raiſon de moindre inégalité* quand la ſeconde eſt plus grande que la premiere.

Toute raiſon contient donc néceſſairement deux termes, dont le premier s'appelle *l'antécédent*, & le ſecond le *conſéquent*: dans la raiſon 2, 3, le premier terme 2 eſt l'antécédent, & le ſecond 3 eſt le conſéquent.

De même qu'on compare deux grandeurs, on peut auſſi comparer deux raiſons. Quand après avoir trouvé que la différence de 7 à 9 eſt deux, & que celle de 10 à 13 eſt trois, je dis que la premiere raiſon eſt moindre que l'autre, on voit bien que la comparaiſon que je fais ne tombe pas préciſément ſur 7 & 9, ni ſur 10 & 13, mais ſur la raiſon ou le rapport qui ſe trouve entre 7 & 9, & la raiſon qui ſe trouve entre 10 & 13.

De même, quand après avoir trouvé que 2 eſt contenu trois fois dans 6, & que 4 eſt contenu deux fois dans 8, je dis que la premiere raiſon eſt plus grande que la ſeconde; il eſt évident que ma comparaiſon ne tombe ni ſur 2 & 6, ni ſur 4 & 8; mais ſur le rapport qui eſt entre 2 & 6, & ſur celui qui eſt entre 4 & 8.

Quand deux raiſons ſont inégales entr'elles, on dit qu'il y a *inégalité de raiſons*, & quand elles ſont égales, on dit qu'il y a *égalité de raiſons*. La différence de 2 à 4 eſt moindre que celle de 5 à 8: voilà *inégalité de raiſons*. La différence de 2 à 4 eſt égale à celle de 5 à 7: voilà *égalité de raiſons*. De même, la maniere dont

2 eſt contenu dans 6 eſt moindre que la maniere dont 3 eſt contenu dans 12 : voilà *inégalité de raiſons*. La maniere dont 2 eſt contenu dans 6 eſt égale à celle dont 3 eſt contenu dans 9 : voilà *égalité de raiſons*.

Il ne faut pas confondre l'*inégalité* ou l'*égalité* de raiſons avec la raiſon d'*inégalité* ou d'*égalité*. Dans la raiſon d'*inégalité* ou d'*égalité*, on ne compare que deux grandeurs enſemble ; ainſi la raiſon de 2 à 3 eſt d'*inégalité*, & celle de 2 à 2 eſt d'*égalité* ; mais dans l'*inégalité* ou l'*égalité* de raiſons, on compare deux raiſons comme nous venons de montrer.

L'*égalité* de raiſons s'appelle autrement *proportion* ; & cette proportion eſt ou Arithmétique ou Géométrique, ſelon que les raiſons dont elle eſt compoſée ſont Arithmétiques ou Géométriques.

2 & 3 ont la même différence que 4 & 5, ainſi ces quatre grandeurs forment enſemble une *proportion Arithmétique*, qu'on écrit ainſi : 2 . 3 .·. 4 . 5, & qu'on énonce en diſant 2 eſt à 3 comme 4 eſt à 5.

2 eſt contenu trois fois dans 6, de même que 3 eſt contenu trois fois dans 9 ; ainſi ces quatre grandeurs forment enſemble une *proportion Géométrique*, qu'on écrit ainſi : 2 . 6 :: 3 . 9, & qu'on énonce, en diſant 2 eſt à 6 comme 3 eſt à 9.

Le premier terme d'une proportion s'appelle *premier antécédent* ; le ſecond *premier conſéquent* ; le troiſiéme *ſecond antécédent*, & le quatriéme *ſecond conſéquent*. Outre cela, le premier & le dernier s'appellent les *extrêmes*, & le ſecond & le troiſiéme s'appellent les *moïens*.

Quand dans une proportion le premier conſéquent ſert de ſecond antécédent, ou ce qui eſt la même choſe, quand les deux moïens ſont égaux, la proportion s'appelle *continuë*.

Ainſi la proportion Arithmétique 2 . 5 .·. 5 . 8 eſt *continuë*, & pour abréger, on écrit .·. 2 . 5 . 8.

De même la proportion Géométrique 2 . 4 :: 4 . 8 eſt continuë, & pour abréger, on écrit :: 2 . 4 . 8 ; mais on doit énoncer ces proportions de même que s'il n'y avoit point d'abréviations, en diſant 2 eſt à 5 comme 5 eſt à 8, ou 2 eſt à 4 comme 4 eſt à 8.

Dans ces proportions, le terme moïen s'appelle *moïen proportionnel*.

Lorſqu'on a pluſieurs raiſons égales, dont chaque conſéquent ſert d'antécédent à la raiſon ſuivante, cela s'appelle une *progreſſion*.

Les raiſons égales Arithmétiques 2 . 5 .·. 5 . 8 .·. 8 . 11 .·. 11 .

14 .·. 14 . 17, forment une progreſſion Arithmétique qu'on écrit ainſi pour abréger .·. 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 ; mais il faut l'énoncer ſans abréviation, 2 eſt à 5 comme 5 eſt à 8, comme 8 eſt à 11, comme 11 eſt à 14, comme 14 eſt à 17.

Les raiſons égales Géométriques 2 . 4 :: 4 . 8 :: 8 . 16 :: 16 . 32 :: 32 . 64, forment une progreſſion Géométrique qu'on abrége en écrivant :: 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 ; mais on l'énonce ſans abréviation, en diſant 2 eſt à 4 comme 4 eſt à 8, comme 8 eſt à 16, comme 16 eſt à 32, comme 32 eſt à 64.

Comme il y a beaucoup de différence entre les raiſons, proportions & progreſſions Arithmétiques, & les raiſons, proportions & progreſſions Géométriques, nous traiterons à part les unes & les autres, & nous allons commencer par les Arithmétiques.

Des raiſons & progreſſions Arithmétiques.

II. La raiſon Arithmétique conſiſte dans la différence des deux grandeurs qui la compoſent : donc la moindre des deux grandeurs eſt égale à la grande, moins la différence ; & la grande eſt égale à la petite, plus la différence. Soit, par exemple, la raiſon 2 . 5 dont la différence eſt 3 ; il eſt viſible que la petite 2 eſt égale à 5 — 3, & que la grande 5 eſt égale à 2 + 3 ; ainſi au lieu de 2 . 5, je puis écrire 5 — 3 . 5, ou 2 . 2 + 3 ; & ces trois expreſſions 2 . 5, 5 — 3 . 5, 2 . 2 + 3 ſignifient la même choſe.

De même, ſoit une proportion Arithmétique 2 . 5 .·. 7 . 10, dont la différence eſt 3, je puis transformer cette proportion en celle-ci 5 — 3 . 5 .·. 10 — 3 . 7, ou en celle-ci 2 . 2 + 3 .·. 7 . 7 + 3 ; & ces trois expreſſions 2 . 5 .·. 7 . 10, 5 — 3 . 5 .·. 10 — 3 . 7, 2 . 2 + 3 .·. 7 . 7 + 3 ſignifient la même choſe.

PROPOSITION.

Dans toute proportion Arithmétique, la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moïens ; & ſi la proportion eſt continuë, la ſomme des extrêmes eſt double de la moïenne.

Soit la proportion Arithmétique $a . b .·. c . f$, dont nous ſuppoſerons la différence d. Il peut ſe faire que chaque antécédent ſoit plus grand que ſon conſéquent, ou qu'il ſoit moindre ; ſuppoſons qu'il ſoit plus grand, donc a eſt égal à b, plus la

$$a . b .·. c . f$$
$$4 . 2 .·. 7 . 5$$
$$b+d . b .·. f+d . f$$
$$2+2 . 2 .·. 5+2 . 5$$
$$b+d+f = f+d+b$$
$$2+2+5 = 5+2+2$$

différence

différence d, c'eſt-à-dire $a=b+d$, & de même $c=f+d$; mettant donc au lieu de a & de c leurs valeurs, nous aurons $b+d.b\ ::\ f+d.f$; & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moïens, nous aurons d'une part $b+d+f$, & de l'autre $f+d+b$; & comme ces ſommes ſont compoſées des mêmes grandeurs, elles ſeront par conſéquent égales.

Et ſi l'on ſuppoſe que chaque antécédent ſoit moindre que ſon conſéquent, donc la grande b ſera égale à la petite a, plus la différence d, c'eſt-à-dire $b=a+d$, & par la même raiſon $f=c+d$; & mettant ces valeurs de b & de f, nous aurons $a.a+d\ ::\ c.c+d$; & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moïens, nous aurons d'une part $a+c+d$, & de l'autre $a+d+c$; & comme ces deux ſommes ſont compoſées des mêmes grandeurs, elles ſont par conſéquent égales.

$a.b\ ::\ c.f$
$5.7\ ::\ 10.12$

$a.a+d\ ::\ c.c+d$
$5.5+2\ ::\ 10.10+2$

$a+c+d = a+d+c$
$5+10+2 = 5+2+10$

Et ſi la proportion eſt continuë, comme $::a.b.c$, dont nous ſuppoſerons la différence d; comme le ſecond terme b tient lieu du premier conſéquent & du ſecond antécédent, on peut au lieu de $::a.b.c$ écrire $a.b::b.c$; & par conſéquent ſi a eſt plus grand que b, on aura, en transformant la proportion $b+d.b::c+d.c$, & faiſant les ſommes des extrêmes & des moïens $b+d+c=b+c+d$; & ſi a eſt moindre que b, on aura $a.a+d::c.c+d$; & faiſant les ſommes $a+c+d=a+d+c$, où l'on voit toujours que la ſomme des extrêmes eſt égale à celle des moïens; & comme les moïens ſont ici la même & unique grandeur, la ſomme des extrêmes eſt donc égale au double de la moïenne.

$::a.b.c$
$2.4.6$

$a.a+d\ ::\ b.b+d$
$2.2+2 \qquad 4.4+2$
$a+b+d = a+d+b$
$2+4+2 = 2+2+4$
$2+6 = 4+4$

Et pour faciliter l'intelligence de ceci, on n'a qu'à mettre des chiffres au lieu des lettres, & on verra, en ſuppoſant que la proportion eſt $::2.4.6$, que la ſomme des extrêmes $2+6$ eſt égale à $4+4$, qui eſt le double de la moïenne.

$::a.b.c$
$6\ 4.2$

$b+d.b\ ::\ c+d.c$
$4+2.4\ ::\ 2+2.2$
$b+d+c = b+c+d$
$4+2+2 = 4+2+2$
$6+2 = 4+4$

Et ſi on veut que le premier ter-

me ſoit plus grand que le ſecond, on trouvera, en ſuppoſant que la proportion eſt .˙. 6 . 4 . 2, que la ſomme des extrêmes 6+2 eſt égale à la ſomme 4+4, qui eſt le double de la moïenne.

PREMIERE QUESTION.

Quatre perſonnes ont fait une ſociété, la premiere a mis 100 liv. la ſeconde 120; la troiſiéme 150; & les quatre miſes ſont en proportion Arithmétique : on demande combien a mis la quatriéme ?

J'appelle *a* la miſe 100 du premier; *b* celle du ſecond; *c* celle du troiſiéme, & *x* la miſe inconnuë du quatriéme: donc, ſelon les conditions du problême *a . b .˙. c . x*; & faiſant la ſomme des moïens & celle des extrêmes, j'ai *a+x=b+c*; & ôtant *a* de part & d'autre, j'ai *x=b+c−a*, c'eſt-à-dire, la miſe du quatriéme égale à la ſomme des moïennes, moins la premiere miſe; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai *x*=170.

a . b .˙. c . x

a+x=b+c

x=b+c−a

x=120+150−100=170

Et ſi on m'avoit dit que le quatriéme avoit mis 170, & qu'on m'eût caché la miſe du troiſieme, appellant la miſe du quatriéme *c* & celle du troiſiéme *x*, j'aurois eu *a . b .˙. x . c*; & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moïens, j'aurois eu *b+x=a+c*, & étant *b* de part & d'autre *x=a+c−b*, c'eſt-à-dire, la miſe du troiſiéme égale à la ſomme des extrêmes, moins la miſe du ſecond; & mettant les valeurs des lettres connuës *x*=150.

a . b .˙. x . c

b+x=a+c

x=a+c−b

x=100+170−120=150

Et ſi l'on cachoit la ſeconde miſe ou la premiere, en faiſant connoître les trois autres, on les trouveroit de la même façon.

Ou bien on prendra la différence de la premiere miſe à la ſeconde, qui eſt 20; & ajoutant cette différence à la troiſiéme miſe 150, on aura 170 pour la quatriéme; & ſi c'eſt la troiſiéme miſe qu'on cherche, on retranchera la différence 20 de la quatriéme miſe 170, & le reſte 150 ſera la troiſiéme miſe; & ſi l'on cherche la ſeconde, on prendra la différence 20 de la troiſiéme à la quatriéme, & ajoutant cette différence à la premiere 100, la ſomme 120 ſera la ſeconde miſe; & enfin, ſi l'on cherche la premiere, on retranchera 20 de la ſeconde 120, & le reſte 100 ſera la premiere. Tout cela eſt évident par la nature des raiſons Arithmétiques.

SECONDE QUESTION.

Quatre perſonnes doivent partager enſemble la ſomme de 160 livres; la premiere en doit prendre 20, & la quatriéme 60; & l'on demande ce que doivent prendre les deux autres, en ſuppoſant que les quatre parts doivent être en proportion Arithmétique.

J'appelle a la part du premier; b celle du quatriéme; x la part inconnuë du ſecond, & y la part inconnuë du troiſiéme: donc par les conditions du problême $a.x::y.b$; & faiſant la ſomme des extrêmes, & celle des moïens $x+y=a+b$; & ôtant x de part & d'autre, j'ai $y=a+b-x$; & comme toutes les conditions du problême ſont remplies, la queſtion eſt indéterminée, & je puis prendre pour x tel nombre qu'il me plaira, pourvû qu'il ſoit moindre que la ſomme $a+b=20+60=80$, car autrement y n'auroit pas une valeur poſitive.

$a.x::y.b$

$x+y=a+b$

$y=a+b-x$

Ainſi ſuppoſant $x=2$, j'ai $y=20+60-2=78$: donc les quatre parts ſont $a=20$, $y=78$, $x=2$, & $b=60$; & ces quatre parts ſont une proportion Arithmétique $20.2::78.60$, dont la différence eſt 18.

De même ſuppoſant $x=10$, j'ai $y=20+60-10=70$; & les quatre parts 20, 10, 70, 60 ſont une proportion Arithmétique, dont la différence eſt 10, & ainſi des autres ſuppoſitions qu'on pourroit faire.

Et ſi on avoit dit que les quatre miſes alloient toujours en augmentant, alors x auroit dû être moindre que la ſomme $a+b=80$, mais plus grand que $a=20$; ainſi ſuppoſant pour x tel nombre qu'il m'auroit plû entre 20 & 80, j'aurois ſatisfait à la queſtion.

Soit en effet $x=25$, donc $y=80-25=55$, & les quatre miſes 20, 25, 55 & 60 ſont une progreſſion Arithmétique, dont la différence eſt 5.

De même ſuppoſant $x=30$, donc $y=80-30+50$, & les quatre miſes 20, 30, 50 & 60 ſont une progreſſion, dont la différence eſt 10, & ainſi des autres.

TROISIE'ME QUESTION.

Un pere laiſſe en mourant 6200 liv. à partager à ſes quatre enfans,

à condition que le premier aura 2500, & que les trois autres partageront le reſte enſorte que les quatre parts faſſent une proportion Arithmétique.

Appellons a la part du premier; x celle du ſecond; z celle du troiſiéme, & y celle du quatriéme; donc, ſelon les conditions du problême, nous aurons $a.x.:.z.y$, & faiſant la ſomme des extrêmes & celle des moïens $a+y=x+z$; & comme ces deux ſommes font 6200, donc chacune d'elles eſt égale à la moitié de 6200, & par conſéquent $a+y=3100$, & ôtant a de part & d'autre $y=3100-a$, & mettant la valeur de a, $y=600$: voilà donc la part du quatriéme.

$$a.x.:.z.y$$
$$a+y=x+z$$
$$a+y=3100$$
$$y=3100-a:$$
$$y=3100-2500=600=e$$

Et pour avoir la part des autres faiſons $y=e$, & nous aurons $x+z=a+c$; & ôtant z de part & d'autre, nous aurons $x=a+c-z$, & la queſtion eſt indéterminée; mais il faut que

$$x+z=a+c$$
$$x=a+c-z$$
$$\text{ou } z=a+c-x$$

z ſoit moindre que $a+c$ ſi nous voulons que x ait une valeur poſitive, & comme $a+c=2500+600=3100$, je puis prendre pour z tel nombre qu'il me plaira au-deſſous de 3100.

Ainſi ſuppoſant $z=2000$, j'ai $x=3100-2000=1100$, & les quatre parts 2500, 1100, 2000 & 600 font 6200, & forment une proportion dont la différence eſt 1400; & ainſi des autres ſuppoſitions qu'on feroit.

Mais comme il eſt naturel que les aînés aïent plus que les cadets, ſi l'on avoit ajouté que les termes de la proportion iroient tous en diminuant, alors au lieu de rendre z indéterminé, on auroit rendu x indéterminé, en retranchant x de part & d'autre dans l'équation $x+z=a+c$, & l'on auroit eu $z=a+c-x$, où on auroit vû que x auroit dû être non-ſeulement moindre que $a+c$, mais encore moindre que $a=2500$: mais de façon que la valeur de z qu'on en auroit enſuite tirée eût été moindre que x, & plus grande que c; ce qui fait voir qu'il auroit fallu prendre x plus grand que la moitié de $a+c=3100$.

Ainſi ſuppoſant $x=2000$, nous aurions eu $z=3100-2000=1100$, & comme 1100 eſt moindre que $x=2000$, & plus grand que $c=600$, les conditions auroient été remplies; ainſi les quatre parts 2500, 2000, 1100 & 600 auroient fait 6200, & auroient

formé une proportion, dont la différence auroit été 500; & ainſi des autres ſuppoſitions.

Des progreſſions Arithmétiques.

PREMIERE PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Arithmétique, dont les termes vont en augmentant, le dernier terme eſt égal au premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes diminué de l'unité.

Soit la progreſſion Arithmétique $a.b.c.e.f$, dont nous appellerons la différence d, puiſque les termes vont en augmentant: donc le ſecond terme $b=a+d$, & puiſque tous les termes ſe ſurpaſſent de la même façon, le troiſiéme ſera donc $b+d$; & mettant au lieu de b ſa valeur $a+d$, le troiſiéme c ſera $a+d+d$ ou $a+2d$, & par conſéquent le quatriéme ſera $a+3d$ & le cinquiéme $a+4d$; ainſi la progreſſion ſera $a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d$, le dernier terme eſt donc $a+4d$, c'eſt-à-dire le premier terme a, plus la différence d multipliée par 4: or la progreſſion contient 5 termes, & 4 eſt égal à 5 moins un; donc le dernier terme eſt égal au premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes, diminué de l'unité.

SECONDE PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Arithmétique, dont les termes vont en augmentant, ſi l'on retranche le premier terme du dernier, & qu'on diviſe le reſte par le nombre des termes diminué de l'unité, le quotient ſera la différence qui régne dans la progreſſion.

Par la propoſition précédente, le dernier terme eſt égal au premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes, diminué de l'unité; ſi nous appellons donc le nombre des termes n, ce nombre des termes diminué de l'unité ſera $n-1$, & la différence d multipliée par $n-1$, ſera $nd-d$, donc le dernier terme ſera $a+nd-d$: or ſi du dernier terme on retranche le premier terme a, le reſte ſera $nd-d$, lequel diviſé par $n-1$ donnera pour quotient la différence d.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Arithmétique, dont les termes vont en au-

guantant, ſi l'on ôte le premier terme du dernier & qu'on diviſe le reſte par la différence, le quotient ſera le nombre des termes diminué de l'unité.

Par la propoſition précédente, le dernier terme eſt $a+nd-d$, ôtez-en le premier terme a, le reſte ſera $nd-d$, lequel diviſé par d donnera pour quotient $n-1$, c'eſt-à-dire le nombre des termes, diminué de l'unité.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Arithmétique, la ſomme de deux termes également éloignés des extrêmes, eſt égale à la ſomme des extrêmes.

Soit la progreſſion $a.b.c.e.f.g$, dont nous ſuppoſerons la différence d; cette progreſſion peut donc s'exprimer par celle-ci: $a.a+d.a+2d.a+3d.a+4d.a+5d$; & dans cette progreſſion, ſi nous ajoutons enſemble les deux termes $a+d$ & $a+4d$, également éloignés, l'un du premier terme & l'autre du dernier $a+5d$, leur ſomme ſera $2a+5d$, laquelle ſomme eſt égale à la ſomme $2a+5d$ du premier & du dernier terme.

Que ſi nous ajoutons de même les deux termes $a+2d$ & $a+3d$ qui ſont également éloignés des extrêmes, nous trouverons que leur ſomme $2a+5d$ eſt auſſi égale à la ſomme $2a+5d$ des extrêmes.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Arithmétique, la ſomme de tous les termes eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes.

Soit la progreſſion Arithmétique $a.b.c.e.f.g.h.i$ qui a 8 termes; par la propoſition précédente la ſomme $b+h$ eſt égale à la ſomme des extrêmes $a+i$; & de même la ſomme $c+g$ & la ſomme $e+f$ ſont chacune égales à la ſomme $a+i$: donc la ſomme de la progreſſion eſt égale aux quatre ſommes $a+c$, $b+h$, $c+g$ & $e+f$; & comme ces quatre ſommes ſont égales, c'eſt la même choſe de prendre ces quatre ſommes, ou de prendre quatre fois la ſomme $a+i$ des extrêmes: or prendre cette ſomme quatre fois ou la multiplier par 4, c'eſt encore la même choſe, & 4 eſt ici la moitié du nombre des termes 8; donc la ſomme de la progreſſion eſt égale à la ſomme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes.

$a + e$
$b + h$
$c + g$
$e + f$

Et toutes les fois que les termes de la progreſſion ſeront en nombre pair, il eſt viſible que ce ſera la même choſe, attendu que chaque ſomme égale à celle des extrêmes emporte deux termes, & qu'il n'y aura par conſéquent de ſommes égales qu'autant qu'il y aura d'unités dans la moitié du nombre des termes.

Mais quand le nombre des termes ſera impair, comme dans la propoſition *a.b.c.e.f.g.h*, après avoir fait les ſommes égales *a+h*, *b+g*, *c+f*, il reſtera un terme moïen *e* égal à la moitié de l'une des ſommes; & par conſéquent il y aura ici trois ſommes égales & une moitié: or prendre trois ſommes égales & une moitié, ou prendre 3 fois & $\frac{1}{2}$ la ſomme des extrêmes eſt la même choſe: donc la ſomme ſera égale à la ſomme des extrêmes multipliée par $3\frac{1}{2}$ & $3\frac{1}{2}$ eſt ici la moitié du nombre des termes 7; & il en ſeroit de même s'il y avoit un plus grand nombre de termes; deſorte que la propoſition eſt également vraïe, ſoit que le nombre des termes ſoit pair, ſoit qu'il ſoit impair.

Que ſi on vouloit ſe diſpenſer de multiplier par une fraction, lorſque le nombre des termes eſt impair, on multiplieroit le terme moïen par le nombre des termes, ce qui reviendroit au même; car multiplier la ſomme des extrêmes, qui eſt double du terme moïen, par la moitié du nombre des termes, ou multiplier le terme moïen, qui n'eſt que la moitié de la ſomme des extrêmes, par le nombre des termes, c'eſt la même choſe.

Il y a donc dans toute progreſſion Arithmétique cinq choſes principales, qui ſont le premier terme, la différence, le nombre des termes, le dernier terme & la ſomme de la progreſſion; & ſi on en connoît trois des quatre premieres, on peut aiſément connoître les deux autres, comme on va voir dans les queſtions ſuivantes, où nous appliquerons les principes que nous venons d'établir.

PREMIERE QUESTION.

Un homme a fait un voïage qui a duré 16 jours; le premier jour il a fait 1 lieuë, le ſecond 3, le troiſiéme 5, & ainſi de ſuite en augmentant chaque jour de deux lieuës: combien en a-t-il fait en tout, & quel eſt le nombre de lieuës qu'il a fait le dernier jour?

Je prens la différence 2, je la multiplie par 15 qui eſt le nombre des termes 16 diminué de l'unité, le produit eſt 30, auquel j'ajoute le premier terme 1, & la ſomme 31 eſt le dernier terme [*premiere propoſition.*] J'ajoute à ce dernier terme le premier ter-

me 1, & la ſomme 32 eſt la ſomme des extrêmes. Je multiplie cette ſomme 32 par 8, qui eſt la moitié du nombre des termes, & le produit 256 eſt la ſomme de la progreſſion [*cinquiéme propoſition;*] ainſi cet homme a fait le dernier jour 31 lieuës, & la ſomme totale des lieuës qu'il a faites eſt 256, ainſi qu'on peut voir par la progreſſion entiere que j'ai miſe ici : 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31.

15
2
30
1
31 dernier terme.
1
32 premier & dernier terme.
8
256 ſomme de la progreſſion.

SECONDE QUESTION.

Une femme a vendu au marché deux pommes à une perſonne, cinq à une autre, huit à une autre, & ainſi de ſuite en augmentant toujours de trois; & la derniere perſonne à qui elle a vendu a eu 23 pommes : on demande à combien de perſonnes elle a vendu, & la ſomme des pommes que ces perſonnes ont acheté ?

Le premier terme de cette progreſſion eſt 2, la différence eſt 3, le dernier terme eſt 23; & il s'agit de ſavoir quel eſt le nombre des termes, c'eſt-à-dire le nombre de perſonnes, & quelle eſt la ſomme de la progreſſion ou la ſomme des pommes venduës; ainſi je retranche du dernier terme 23, le premier terme 2 & le reſte 21 eſt la différence multipliée par le nombre des termes, diminué de l'unité. Je diviſe donc 21 par la différence 3, le quotient 7 eſt par conſéquent le nombre des termes, moins un; ajoutant donc 1 à 7, la ſomme 8 eſt le nombre des perſonnes à qui cette femme a vendu.

23 — 2 — 21 — 3 | 21 | 7 — 0 — 1 — 8 nombre des termes.

23
2
25 ſomme des extrêmes.
4
100 ſomme de la progreſſion.

J'ajoute le premier terme 2 au dernier 23, & la ſomme eſt 25 que je multiplie par 4, qui eſt la moitié du nombre des termes 8, & le produit

produit 100 eſt la ſomme de la progreſſion, où la ſomme des pommes qui ont été venduës à ces huit perſonnes :

2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 .

TROISIE'ME QUESTION.

Une fontaine a douze jets d'eau, le ſecond jette dans une heure deux pintes d'eau plus que le premier ; le troiſiéme, deux plus que le ſecond ; & les autres vont en augmentant toujours de deux ; & tous enſemble jettent 180 *pintes d'eau : on demande combien chaque jet de cette fontaine jette d'eau dans une heure ?*

Je connois la différence 2 de la progreſſion, le nombre des termes 12 & la ſomme de la progreſſion 180 ; & pour trouver les autres, comme je ſais que la ſomme de la progreſſion eſt un produit de la ſomme des extrêmes, par la moitié du nombre des termes ; je diviſe 180 par 6, qui eſt la moitié du nombre des termes 12, & le quotient 30 eſt la ſomme des extrêmes : or la ſomme des extrêmes contient le premier & le dernier terme, & ce dernier terme contient le premier, plus la différence multipliée par le nombre des termes, diminué de l'unité ; ainſi la ſomme des extrêmes contient 2 fois le premier, plus la difference multipliée par le nombre des termes moins un ; je prens donc la différence 2, je la multiplie par le nombre des termes 12 moins 1, c'eſt-à-dire par 11, & le produit eſt 22 ; je retranche 22 de la ſomme des extrêmes 30, le reſte 8 eſt le double du premier, ainſi le premier terme eſt 4 ; & ce terme étant connu, on trouve facilement les autres, comme on voit ici :

6		
180	30	ſomme des extrêmes.
00		
30	2	
22	11	
	22	
8	double du prem. terme.	
4	premier terme.	

4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18 . 20 . 22 . 24 . 26 .

QUATRIE'ME QUESTION.

Un homme aïant rencontré huit pauvres, a donné au premier deux ſols, au ſecond un certain nombre de plus, & ainſi des autres, en augmentant toujours de la même façon juſqu'au dernier qui a reçû trente ſols : on demande quelle eſt la différence du premier au ſecond, & combien cet homme a donné de ſols ?

Je connois le premier terme 2, le nombre des termes 8 & le dernier terme 30; ainſi retranchant du dernier terme 30 le premier terme 2, le reſte eſt la différence multipliée par le nombre des termes moins 1; je retranche donc 1 du nombre des termes 8, & le reſte eſt 7, par lequel je diviſe 28, & le quotient 4 eſt la différence que je cherche; ainſi le ſecond pauvre a reçû 6 ſols & le troiſiéme 10, &c.

30
2
28

7 | 28 | 4 différence.
0

30
2
32
4
128 ſomme de la progreſſion.

J'ajoute le premier terme 2 au dernier 30; & multipliant la ſomme 32 par 4, moitié du nombre des termes, le produit 128 eſt la ſomme de la progreſſion; ainſi cet homme a donné 128 ſols.

2. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

CINQUIE'ME QUESTION.

Deux Courriers ſont partis en même-tems, l'un de Paris pour aller à Lyon, en faiſant chaque jour deux lieuës plus que le précédent; le ſecond de Lyon pour venir à Paris, en faiſant trois lieuës chaque jour plus que le précédent, & ils ſe ſont rencontrés préciſément au milieu du chemin; le premier au bout de cinq jours, & le ſecond au bout de quatre jours: on demande combien de lieuës chacun d'eux faiſoit chaque jour, en ſuppoſant que de Paris à Lyon il y a 100 lieuës.

Nous avons ici deux progreſſions, la premiere du courrier de Paris, la différence de celle-ci eſt 2, le nombre des termes eſt 5 & la ſomme de la progreſſion eſt 50 lieuës, puiſque les deux courriers ſe rencontrent à mi-chemin de Paris à Lyon. Pour trouver donc le premier terme de cette progreſſion, je diviſe la ſomme 50 de la progreſſion par $2\frac{1}{2}$, qui eſt la moitié du nombre des termes 5, ou en réduiſant tout en fraction, je diviſe 100 par 5, & le quotient 20 eſt la ſomme des extrêmes; & comme cette ſomme contient

5
100 | 20 ſomme des extrêmes.
0.0

2
4
8

20
8
12
6 premier terme.

deux fois le premier terme, plus la différence multipliée par le nombre des termes, diminué de l'unité, je multiplie la différence 2 par 5—1, c'eſt-à-dire par 4, & le produit eſt 8 que je retranche de 20, & le reſte 12 eſt le double du premier terme : donc le premier terme eſt 6 ; ainſi la progreſſion de ce premier courrier eſt 6 . 8 . 10 . 12 . 14 .

La ſeconde progreſſion eſt celle du courrier de Lyon, dont la différence eſt 3, le nombre des termes 4 & la ſomme de la progreſſion eſt 50 ; ainſi diviſant 50 par 2, qui eſt la moitié du nombre des termes, le quotient 25 eſt la ſomme des extrêmes ; & faiſant le produit 9 de la différence 3, par le nombre des termes, moins l'unité, c'eſt-à-dire par 3, je retranche ce produit de la ſomme 25, & le reſte 16 eſt le double du premier terme ; ainſi le premier terme eſt 8, & la progreſſion de ce courrier eſt 8 . 11 . 14 . 17 .

2 | 50 | 25 ſomme des extrêmes.
1.0
.0
3
3
9
25
9
16
8 premier terme.

On réſoudroit de même beaucoup d'autres queſtions de cette nature, que je me diſpenſe de rapporter ici.

Les queſtions ſuivantes demandent d'autres principes que nous allons expliquer.

SIXIE'ME QUESTION.

Un voleur, en s'enfuïant, fait 10 *lieuës par jour ; un archer qui le pourſuit fait* 3 *lieuës le premier jour,* 5 *le ſecond,* 7 *le troiſiéme, & ainſi de ſuite en augmentant chaque jour de deux lieuës : on demande en combien de jours l'archer atteindra le voleur, & combien de lieuës chacun aura fait ?*

Les lieuës que l'archer fait chaque jour forment une progreſſion, dont le premier terme eſt 3 & la différence eſt 2, & tout le reſte nous eſt inconnu ; mais en examinant l'état de la queſtion, je vois que le voleur faiſant 10 lieuës par jour, le nombre des lieuës qu'il aura fait, lorſqu'il ſera atteint, ſera égal à 10 multiplié par le nombre des termes de la progreſſion, c'eſt-à-dire, par le nombre des jours que l'archer aura emploïé pour l'atteindre ; & par conſéquent

appellant ce nombre de termes x, nous aurons $10x$ égaux à la ſomme de la progreſſion, ou au nombre des lieuës que l'archer aura fait.

Appellant donc le premier terme $3=a$, la différence $2=d$ & le nombre des termes x, le nombre des termes, moins l'unité, ſera donc $x-1$, & la différence d multipliée par $x-1$ ſera $dx-d$; & ajoutant à ce produit le premier terme a, la ſomme $a+dx-d$ ſera le dernier terme de la progreſſion; & ajoutant à ce dernier terme le premier terme a, la ſomme $2a+dx-d$ ſera la ſomme des extrêmes; & multipliant cette ſomme par $\frac{1}{2}x$, qui eſt la moitié du nombre des termes, le produit $ax+\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{2}dx$ ſera la ſomme de la progreſſion.

$$\begin{array}{r} x-1 \\ d \\ \hline dx-d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a \\ \hline a+dx-d \end{array}$$ dernier terme.

$$\begin{array}{r} a \\ \hline 2a+dx-d \end{array}$$ ſomme des extrêmes.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x \\ \hline ax+\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{2}dx \end{array}$$ ſomme de la progreſſion.

Or appellant b le nombre 10 des lieuës que le voleur fait chaque jour, & multipliant b par x, le produit bx ſera égal à la ſomme de la progreſſion, ainſi nous aurons $ax+\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{2}dx=bx$; je diviſe tout par x, puis je multiplie par 2, enſuite je retranche $2a$ & j'ajoute d; enfin je diviſe par d, & je trouve $x=\frac{2b-2a+d}{d}$; ainſi le nombre des termes x devient connu; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $x=8$: donc l'archer a atteint le voleur en 8 jours; & la progreſſion qu'il a fait eſt 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17.

$$\begin{array}{rl} ax+\frac{1}{2}dxx-\frac{1}{2}dx=bx & \\ a+\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}d=b & \\ 2a+dx-d=2b & \\ dx=2b-2a+d & \\ x=\frac{2b-2a+d}{d} & \end{array}$$

$$x=\frac{20-6+2}{2}=\frac{16}{2}=8$$

Et ſi on nous diſoit que l'archer a fait 3 lieuës le premier jour, 17 le dernier; & que le voleur, qui faiſoit 10 lieuës par jour, en avoit fait 80 lorſqu'il a été attrappé; & qu'on nous demandât le nombre des termes & la différence de la progreſſion: alors appel-

lant le premier terme $3=a$, le dernier terme $17=c$, la ſomme de la progreſſion $80=f$, & le nombre des termes x, nous aurions $10x=f$, & par conſéquent $x=\frac{f}{10}$; & mettant la valeur de f, nous aurions $x=8$.

$$10x=f$$
$$x=\frac{f}{10}$$
$$x=\frac{80}{10}=8$$

Il ne nous reſteroit donc plus que la différence à connoître; ainſi faiſant le nombre des termes $8=n$ & la différence y, nous multiplierions la différence y par le nombre des termes, moins l'unité, c'eſt-à-dire par $n-1$; & ajoutant au produit $ny-y$, le premier terme a, la ſomme $a+ny-y$ ſeroit le dernier terme; & comme ce dernier terme eſt égal à $17=c$, nous aurions $a+ny-y=c$; & retranchant a de part & d'autre, puis diviſant par $n-1$, nous aurions $y=\frac{c-a}{n-1}$; & mettant les valeurs

$$\begin{array}{r} y \\ n-1 \\ \hline ny-y \\ a \\ \hline a+ny-y \end{array}$$

des lettres connuës, nous aurions $y=2$; ainſi l'archer faiſoit chaque jour 2 lieuës de plus, & ſa progreſſion eſt la même que ci-deſſus. Au reſte, le nombre de termes aïant été une fois connu, on auroit pû trouver la différence en retranchant le premier terme 3 du dernier terme 17, & diviſant le reſte 14 par le nombre des termes, moins l'unité, comme dans les queſtions précédentes; & c'eſt ce que l'Analyſe nous a fait trouver de même.

$$a+ny-y=c$$
$$ny-y=c-a$$
$$y=\frac{c-a}{n-1}$$
$$y=\frac{17-3}{8-1}=\frac{14}{7}=2$$

Enfin, ſi on nous diſoit que l'archer avoit atteint le voleur en 8 jours; que le premier jour il avoit fait 3 lieuës, & qu'il avoit augmẽté les autres jours toujours d'une même façon, & qu'on nous demandât quelle étoit la différence de la progreſſion, & combien de lieuës il avoit fait le dernier jour, en ſuppoſant que le voleur qui faiſoit 10 lieuës par

$$\begin{array}{l} a+ny-y \text{ dernier terme.} \\ a \\ \hline 2a+ny-y \text{ ſomme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}n \\ \hline na+\frac{1}{2}nny-\frac{1}{2}ny=f=bn \\ na+\frac{1}{2}nny-\frac{1}{2}ny=bn \\ a+\frac{1}{2}ny-\frac{1}{2}y=b \\ 2a+ny-y=2b \\ ny-y=2b-2a \\ y=\frac{2b-2a}{n-1} \\ y=\frac{20-b}{8-1}=\frac{14}{7}=2 \end{array}$$

jour, en avoit fait 80 lorſqu'il a été attrapé ? Alors nous aurions $a=3$, $s=80$, $n=8$, $10=b$, & par conſéquent $bn=s$; & appellant la différence y, nous aurions pour l'expreſſion du dernier terme $a+ny-y$; & ajoutant a à ce dernier terme, nous aurions $2a+ny-y$ ſomme des extrêmes; & multipliant cette ſomme par $\frac{1}{2}n$, nous aurions $na+\frac{1}{2}nny-\frac{1}{2}ny$ pour la ſomme de la progreſſion; & cette ſomme étant égale à nb, nous aurions $na+\frac{1}{2}nny-\frac{1}{2}ny=bn$; & diviſant par n, puis multipliant par 2, enſuite ôtant $2a$ de part & d'autre, enfin diviſant par $n-1$, nous aurions $y=\frac{2b-2a}{n-1}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, nous aurions $y=2$; & la différence étant ainſi connuë, on trouveroit aiſément le dernier terme en multipliant 2 par le nombre des termes 8, moins l'unité, ce qui feroit 14; à quoi ajoutant le premier terme 3, on auroit 17 pour le dernier terme.

	2
	7
	14
	3
	17 dernier terme.

SEPTIE'ME QUESTION.

Un homme s'eſt obligé de païer 1162 livres en un certain nombre de ſemaines; la premiere il doit païer une certaine ſomme, la ſeconde quelque choſe de plus, & ainſi de ſuite en augmentant toujours de la même façon; enſorte qu'ajoutant enſemble ce qu'il païera la premiere & la derniere ſemaine, la ſomme ſera 83 liv. quel ſera le premier païement, & la différence des païemens ?

Nous n'avons ici que la ſomme 1162 de la progreſſion, & la ſomme des extrêmes 83; mais ſi nous diviſons la ſomme 1162 de la progreſſion par celle des extrêmes 83, le quotient 14 ſera certainement la moitié du nombre des termes; deſorte que doublant 14, nous aurons 28 pour le nombre des termes; & ſi nous connoiſſions ſéparément le premier ou le dernier terme, tout ſeroit connu; car ſi nous connoiſſions le premier, ôtant 2 fois ce premier de la ſomme 83 des extrêmes, le reſte ſeroit la différence multipliée par le nombre des termes, diminué de l'unité, & nous trouverions aiſément cette dif-

83 |	
1162 |	14
332	2
000	28 nombre des termes.

ference par les principes précédens ; & ce seroit la même chose, si nous connoissions le dernier terme ; car retranchant le dernier terme de la somme 83 des extrêmes, le reste seroit le premier terme, & la différence se trouveroit comme nous venons de le dire.

Mais cela n'étant pas, appellons le premier terme x, la différence y, le nombre des termes $28=n$: donc le nombre des termes, diminué de l'unité, est $n-1$, & nous aurons pour l'expression du dernier terme $x+ny-y$; & ajoutant à ce dernier terme le premier terme x, nous aurons $2x+ny-y$ somme des extrêmes ; or cette somme est égale à 83 : donc nous avons $2x+ny-y=83$; & ôtant $2x$ de part & d'autre $ny-y=83-2x$, & divisant par $n-1$, nous aurons $y=\frac{83-2x}{n-1}$; & toutes les conditions du problême étant remplies, la question est indéterminée ; mais il faut que retranchant $2x$ de 83, le reste soit exactement divisible par $n-1$, c'est-à-dire par 27 ; or je vois qu'en retranchant 2 de 83, le reste 81 peut se diviser exactement par 27 ; & par conséquent $2x$ doit être égal à 2 & $x=1$: donc $y=\frac{81}{27}=3$; ainsi le premier terme est 1 & la différence 3, & la progression est :

$$\begin{array}{l} y \\ n-1 \\ \hline ny-y \\ x \\ \hline x+ny-y \\ x \\ \hline 2x+ny-y \end{array}$$

$2x+ny-y$ somme des extrêmes.

$$2x+ny-y=83$$
$$ny-y=83-2x$$
$$y=\frac{83-2x}{n-1}$$

1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . 28 . 31 . 34 . 37 . 40 . 43 . 46 . 49 . 52 . 55 . 58 . 61 . 64 . 67 . 70 . 73 . 76 . 79 . 82 .

Et si j'avois supposé $2x=29$: donc $y=\frac{83-29}{27}=\frac{54}{27}=2$, & $x=14\frac{1}{2}$, & la progression auroit été :

$14\frac{1}{2}$. $16\frac{1}{2}$. $18\frac{1}{2}$. $20\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $24\frac{1}{2}$. $26\frac{1}{2}$. $28\frac{1}{2}$. $30\frac{1}{2}$. $32\frac{1}{2}$. $34\frac{1}{2}$. $36\frac{1}{2}$. $38\frac{1}{2}$. $40\frac{1}{2}$. $42\frac{1}{2}$. $44\frac{1}{2}$. $46\frac{1}{2}$. $48\frac{1}{2}$. $50\frac{1}{2}$. $52\frac{1}{2}$. $54\frac{1}{2}$. $56\frac{1}{2}$. $58\frac{1}{2}$. $60\frac{1}{2}$. $62\frac{1}{2}$. $64\frac{1}{2}$. $66\frac{1}{2}$. $68\frac{1}{2}$.

Et si j'avois supposé $x=56$, j'aurois eu $y=\frac{83-56}{27}=\frac{27}{27}=1$ & $x=28$, & alors la progression auroit été :

28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 .

HUITIE'ME QUESTION.

Un homme doit païer 1162 *livres en vingt-huit ſemaines, en augmentant chaque ſemaine de la même façon : on demande combien il païera la premiere ſemaine, combien la derniere & quelle ſera la différence de cette progreſſion ?*

Je diviſe 1162 par 14, qui eſt la moitié du nombre des termes 28, & le quotient 83 eſt la ſomme du premier & du dernier terme ; deſorte que ſi je connoiſſois ſéparément le premier ou le dernier terme, tout ſeroit connu ; car retranchant de la ſomme des extrêmes le premier ou le dernier terme, le reſte ſeroit le dernier ou le premier terme ; & quant à la différence, je la trouverois en retranchant le premier terme du dernier, & diviſant le reſte par les nombres des termes moins, c'eſt-à-dire par 27.

14	
1162	83 ſomme des extrêmes.
42	
0.	

Mais cela n'étant pas, j'appelle x le premier terme, y la différence ; & achevant le reſte comme dans la queſtion précédente, je trouverois $y=\frac{83-2x}{37}$; & déterminant x, je trouverois les trois différentes ſolutions que nous avons trouvées ci-deſſus.

NEUVIE'ME QUESTION.

Un homme s'eſt engagé de donner à un ouvrier le premier jour 5 *ſols ; le ſecond* 7 *ſols, & ainſi de ſuite, en augmentant toujours de deux ſols ; & quand ils ſont venus à faire leur compte, la ſomme totale a été* 96 *ſols : on demande combien de jours l'ouvrier a travaillé, & combien il a gagné le dernier jour ?*

Nous connoiſſons dans cette progreſſion le premier terme 5, la différence 2 & la ſomme de la progreſſion 96, & ce qu'on nous demande eſt le nombre des termes & le dernier terme.

Pour réſoudre la queſtion, j'appelle le premier terme $5=a$; la différence $2=d$; la ſomme de la progreſſion $96=s$; le nombre inconnu des termes y, & le dernier terme z ; multipliant donc la différence d par y, j'aurai $dy-d$; & ajoutant à ce produit le premier terme a, j'aurai $a+dy-d$ égal au dernier terme ; & comme nous ſuppoſons

poſons que ce dernier terme eſt z, nous avons $z=a+dy-d$.

Et ſi nous ajoutons le premier terme à ce dernier terme $a+dy-d$, nous aurons $2a+dy-d$ ſomme des extrêmes; & multipliãt cette ſomme par $\frac{1}{2}y$, qui eſt la moitié de la ſomme des termes, nous aurõs $ay+\frac{1}{2}dyy-\frac{1}{2}dy$ ſomme de la progreſſion.

Or la ſomme de la progreſſion eſt $ſ$, donc nous avons $ay+\frac{1}{2}dyy-\frac{1}{2}dy=ſ$; multipliant tout par 2, & ordõnant l'équatiõ, nous avons $dyy+2ay-dy=2ſ$; & diviſant par d, afin que le premier terme n'ait point de coefficiẽt, nous avons $yy+\frac{2ay}{d}-\frac{dy}{d}=\frac{2ſ}{d}$, qui eſt une équation du ſecond degré.

$$\frac{\frac{d}{y-1}}{dy-d}$$

$$\frac{a}{a+dy-d=z} \text{ dernier terme.}$$

$$\frac{a}{2a+dy-dy} \text{ ſomme des extrêmes.}$$

$$\frac{\frac{1}{2}y}{ay+\frac{1}{2}dyy-\frac{1}{2}dy} \text{ ſomme de la progreſſion.}$$

$$ay+\tfrac{1}{2}dyy-\tfrac{1}{2}dy=ſ$$
$$2ay+dyy-dy=2ſ$$
$$dyy+2ay-dy=2ſ$$
$$yy+\frac{2ay}{d}-\frac{dy}{d}=\frac{2ſ}{d}$$

$$yy+\frac{2ay}{d}-\frac{dy}{d}+\frac{4aa}{4dd}-\frac{4ad}{4dd}+\frac{dd}{4dd}=\frac{2ſ}{d}+\frac{4aa}{4dd}+\frac{4ad}{4dd}+\frac{dd}{4dd}$$

$$yy+\frac{2ay}{d}-\frac{dy}{d}+\frac{4aa}{4dd}-\frac{4ad}{4dd}+\frac{dd}{4dd}=\frac{8ſd}{4dd}+\frac{4aa}{4dd}-\frac{4ad}{4dd}+\frac{dd}{4dd}$$

$$y+\frac{2a}{2d}-\frac{d}{2d}=\sqrt{\frac{8ſd+4aa-4ad+dd}{4dd}}$$

$$y=-\frac{2a}{2d}+\frac{d}{2d}+\sqrt{\frac{8ſd+4aa-4ad+dd}{4dd}}$$

$$y=-\frac{2a}{2d}+\frac{d}{2d}+\frac{1}{2d}\sqrt{8ſd+4aa-4ad+dd}$$

$$z=a-d-\frac{2ad}{2d}+\frac{dd}{2d}+\frac{d}{2d}\sqrt{8ſd+4aa-4ad+dd}$$

$$z=\frac{2ad}{2d}-\frac{2dd}{2d}-\frac{2ad}{2d}+\frac{dd}{2d}+\frac{d}{2d}\sqrt{8ſd+4aa-4ad+dd}$$

$$z=-\tfrac{1}{2}d+\tfrac{1}{2}\sqrt{8ſd+4aa-4ad+dd}$$

Et prenant, ſelon la méthode générale que nous avons enſeignée pour les équations du ſecond degré, $\frac{2a-d}{2d}$, qui eſt la moitié du coefficient du ſecond terme, j'en fais le quarré $\frac{4aa-4ad+dd}{4dd}$; & ajoutant ce quarré de part & d'autre, j'ai $yy+\frac{2ay-dy}{d}+\frac{4aa-4ad+dd}{4dd}=\frac{2f}{d}+\frac{4aa-4ad+dd}{4dd}$; & réduiſant $\frac{2f}{d}$ au dénominateur commun $4dd$, & corrigeant l'expreſſion, j'ai $yy+\frac{2ay+dy}{d}+\frac{4aa-4ad+dd}{4dd}=\frac{8fd+4aa-4ad+dd}{4dd}$; & tirant la racine quarrée, puis ôtant de part & d'autre $\frac{2a-d}{2d}$, j'ai $y=-\frac{2a+d}{2d}+\frac{\sqrt{8fd+4aa-4ad+dd}}{2d}$; & tirant le dénominateur $4dd$ hors du ſigne $y=-\frac{2a+d}{2d}+\frac{1\sqrt{8fd+4aa-4ad+dd}}{2d}$; & mettant cette valeur de y dans la valeur de $z=a+dy-d=a-d+dy$, j'ai $z=a-d-\frac{2ad+dd}{2d}+\frac{d}{2d}\sqrt{8fd+4aa-4ad+dd}$; & réduiſant $a-d$ en fraction, dont le dénominateur ſoit $2d$; & corrigeant enſuite l'expreſſion, j'ai $z=-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}\sqrt{8fd+4aa-4ad+dd}$, ainſi y & z ſont connuës; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $y=8$ & $z=19$: donc le nombre des termes eſt 8 & le dernier terme eſt 19, & la progreſ-

$y=\frac{-10+2}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{1536+100-40+4}=-2+\frac{1}{4}\sqrt{1600}=8$ nomb. des termes.

$z=-1+\frac{1}{2}\sqrt{1600}=-1+\frac{1}{2}\times 40=-1+20=19$ dernier terme.

ſion eſt : 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 ; l'ouvrier a donc travaillé 8 jours, & le dernier jour il a gagné 19 ſols.

DIXIE'ME QUESTION.

Une progreſſion étant connuë, trouver la ſomme des quarrés de ſes termes, ou la ſomme des cubes, ou celles des quatriémes puiſſances, &c.

Cette queſtion dépend d'un principe que M. Paſchal a expliqué dans ſon Traité du Triangle Arithmétique, & dont nous allons donner ici le précis.

Suppoſons que la progreſſion ait quatre termes, & que ſon premier terme ſoit a & la différence d, les quatre termes ſeront $a . a+d . a+2d . a+3d$, & leur ſomme ſera $4a+6d$; je prens le terme qui viendroit immédiatement après le dernier, ſi la progreſſion étoit continuée, & ce terme eſt $a+4d$; & comme je veux chercher d'abord les quarrés des termes de la progreſſion, je prens ce terme $a+4d$, que j'appellerai terme excédent, & je l'éleve au cube, c'eſt-à-dire, à une puiſſance plus élevée d'un degré que les quarrés que je cherche; ce cube eſt $a^3+12aad+48add+64dd$ que nous appellerons cube du terme excédent.

Je prens dans la Table des puiſſances, le rang des cubes qui eſt $a^3+3aab+3abb+b^3$; & je regarde le premier terme a^3 de ce rang comme repréſentant le cube du premier terme de la progreſſion, & le dernier terme b^3 comme repréſentant le cube de la différence de la progreſſion, mais multiplié par le nombre 4 des termes; dans le ſecond & le troiſiéme terme, b & bb repréſentent l'un la différence & l'autre le quarré de la différence; mais aa & a ne repréſentent plus le premier terme de la progreſſion, mais les termes même de la progreſſion; deſorte que aa repréſente les quarrés des termes, & a repréſente leur ſomme.

Cela poſé, je prens le cube $a^3+12aad+48add+64dd$ du terme

a^3 $\qquad$ $4d^3$
$\qquad\qquad 12add+18d^3$

$a^3 \qquad +12add+22d^3$ ſomme à retrancher
$a^3+12aad+48add+64d^3$ cube de l'excédent.
$a^3 \qquad +12add \quad 22d^3$

$12aad+36add+42d^3$ reſte

$12aad+36add+42d^3 \mid 4aa+12ad+14dd$ quotient & ſom. des quarrés

---

$3d \quad 3d \quad 3d$

---

o o

aa
$aa+2ad+dd$
$aa+4ad+4dd$
$aa+6ad+9dd$

$4aa+12ad+14dd$ ſomme des quarrés.

excédent, & j'en retranche a^3, c'eſt-à-dire le cube du premier terme, parce que le rang $a^3+3aab+3abb+b^3$ que j'ai pris pour guide, contient a^3 au premier terme; enſuite j'en retranche le cube d^3 de la différence multiplié par 4, ce qui fait $4d^3$, parce que mon guide contient b^3 au dernier terme; enſuite j'en retranche trois fois la ſomme des termes multipliée par le quarré dd de la différence, ce qui fait $12add+18d^3$, parce que mon guide contient au troiſiéme terme $3abb$, & parce que ce guide n'a plus qu'un terme $3aab$ qui repréſente les quarrés des termes multiplié par le triple de la différence; je diviſe le reſte par trois fois la différence, c'eſt-à-dire par $3d$, & le quotient $4aa+12ad+14dd$ eſt la ſomme des quarrés que je cherche.

Et pour m'en aſſurer, je fais les quarrés aa, $aa+2ad+dd$, $aa+4ad+4dd$ & $aa+6ad+9dd$ des quatre termes de la progreſſion; & ajoutant enſemble ces quarrés, leur ſomme $4aa+12ad+14dd$ eſt préciſément égale au quotient trouvé ci-deſſus.

Et pour trouver la ſomme des cubes, j'éleve le terme excédent

$$\begin{array}{r} a^4 \qquad\qquad 4d^4 \\ 16ad^3+24d^4 \\ 24aad^2+72ad^3+84d^4 \\ \hline a^4+24aad^2+88ad^3+112d^4 \text{ ſomme à retrancher.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^4+16a^3d+96aadd+256ad^3+256d^4 \\ a^4\qquad\quad +24aadd+88ad^3+112d^4 \\ \hline 16a^3d+72aadd+168ad^3+144d^4 \text{ reſte.} \end{array}$$

à la quatriéme puiſſance, c'eſt-à-dire, à un degré plus haut que les cubes que je cherche, & cette quatriéme puiſſance eſt $a^4+16a^3d+96aadd+256ad^3+256d^4$; & prenant enſuite dans la Table des puiſſances le rang $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$ des quatriémes puiſſances qui doit me ſervir de guide, je retranche de la quatriéme puiſſance de l'excédent, 1°. La quatriéme puiſſance du premier terme a de la progreſſion, à cauſe que mon guide contient a^4 au premier terme. 2°. La quatriéme puiſſance de la différence d multipliée par le nombre des termes 4, ce qui fait $4d^4$, à cauſe que mon guide contient b^4 au dernier terme, & qu'il faut multiplier ce dernier terme par le nombre des termes de la progreſſion. 3°. La ſomme des termes de la progreſſion, multipliée par 4 cube de la différence d, ce qui fait $16ad^3+24d^4$, parce que mon guide

contient au quatriéme terme $4ab^3$. 4°. La ſomme des quarrés de

$16a^3d+72aadd+168ad^3+144d^4 \mid 4a^3+18aad+42add+36d^3$ quotient

$4d \quad 4d \quad 4d \quad 4d$

0 0 0 0

a^3
$a^3+3aad+3add+d^3$
$a^3+6aad+12add+8d^3$
$a^3+9aad+27add+27d^3$

$4a^3+18aad+42add+36d^3$

la progreſſion, multipliée par 6, quarrés de la différence d, ce qui fait $24aad^2+72ad+84d$, à cauſe que mon guide contient au troiſiéme terme $6aabb$. 5°. Enfin, comme il ne reſte plus à mon guide que le ſecond terme $4a^3b$ qui repréſente la ſomme des cubes multipliée par quatre fois la différence, je diviſe le reſte par $4d$, & le quotient $4a^3+18aad+42add+36d^3$ eſt la ſomme des cubes; & pour m'en aſſurer, je fais les cubes des quatre termes de la progreſſion, & les ajoutant enſemble, je trouve que leur ſomme $4a^3+18aad+42add+36d^3$ eſt la même que le quotient ci-deſſus.

Et ſi je voulois la ſomme des quatriémes puiſſances, je ferois de même la cinquiéme puiſſance du terme excédent; & prenant enſuite pour guide le cinquiéme rang de la Table des puiſſances $a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$, ce rang me feroit voir qu'il faudroit retrancher de la cinquiéme puiſſance du terme excédent, 1°. La cinquiéme puiſſance du premier terme de la progreſſion, à cauſe que ce rang contient a^5 au premier terme. 2°. La cinquiéme puiſſance de la différence, multipliée par le nombre des termes, à cauſe que ce rang contient b^5 au dernier terme, & que ce dernier terme doit toujours être multiplié par le nombre des termes. 3°. La ſomme des termes multipliée par cinq fois la quatriéme puiſſance de la différence, à cauſe du terme $5ab^4$. 4°. La ſomme des quarrés multipliée par 10, cubes de la différence, à cauſe du terme $10aab^3$. 5°. La ſomme des cubes multipliée par 10, quarrés de la différence, à cauſe du terme $10a^3bb$. 6°. Enfin, comme il ne reſteroit plus dans ce rang que le terme $5a^4b$ qui marque la ſomme des quatriémes puiſſances, multipliée par cinq fois la différence, je diviſerois le reſte par cinq fois la différence, & le quotient ſeroit la

ſomme des quatriémes puiſſances ; & ainſi de même des autres puiſſances plus élevées.

Et ſi on vouloit des formules générales de ceci, on appelleroit le terme excédent t, le premier terme a, la différence d, le nombre des termes n & la ſomme de la progreſſion $ſ$; enſuite pour avoir la ſomme des quarrés, on éleveroit t au cube, ce qui feroit t^3 ; & ſuivant l'indication du troiſiéme rang de la Table des puiſſances, on retrancheroit de t^3 le cube a^3 du premier terme, enſuite le cube d^3 de la différence, multiplié par le nombre des termes n, ce qui feroit nd^3 ; enſuite la ſomme de la progreſſion $ſ$ multipliée par 3, quarrés de la différence, ce qui feroit $3ſdd$; enfin l'on diviſeroit le reſte par $3d$, & le quotient ſeroit la formule générale de la ſomme des quarrés $\frac{t^3-a^3-nd^3-3ſdd}{3d}$.

Et de même pour les cubes, on éleveroit t à la quatriéme puiſſance t^4 ; enſuite ſuivant l'indication du quatriéme rang de la Table des puiſſances, on retrancheroit de t^4, 1°. a^4 ; 2°. nd^4 ; 3°. $4ſd^3$; 4°. la ſomme des quarrés trouvée ci-deſſus, multipliée par 6, quarrés de la différence, ce qui feroit $\frac{6ddt^3-6dda^3-6nd^3-18ſd^4}{3d}$, ou, en corrigeant l'expreſſion, $2dt^3-2da^3-2nd^4-6ſd^3$; 5°. On diviſeroit le reſte par $4d$, & l'on auroit la formule ou l'expreſſion générale de la ſomme des cubes $\frac{t^4-a^4-nd^4-5ſd^3-2dt^3+2da^3+2nd^4+6ſd^3}{4d}$.

Et pour abréger les formules des puiſſances plus élevées, on ſuppoſeroit la ſomme des quarrés $=q$, & celle des cubes $=r$; ainſi pour avoir la formule de la ſomme des quatriémes puiſſances, on éleveroit t à la cinquiéme puiſſance t^5 ; puis, ſuivant l'indication du cinquiéme rang de la Table des puiſſances, on retrancheroit de t^5, 1°. a^5 ; 2°. nd^5 ; 3°. $5ſd^4$; 4°. $10qd^3$; 5°. $10rdd$; enſuite diviſant par $5d$, on auroit la formule $\frac{t^5-a^5-nd^5-5ſd^4-10qd^3-10rdd}{5d}$.

Et appellant la ſomme des quatriémes puiſſances p, on auroit pour la ſomme des cinquiémes puiſſances $\frac{t^6-a^6-nd^6-6ſd^5-15qd^4-20rd^3-15pdd}{6d}$; & ainſi des autres.

On verra dans la ſuite quelle eſt l'utilité de cette dixiéme queſtion.

Des raiſons & des proportions Géométriques.

IV. Les raiſons Géométriques prennent différens noms, ſelon les différens rapports qui ſe trouvent entre leurs termes.

Lorſque le premier eſt double, ou triple, ou quadruple, ou en général multiple du ſecond, la racine s'appelle double, triple, quadruple, & en général multiple.

Et quand, au contraire, c'eſt le ſecond terme qui eſt double, triple, quadruple, &c. du premier, la raiſon s'appelle ſoudouble, ſoutriple, ſouquadruple, & en général ſoumultiple.

Les Anciens avoient inventé des noms particuliers pour exprimer les rapports, non-ſeulement des raiſons dont l'expoſant eſt un nombre entier, mais encore de celles dont l'expoſant eſt un nombre rompu. Ces noms ne ſont plus d'uſage aujourd'hui, cependant comme ils ſe trouvent encore dans la plupart des vieux Livres, il ne ſera pas hors de propos d'en donner ici l'explication.

Quand le premier terme d'une racine contenoit exactement le ſecond un certain nombre de fois, ils appelloient la raiſon *multiple*, & en particulier *double*, *triple*, *quadruple*, &c. & quand c'étoit le ſecond qui contenoit ainſi le premier, ils l'appelloient *ſoumultiple*, & en particulier *ſoudouble*, *ſoutriple*, &c. ainſi que nous diſons encore aujourd'hui.

Quand le premier terme contenoit une fois le ſecond, plus une de ſes parties, la raiſon s'appelloit en général *ſouparticuliere*, & en particulier *ſeſquialtere*, ſi cette partie étoit la moitié du ſecond terme; *ſeſquitierce*, ſi cette partie en étoit le tiers; *ſeſquiquarte*, ſi cette partie en étoit le quart; *ſeſquiquinte*, ſi le reſte en étoit la cinquiéme partie, &c. ainſi la raiſon de 2 à 3 étoit *ſeſquialtere*, parce que 3 contient une fois 2, plus une moitié de 2; celle de 4 à 3 étoit *ſeſquitierce*, parce que 4 contient une fois 3, plus $\frac{1}{3}$ de 3, & ainſi des autres. Et quand le ſecond terme contenoit ainſi le premier, la raiſon s'appelloit en général *ſouſurparticuliere*, & en particulier *ſouſeſquialtere*, *ſouſeſquitierce*, *ſouſeſquiquarte*, &c.

Quand le premier terme contenoit une fois le ſecond, plus quelques-unes des ſes parties, la raiſon s'appelloit en général *ſurpartiente*, & en particulier *ſurbipartiente tierces*; quand ces parties étoient les deux tiers du ſecond, *ſurtripartiente quartes*; quand elles étoient les trois quarts du ſecond, *ſurquatripartiente quintes*; quand elles étoient les quatre cinquiémes du ſecond, &c. ainſi la raiſon de 5 à 3 étoit *ſurbipartiente tierces*, parce que 5 contient une fois 3, plus deux parties de 3, chacune deſquelles en eſt le $\frac{1}{3}$; la raiſon de 7 à 4 étoit *ſurtripartiente tierces*, parce que 7 contient une fois 4, plus trois parties de 4, chacune deſquelles en eſt le $\frac{1}{4}$, &c. & quand c'étoit le ſecond terme qui contenoit ainſi le premier,

la raiſon s'appelloit en général *ſouſurpartiente*, & en particulier *ſouſurbipartiente tierces*, *ſouſurbipartiente quartes*, &c.

Quand le premier terme contenoit plus d'une fois le ſecond, plus une de ſes parties, la raiſon s'appelloit en général *multiple ſurparticuliere*, & en particulier *double ſeſquialtere*, s'il contenoit le ſecond deux fois & $\frac{1}{2}$; *double ſeſquitierce*, s'il le contenoit deux fois & $\frac{1}{3}$; *double ſeſquiquarte*, s'il le contenoit trois fois & $\frac{1}{4}$; & de même *triple ſeſquialtere*, *triple ſeſquitierce*, *triple ſeſquiquarte*, &c. s'il le contenoit trois fois & $\frac{1}{2}$, ou trois fois & $\frac{1}{3}$, ou trois fois & $\frac{1}{4}$, & ainſi des autres; & quand c'étoit le ſecond terme qui contenoit ainſi le premier, la raiſon s'appelloit en général *ſoumultiple*, *ſouſurparticuliere*, & en particulier *ſoudouble ſeſquialtere*, *ſoudouble ſeſquiquarte*, &c.

Enfin, quand le premier terme contenoit deux ou pluſieurs fois le ſecond, plus quelques-unes de ſes parties, la raiſon s'appelloit en général *multiple ſurpartiente*, & en particulier *double ſurbipartiente tierces*, s'il contenoit le ſecond deux fois & $\frac{2}{3}$; *double ſurtripartiente quartes*, s'il contenoit deux fois & $\frac{3}{4}$; *double ſurquatripartiente quintes*, s'il le contenoit deux fois & $\frac{4}{5}$, &c. De même, *triple ſurbipartiente tierces*, *quadruple ſurbipartiente tierces*, &c. s'il le contenoit trois fois & $\frac{2}{3}$, ou quatre fois & $\frac{3}{3}$, &c. Et quand c'étoit le ſecond terme qui contenoit ainſi le premier, on diſoit en général *ſoumultiple ſurpartiente*, *ſoudouble ſurbipartiente tierces*, *ſoudouble ſurtripartiente quartes*, &c. ou *ſoutriple ſurbipartiente tierces*, *ſoutriple ſurtripartiente quartes*, &c.

Aujourd'hui on a banni tous ces termes qui ſont extrêmement durs à prononcer, & l'on ſe contente d'exprimer une raiſon, ou par les termes dont elle eſt compoſée, comme lorſqu'on dit que *b* eſt à *d*, comme 13 eſt à 14, ou par ſes expoſans, c'eſt-à-dire, par les moindres nombres qui ſont en même raiſon que ſon antécédent & ſon conſéquent; comme lorſqu'on dit que 8 eſt à 4, comme 2 eſt à 1, à cauſe que 2 & 1 ſont les moindres nombres qui ſoient entr'eux comme 8 eſt à 4.

Et à propos de ceci, il faut obſerver qu'il y a bien de la différence entre ce qu'on appelle l'*expoſant* d'une raiſon, & ce qu'on appelle les *expoſans* d'une raiſon. L'expoſant d'une raiſon eſt le quotient du plus grand terme diviſé par le moindre; ainſi l'expoſant de 2 à 4 eſt 2, parce que 4 diviſé par 2 donne 2 au quotient; l'expoſant de 5 à 3 eſt $1\frac{2}{3}$, parce que 5 diviſé par 3 donne $1\frac{2}{3}$, &c. Au contraire, les expoſans d'une raiſon ſont les moindres nombres

bres qui ſoient en même raiſon que l'antécédent & le conſéquent; ainſi les expoſans de 12 à 6 ſont 2 & 1, les expoſans de 9 à 3 ſont 3 & 1, &c.

On trouve les expoſans d'une raiſon, de la même maniere qu'on réduit une fraction en moindre dénomination, c'eſt-à-dire, qu'on diviſe le plus grand terme par le moindre; enſuite le moindre par le reſte de la diviſion; puis le premier reſte par le ſecond reſte s'il y en a, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on trouve un reſte qui diviſe exactement & ſans reſte; après quoi on diviſe les deux termes de la raiſon par ce reſte, & les quotiens ſont les expoſans. Ainſi pour trouver les expoſans de 8 à 30, je diviſe 30 par 8, le quotient eſt 3 & il reſte 6; je diviſe le terme 8 par le reſte 6, & la diviſion donne un ſecond reſte qui eſt 2; je diviſe le premier reſte 6 par ce ſecond reſte 2, & la diviſion eſt exacte; c'eſt pourquoi je diviſe les deux termes 8 & 30 par 2, & les quotiens 4 & 15 ſont les *expoſans* de la raiſon 8, 30, & ainſi des autres.

PREMIERE PROPOSITION.

Dans toute raiſon Géométrique a, b, *le plus grand terme* a *eſt égal au moindre* b, *multiplié par l'expoſant* c; *& le petit eſt égal au grand, diviſé par l'expoſant.*

L'expoſant d'une raiſon eſt le quotient qu'on trouve en diviſant le grand terme par le moindre: or dans toute diviſion, le diviſeur qui eſt ici le moindre terme, multiplié par le quotient qui eſt ici l'expoſant, eſt égal au dividende qui eſt ici le grand terme: donc le moindre terme, multiplié par l'expoſant, eſt égal au grand terme.

$a.\ b$	expoſant c
$4.\ 2$	2
$bc.\ b$	
$2\times 2.\ 2$	
$a.\ \frac{a}{c}$	
$4.\ \frac{4}{2}$	

De même dans toute diviſion, le dividende qui eſt ici le grand terme, diviſé par le quotient qui eſt ici l'expoſant, eſt égal au diviſeur qui eſt ici le moindre terme: donc le grand terme, diviſé par l'expoſant, eſt égal au moindre terme.

COROLLAIRE.

Soit donc la raiſon $a.b$, dont nous ſuppoſons l'expoſant $=c$; ſi a eſt plus grand que b, donc $a=bc$, & de même $b=\frac{a}{c}$; ainſi au

lieu de a, je puis mettre bc; & la raiſon $bc.b$ ſera la même que la raiſon $a.b$; & de même au lieu de b, je puis mettre $\frac{a}{c}$, & la raiſon $a.\frac{a}{c}$ ſera encore la même que la raiſon $a.b$; deſorte que ces trois expreſſions $a.b$, $bc.b$, $a.\frac{a}{c}$ ſeront la même choſe.

$a.\ b$	expoſant c
$4.\ 2$	2
$bc.\ b$	
$2\times2.\ 2$	
$a.\ \frac{a}{c}$	
$4.\ \frac{4}{2}$	

De même ſi nous ſuppoſons b plus grand que a, donc $b=ac$ ou $a=\frac{b}{c}$; & mettant ces valeurs de b & de a, les trois expreſſions $a.b$, $a.ac$ & $\frac{b}{c}.b$ ſeront égales & ſignifieront la même choſe.

$a.\ b$
$2.\ 4$
$a.\ ac$
$2.\ 2\times2$
$\frac{b}{c}.\ b$
$\frac{4}{2}.\ 4$

Dans les propoſitions ſuivantes, nous ſuppoſerons toujours le premier terme plus grand que le ſecond, afin d'abréger le diſcours; & l'on pourra facilement juger ce qui arriveroit ſi le ſecond étoit plus grand que le premier.

SECONDE PROPOSITION.

Dans toute proportion Géométrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moïens.

Soit la proportion $a.b::c.d$, ſi nous ſuppoſons que l'expoſant de la raiſon $a.b$ ſoit f, l'expoſant de la raiſon $c.d$ ſera auſſi f, puiſque ces raiſons ſont égales, donc $a=bf$ & $c=fd$; & mettant ces valeurs au lieu de a & de c dans la proportion, nous aurons la transformée $bf.b::fd.d$ qui ſera la même que la propoſée; faiſant donc le produit des extrêmes & celui des moïens, nous aurons bfd & bfd. & ces deux produits contenant les mêmes grandeurs b, f, d, ſont par conſéquent égaux: or $bf=a$ & $df=c$; remettant donc les grandeurs a & c dans ces deux produits, nous aurons $ad=bc$ ou le produit des extrêmes égal à celui des moïens.

$a.b::c.d$	expoſant f
$4.2::6.3$	2
$bf.b::df.d$	
$2\times2.2\quad 3\times2.3$	
$bfd=bfd$	
$2\times2\times3=2\times3\times2$	
$ad=bc$	

PREMIERE QUESTION.

Quatre Amis ont chacun une ſomme d'argent, & les quatre ſommes ſont en proportion Géométrique; le premier a 4 livres, le ſecond en a 6, le troiſiéme en a 8, combien le quatriéme en a-t-il?

J'appelle la ſomme du premier a, celle du ſecond b, celle du troiſiéme c, & celle du quatriéme qui eſt inconnuë x; par la condition du problême, j'ai $a.b::c.x$; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, j'ai $ax=bc$; & diviſant par a; j'ai $x=\frac{bc}{a}$; ce qui me fait voir qu'il faut multiplier enſemble les deux moïens & diviſer le produit par le premier terme, & le quotient eſt la ſomme x du quatriéme; & c'eſt préciſément ce qu'on fait dans la régle de trois, qui a ſon fondement dans la propoſition précédente.

$$a.b.c.x$$
$$ax=bc$$
$$x=\frac{bc}{a}=\frac{6}{4}\times\frac{8}{1}=\frac{48}{4}=12$$

Et ſi on avoit dit que le quatriéme avoit 12, & qu'on eût caché la ſomme du troiſiéme, alors appellant x la ſomme du troiſiéme & c celle du quatriéme, on auroit eu $a.b::x.c$; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens $ac=bx$, & diviſant par b, $\frac{ac}{b}=x=8$.

$$a.b.x.c$$
$$ac=bx$$
$$\frac{ac}{b}=x=\frac{4}{6}\times\frac{12}{1}=\frac{48}{6}=8$$

De même ſi le ſecond étoit inconnu & les autres connus, on auroit $a.x::b.c$ & $ac=bx$, & $\frac{ac}{b}=x=6$.

$$a.x::b.c$$
$$ac=bx$$
$$\frac{ac}{b}=x=\frac{4}{8}\times\frac{12}{1}=\frac{48}{8}=6$$

Enfin, ſi le premier étoit inconnu, on auroit $x.4::b.c$ & $xc=ab$, & $x=\frac{ab}{c}=4$.

$$x.a::b.c$$
$$xc=ab$$
$$x=\frac{ab}{c}=\frac{6}{12}\times\frac{8}{1}=\frac{48}{12}=4$$

D'où il ſuit que connoiſſant trois termes d'une proportion, on peut toujours connoître celui qui eſt inconnu, ſoit que cet inconnu ſoit le premier, ou le ſecond, ou le troiſiéme, ou le quatriéme.

SECONDE QUESTION.

On veut couper la ſomme de 75 livres en quatre parties, qui ſoient en proportion Géométrique; la premiere doit être 10 livres, la quatriéme 30 : on demande quelles doivent être les deux autres ?

J'appelle la premiere a, la quatriéme b, la ſeconde qui eſt inconnuë x & la troiſiéme z; j'ai donc, ſelon les conditions du problême $a.x::z.b$; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, j'ai $ab=xz$; & diviſant par x, j'ai $z=\frac{ab}{x}$; & le problême ſeroit indéterminé ſi je ne ſavois que les quatre parts doivent faire 75; & que les deux connuës 10 & 30 faiſant enſemble 40, les deux inconnuës enſemble doivent faire 35, car 40 & 35 font 75; j'appelle $35=d$, & j'ai $x+z=d$; & mettant au lieu de z ſa valeur $\frac{ab}{x}$, j'ai $x+\frac{ab}{x}=d$; & multipliant tout par x, j'ai $xx+ab=dx$; & ôtant de part & d'autre ab & dx, j'ai $xx-dx=-ab$, qui eſt une équation du ſecond degré; c'eſt pourquoi ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}dd$, qui eſt la moitié du coefficient d du ſecond terme; & tirant enſuite la racine quarrée, j'ai $x-\frac{1}{2}d=\sqrt{\frac{1}{4}dd-ab}$; & ajoutant $\frac{1}{2}d$ de part & d'autre $x=\frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd-ab}$; & mettant les valeurs des lettres connuës $x=20$, par conſéquent $z=15$; car 20 & 15 font 35, & la proportion eſt 10.20::15.30.

$$a.x::z.b$$
$$ab=xz$$
$$\frac{ab}{x}=z$$

$$x+z=d$$
$$x+\frac{ab}{x}=d$$
$$xx+ab=dx$$
$$xx-dx=-ab$$
$$xx-dx+\tfrac{1}{4}dd=\tfrac{1}{4}dd-ab$$

$$x-\tfrac{1}{2}d=\sqrt{\tfrac{1}{4}dd-ab}$$
$$x=\tfrac{1}{2}d+\sqrt{\tfrac{1}{4}dd-ab}$$

$$x=\tfrac{35}{2}+\sqrt{\tfrac{1225}{4}-300}$$
$$x=\tfrac{35}{2}+\sqrt{\tfrac{1225}{4}-\tfrac{1200}{4}}=\tfrac{35}{2}+\sqrt{\tfrac{25}{4}}=\tfrac{35}{2}+\tfrac{5}{2}=20$$

$$x=\tfrac{1}{2}d-\sqrt{\tfrac{1}{4}dd-ab}$$
$$x=\tfrac{35}{2}-\tfrac{5}{2}=\tfrac{30}{2}=15$$

Et il faut obſerver en paſſant, que l'équation $xx-dx=-ab$ aïant deux racines poſitives, ſi nous avions pris pour x l'autre ra-

cine qui eſt $x=\frac{1}{2}d-\sqrt{\frac{1}{4}dd-ab}$, ainſi que nous avons enſeigné en parlant de la réſolution des équations du ſecond degré, nous aurions eu $z=15$, & par conſéquent $x=20$; & la propoſition auroit été 10.15::20.30, ce qui fait voir que ce problême ſouffre deux réſolutions.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Dans toute proportion continuë, le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moïenne.

Cette propoſition n'eſt qu'une ſuite de la précédente; car ſoit la proportion continuë ::*a.b.c*, puiſque le moïen tient lieu de premier conſéquent & de ſecond antécédent, cette proportion eſt donc égale à celle-ci: *a.b::b.c*, où les quatre termes ſe trouvent; ainſi on trouvera que dans la premiere raiſon *a.b* l'antécédent $a=bd$, & que dans la ſeconde l'antécédent $b=cd$; mettant donc ces valeurs de *a* & *b* dans la proportion, on aura *bd.b::cd.c*; & faiſant le produit des moïens & celui des extrêmes, on aura *bdc* & *bcd*; & comme ces deux produits contiennent les mêmes grandeurs, donc *bdc=bcd*: or puiſque $bd=a$, mettant *a* au lieu de *bd* dans le premier produit, on aura *ac*; & de même comme $cd=b$, mettant *b* au lieu de *cd* dans le ſecond produit *bcd*, on aura *bb*; & par conſéquent $ac=bb$, c'eſt-à-dire, le produit des extrêmes égal au quarré de la moïenne.

:: *a . b . c*
8 . 4 . 2

	exposant
a.b::b.c	*d*
8.4::4.2	2

bd.b::cd.c
2X4.4::2X2.2

bdc=bcd
4X2X2=4X2X2

ac=bb
8X2=4X4
16=16

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si quatre termes a.b.c.d *ſont rangés de telle ſorte que le produit* ad *des extrêmes ſoit égal au produit* bc *des moïens, il y a proportion entre ces quatre termes.*

Pour prouver ceci directement, je multiplie les deux premiers *a.b* par le troiſiéme *c*, & j'ai les produits *ac.bc*, qui ſont entr'eux comme *a* & *b*; car on a vû, dans l'Arithmétique, que ſi on multi-

plie deux grandeurs *a* & *b* par une même grandeur *c*, les produits *ac*, *bc* ſont entr'eux comme les grandeurs à multiplier *a* & *b* : donc nous avons *ac*. *bc* :: *a*. *b*.

a. *b*. *c*. *d* *ad* = *bc*
4. 2. 6. 3 12 = 12

Je multiplie les deux dernieres *c*, *d*, par le premier *a*, & les produits *ac*, *ad* ſont encore entr'eux comme *c* & *d*; nous avons donc *ac* . *ad* :: *c* . *d*.

ac . *bc* :: *a* . *b*
ac . *ad* :: *c* . *d*

Or par la ſuppoſition, le produit *ad* des extrêmes eſt égal au produit *bc* des moïens; mettant donc dans la ſeconde des proportions que nous venons de trouver *bc* au lieu de *ad* qui lui eſt égal, la premiere raiſon *ac* . *bc* de la premiere proportion ſera la même que la premiere raiſon *ac*. *bc* de la ſeconde; ainſi la raiſon *ac*. *bc* ſera égale à la raiſon *a*. *b*; & la même raiſon *ac*. *bc*. ſera auſſi égale à la raiſon *c* . *d*; & puiſque les raiſons *a* . *b* & *c* . *d* ſeront chacune égales à la même *ab* . *bc*, elles ſeront donc égales entr'elles, & l'on aura *a* . *b* :: *c* . *d*, ce qui fait voir que les quatre grandeurs ſont en proportion.

ac . *bc* :: *a* . *b*
c . *d*

a . *b* :: *c* . *d*

Cette démonſtration eſt fondée ſur l'axiôme que *deux choſes étant égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles*; & quoique cet axiôme ne s'entende d'abord que de deux grandeurs, chacune deſquelles eſt égale à une troiſiéme, il n'eſt pas moins vrai par rapport à deux raiſons, chacune deſquelles eſt égale à une troiſiéme raiſon; car la raiſon *a* . *b* ne peut être égale à la raiſon *ac* . *bc* qu'elle n'ait le même expoſant que la raiſon *ac*. *bc*; & de même la raiſon *c* . *d* ne peut être égale à la même raiſon *ac*. *bc*. qu'elle n'ait auſſi le même expoſant; & par conſéquent les raiſons *a* . *b* & *c* . *d* auront le même expoſant & ſeront égales.

COROLLAIRES.

Il ſuit des propoſitions précédentes, 1°. Que ſi l'on a deux produits égaux *ac* = *bd*, prenant les deux racines *a* & *c* du premier produit, ou pour les deux extrêmes d'une raiſon, ou pour les deux moïens; & les deux racines *b* & *d* du ſecond produit, ou pour les deux moïens, ou pour les deux extrêmes, ces quatre racines ſeront toujours en proportion; ainſi on aura *a* . *b* :: *d* . *c*, ou *a* . *d* :: *b* . *c*; & de même *b* . *a* :: *c* . *d*, ou *b* . *c* :: *a* . *d*, &c.

2°. Que ſi l'on a un quarré *bb* égal à un produit *ac*; prenant de même la racine *b* du quarré *bb* pour la moïenne d'une proportion, ou pour les deux extrêmes, & les racines *a* & *b*, du produit *ab*, ou pour les deux moïens, ou pour les deux extrêmes, on trouvera toujours qu'il y aura proportion; ainſi on aura *a*.*b*::*b*.*c*, ou *b*.*a*::*c*.*b*, ou *b*.*c*::*a*.*b*, &c.

$ac = bd$
$3\times4 \quad 2\times6$

a . *b* : : *d* . *c*
3 . 2 :: 6 . 4

a . *d* :: *b* . *c*
3 . 6 :: 2 . 4

b . *a* :: *c* . *d*
2 . 3 :: 4 . 6

b . *c* :: *a* . *d*
2 . 4 :: 3 . 6

Deux produits égaux *ac*, *bd* s'appellent nombres, plans réciproques, à cauſe que la premiere racine du premier eſt à la premiere du ſecond, réciproquement comme la ſeconde du ſecond eſt à la ſeconde du premier.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Dans toute proportion Gémétrique a . b : : c . d, *de quelque maniere qu'on arrange les termes, il y aura toujours proportion, pourvû que les deux moïens reſtent moïens, ou qu'ils deviennent tous deux extrêmes, & que les deux extrêmes reſtent extrêmes, ou qu'ils deviennent tous deux moïens.*

La raiſon en eſt que le produit des extrêmes ſera toujours égal au produit des moïens, & par conſéquent il y aura toujours proportion; car en obſervant ce qui eſt énoncé par la propoſition, ces quatre termes ne peuvent ſouffrir que les huit changemens que l'on voit ici; & dans chacun de ces changemens, faiſant le produit des extrêmes & le produit des moïens, on trouvera toujours que ces deux produits ſont égaux; & par conſéquent il y aura toujours proportion.

a . *b* : : *c* . *d*	*ad*=*bc*
d . *b* : : *c* . *a*	*da*=*bc*
a . *c* : : *b* . *d*	*ad*=*cb*
d . *c* : : *b* . *a*	*da*=*cb*
b . *a* : : *d* . *c*	*bc*=*ad*
b . *d* : : *a* . *c*	*bc*=*ad*
c . *a* : : *d* . *b*	*cb*=*ad*
c . *d* : : *a* . *b*	*cb*=*da*

Que ſi on en veut une preuve plus ſenſible, la voici: Suppoſons que l'expoſant de cette proportion *a*.*b*::*c*.*d* ſoit *f*, donc cette proportion pourra ſe changer en celle-ci, *bf*.*b*::*df*.*d*; & mettant le premier moïen au lieu du ſecond, & le ſecond au lieu du

premier, enſorte que les moïens reſtent toujours moïens, & les extrêmes toujours extrêmes, on aura $bf . df :: b . d$, où l'on voit qu'en faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, on aura $bfd = bfd$ qui ſont égaux, puiſqu'ils ſont compoſés des mêmes grandeurs, & par conſéquent il y aura encore proportion.

$a . b :: c . d$ expoſant f
$8 . 4 :: 6 . 3$ 2

$bf . b :: df . d$
$4X2 . 4 :: 3X2 . 3$

$bf . df :: b . d$
$4X2 , 3X2 :: 4 . 3$

Ce changement s'appelle par les Géométres *alternando* ou *permutando*, parce qu'on compare le premier antécédent bf au ſecond antécédent df, & le premier conſéquent b au ſecond conſéquent d.

$b . bf :: d . df$
$4 . 4X2 :: 3 . 3X2$

De même, ſi l'on met le premier antécédent à la place de ſon conſéquent, & le ſecond antécédent à la place de ſon conſéquent, enſorte que les moïens deviennent extrêmes, & les extrêmes deviennent moïens; & qu'on faſſe enſuite le produit des extrêmes & celui des moïens, on aura $bdf = bfd$ qui ſeront égaux, puiſqu'ils ſont compoſés des mêmes grandeurs; & par conſéquent il y aura encore proportion.

Ce changement s'appelle par les Géométres *invertendo*, parce qu'on renverſe l'ordre en mettant les premiers termes au lieu des ſeconds, & les ſeconds au lieu des premiers.

On prouveroit de même qu'il y auroit toujours proportion en faiſant les ſix autres changemens marqués ci-deſſus, auſquels les Géométres n'ont point donné de noms.

Et pour prouver ceci encore plus ſenſiblement, conſidérons les deux antécédens a & c comme deux entiers, & les deux conſéquens comme les parties de ces entiers, puiſque par la ſuppoſition ces quatre termes ſont proportionnels: donc le premier entier a contient autant de fois ſa partie b que le ſecond entier c contient ſa partie d, donc *permutando* ou *alternando*, c'eſt-à-dire, comparant le premier entier au ſecond entier, & la partie du premier à celle du ſecond; il eſt évident que le premier entier a ſera au ſecond c, comme la partie du premier entier eſt à la partie du ſecond; car ſuppoſant que les parties ſoient chacune la moitié de leur entier, ſi le premier entier a contient le ſecond entier c une fois & $\frac{1}{2}$, il faut néceſſairement que la moitié du premier entier contienne auſſi la moitié du ſecond une fois & $\frac{1}{2}$; car les moitiés

ſont

ſont auſſi grandes entr'elles, que leurs entiers le ſont entr'eux.

De même *invertendo*, c'eſt-à-dire, mettant les parties au lieu de leurs entiers, & les entiers au lieu de leurs parties; il eſt encore évident que puiſque le premier entier *a* contenoit autant de fois ſa partie *b*, que le ſecond entier *c* contenoit ſa partie *d*; la partie *b* ſera par conſéquent contenuë autant de fois dans ſon entier *a*, que la partie *d* dans ſon entier *c*.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Dans toute proportion Géométrique a . b : : c . d, *quoi que ce ſoit qu'on ajoute ou qu'on retranche des antécédens* a . c, *il y aura toujours proportion, ſi les grandeurs ajoutées ou retranchées ſont entr'elles comme les antécédens. Et de même, quoi que ce ſoit qu'on ajoute ou qu'on retranche des conſéquens, il y aura toujours proportion ſi les grandeurs ajoutées ou retranchées, ſont entr'elles comme les conſéquens.*

Suppoſons d'abord qu'on retranche de chaque antécédent ſon conſéquent, on aura donc *a*—*b* . *b* :: *c*—*d* . *d*, & je dis qu'il y aura encore raiſon entre ces quatre termes; car puiſque l'entier *a* contient autant de fois ſa partie *b*, que l'entier *c* contient ſa partie *d*; ôtant des deux entiers leurs parties *b* & *d*, qui ſont en même raiſon que leurs entiers, il eſt sûr que le premier entier *a*, moins ſa partie, contiendra encore autant de fois ſa partie que le ſecond entier *c*, moins ſa partie, contiendra ſa partie; & en effet, ſi le premier entier contenoit ſa partie deux fois, & qu'on en retranche une, il ne le contiendra plus qu'une fois; & comme le ſecond entier contenoit auſſi deux fois ſa partie, ſi on en retranche une, il ne la contiendra auſſi plus qu'une fois, & ainſi la proportion ſubſiſtera.

a . *b* : : *c* . *d*
8 . 4 : : 6 . 3

a—*b* . *b* : : *c*—*d* . *c*
8—4 . 4 : : 6—3 . 3

Ceci s'appelle par les Géométres *dividendo*; & il en ſeroit de même, ſi au lieu de retrancher des antécédens leurs conſéquens, on en retranchoit d'autres grandeurs qui fuſſent en même raiſon que les antécédens.

Suppoſons de même qu'on ajoute chaque conſéquent à ſon antécédent, on aura *a*+*b* . *b* :: *c*+*d* . *d*; & il eſt évident que puiſque le premier entier *a* contient autant de fois ſa partie *b*, que le ſecond entier *c* contient ſa partie *d*; le premier entier, plus ſa par-

a . *b* : : *c* . *d*
a+*b* . *b* : : *c*+*d* . *d*
8+4 . 4 : : 6+3 . 3

tie, doit autant de fois contenir ſa partie que le ſecond entier, plus ſa partie, contient ſa partie : ceci s'appelle, par les Géométres, *componendo*.

De même, ſi on retranche chaque conſéquent de ſon antécédent, & qu'on compare enſuite chaque antécédent à chaque reſte, on aura $a.a-b::c.c-d$, & il y aura encore proportion.

$$a.b::c.d$$
$$a.a-b::c.c-d$$
$$8.8-4::6.6-3$$

Et ſi on ajoute chaque conſéquent à ſon antécédent, & qu'on compare enſuite chaque antécédent à chaque ſomme, on aura $a.a+b::c.c+d$, & il y aura encore proportion ; car il eſt évident que le premier entier ſera à lui-même plus ou moins ſa partie, comme le ſecond entier ſera à lui-même plus ou moins ſa partie : ceci s'appelle, par les Géométres, *convertendo*.

Et ſi on ſuppoſe que les conſéquens ſoient plus grands que les antécédens, ôtant de chaque conſéquent ſon antécédent, on aura $a.b-a::c.d-c$, où il y aura encore proportion ; car les antécédens étant conſidérés comme les parties de leurs conſéquens, la premiere partie ſera à ſon entier, diminué de ſa partie, comme la ſeconde partie à ſon entier, diminué de ſa partie.

$$a.b::c.d$$
$$4.8 \quad 3.6$$
$$a.b-a::c.d-c$$
$$4.8-4::3.6-3$$
$$a.b+a::c.d+c$$
$$4.8+4::3.6+3$$

Et par la même raiſon, il y aura encore proportion ſi l'on fait $a.b+a::c.d+c$, ou $b.b-a::d.d-c$, ou $b.b+a::d.d+c$ qui ſont les changemens relatifs à ceux qu'on vient de voir.

$$b.b-a::d.d-c$$
$$8.8-4::6.6-3$$
$$b.b+a::d.d+c$$
$$8+4.8::6.6+3$$

COROLLAIRE.

Il y a donc cinq ſortes de changemens auſquels les Géométres ont donné des noms ; ainſi ſuppoſant

$$a.b::c.d$$

donc *permutando* ou *alternando* $a.c::b.d$
donc *invertendo* $b.a::d.c$
donc *componendo* $a+b.b::c+d.d$
donc *dividendo* $a-b.b::c+d.d$
donc *convertendo* $a.a+b::c.c+d$

Et les concluſions qu'on tire de ces changemens ſont toujours bonnes, puiſqu'il y a toujours proportion, comme on vient de voir.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Si l'on a deux proportions a.b::c.d *&* e.f::g.h, *& qu'on multiplie par ordre les termes de la premiere par ceux de la ſeconde, c'eſt-à-dire, le premier antécédent par le premier antécédent, le premier conſéquent par le premier conſéquent, & ainſi de ſuite, les quatre produits ſeront encore en proportion.*

Suppoſons l'expoſant de la premiere proportion *m*, celui de la ſeconde *n*, donc la premiere ſe changera en celle-ci $mb.b::md.d$, & la ſeconde en celle-ci $nf.f::nh.h$; & multipliant l'une par l'autre, on aura $mbnf.bf::mdnh.dh$, qui ſeront encore en proportion; car le produit des extrêmes $mbnfdh$ contient les mêmes grãdeurs que le produit des moïens $bfmdnh$.

a	b	: : c	d	expoſant	m
4	2	: : 6	3		2
e	f	: : g	h	expoſant	n
3	1	6	2		3

$mb.b::md.d$

$nf.f \quad nh.h$

$mbnf.bf::mdnh.dh$

$mbnfdh = bfmdnh$

Et ſi au lieu de multiplier l'une par l'autre, on avoit diviſé l'une par l'autre, on auroit eu $\frac{mb}{nf}.\frac{b}{f}::\frac{md}{nh}.\frac{d}{h}$, où il y auroit encore eu proportion, puiſqu'en faiſant les produits des extrêmes, & celui des moïens, on auroit eu $\frac{mbd}{nfh}$ & $\frac{bmd}{fnh}$ qui ſont égaux, attendu que les numérateurs & les dénominateurs ſont compoſés des mêmes grandeurs.

$$\frac{mb}{nf}.\frac{b}{f}::\frac{md}{nh}.\frac{d}{h}$$

$$\frac{mbd}{nfh}=\frac{bmd}{fnh}$$

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là, que quatre grandeurs étant en proportion, leurs quarrés, leurs cubes & leurs autres puiſſances ſont auſſi en proportion; car quand on fait les quarrés de ces quatre grandeurs, on fait la même choſe que ſi on multiplioit tous les termes de la proportion $a.b::c.d$ par ceux de la proportion $a.b::c.d$.

Et de même, quand on fait les cubes des quatre grandeurs, on fait la même choſe que ſi on multiplioit tous les termes de la proportion $aa . bb :: cc . dd$ par ceux de la proportion $a . b :: c . d$.

$$\begin{array}{l} a . b :: c . d \\ a . b :: c . d \\ \hline aa . bb :: cc . dd \\ a . b :: c . d \\ \hline a^3 . b^3 :: c^3 . d^3 \\ a . b :: c . d \\ \hline a^4 . b^4 :: c^4 . d^4 \end{array}$$

Et de-là il ſuit, que les racines ſont encore en proportion; car les quatre termes $a . b :: c . d$ ſont les racines des quatre $aa . bb :: cc . dd$; & en effet, tirer les racines des quatre $aa . bb :: cc . dd$, c'eſt la même choſe que ſi on diviſoit la proportion $aa . bb :: cc . dd$ par celle-ci $a . b :: c . d$; & de même, tirer les racines des quatre $a . b :: c . d$, c'eſt la même choſe que ſi l'on diviſoit la proportion $a . b :: c . d$ par celle-ci $\sqrt{a} . \sqrt{b} :: \sqrt{c} . \sqrt{d}$.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Si l'on a d'une part trois grandeurs a.b.c, *& de l'autre trois autres* d.e.f; *& que les deux premieres* a.b, *d'une part, ſoient entre-elles comme les deux premieres* d.e *de l'autre, enſorte que l'on ait la proportion* a.b::d.e; *& que la ſeconde* b *ſoit à la troiſiéme* c, *d'une part, comme la ſeconde* e *eſt à la troiſiéme* f *de l'autre, enſorte qu'on ait cette autre proportion* b.c::e.f; *on pourra conclurre* a.d::c.f, *c'eſt-à-dire, la premiere d'une part eſt à la premiere de l'autre, comme la troiſiéme d'une part eſt à la troiſiéme de l'autre; ou* a.c::d.f, *c'eſt-à-dire, la premiere eſt à la troiſiéme de la même part, comme la premiere eſt à la troiſiéme de l'autre part.*

Par les conditions portées, nous avons, 1°. $a . b :: d . e$, donc *alternando*, nous avons $a . d :: b . e$; 2°. Nous avons $b . c :: e . f$, donc *alternando*, $b . e :: c . f$.

$$\begin{array}{ll} a . b :: d . e & \\ a . d :: b . e & \text{alternando.} \\ b : c :: e . f & \\ b . e :: c . f & \text{alternando.} \\ b . e :: \begin{matrix} a . d \\ c . f \end{matrix} & \\ a . d :: c . f & \end{array}$$

Or par la premiere alterne nous avons auſſi $b . e :: a . d$; car c'eſt la même choſe de dire $a . d :: b . e$, ou $b . e :: a . d$: donc la raiſon $b . e$ eſt égale à la raiſon $a . d$, & égale auſſi à la raiſon $c . f$; & puiſque les raiſons $a . d$ & $c . f$ ſont égales à la même raiſon $b . e$, elles ſont donc égales entr'elles: donc $a . d$

:: *c* . *f*, c'eſt-à-dire, la premiere d'une part eſt à la premiere de l'autre part, comme la troiſiéme d'une part eſt à la troiſiéme de l'autre.

Et ſi l'on fait *alternando* dans cette derniere proportion, on aura *a* . *c* :: *d* . *f*, c'eſt-à-dire, la premiere d'une part eſt à la troiſiéme de la même part, comme la premiere de l'autre part eſt à la troiſiéme de la même part.

a . *c* : : *d* . *f* alternando.

Ceci s'appelle, par les Géomètres, conclurre *ex æquo ordinato*, c'eſt-à-dire par *égalité ordonnée*, à cauſe que comparant le premier d'une part au premier de l'autre part, on trouve que le troiſiéme de la premiere part eſt au troiſiéme de la ſeconde dans la même raiſon; ce qui eſt en effet dans tout l'ordre qu'on peut ſouhaiter.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Si l'on a d'une part trois grandeurs a, b, c, *& de l'autre trois autres grandeurs* d, e, f; *& que les deux premieres d'une part ſoient entr'elles, comme les deux premieres de l'autre, enſorte qu'on ait la proportion* a . b : : d . e; *& qu'enſuite les deux dernieres de la premiere part ſoient entr'elles, non plus comme les deux dernieres de l'autre part, mais comme la troiſiéme eſt à la premiere, enſorte qu'on ait la proportion* b . c : : f . d; *on pourra conclurre* a . c : : f . e, *c'eſt-à-dire, la premiere d'une part eſt à la troiſiéme de la même part, comme la troiſiéme de la ſeconde part eſt à la ſeconde de la même part; ou* a . f : : c . e, *c'eſt-à-dire, la premiere d'une part eſt à la troiſiéme de l'autre part, comme la troiſiéme de la premiere part eſt à la ſeconde de la ſeconde part.*

Par les conditions portées, nous avons, 1°. *a* . *b* : : *d* . *e*. 2°. *b* . *c* : : *f* . *d*; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, nous aurons pour la premiere proportion *ae* = *bd* & *cf* = *bd* pour la ſeconde : or les ſeconds nombres de ces deux égalités étant la même grandeur *bd*, les deux premiers membres *ae* & *cf* ſont par conſéquent égaux; ainſi nous aurons *ae* = *cf*; & mettant *ae* pour les deux extrêmes

a . *b* : : *d* . *e* *ae* = *bd*
b . *c* : : *f* . *d* *cf* = *bd*
ae = *cf*
donc *a* . *c* : : *f* . *e*
a . *f* : : *c* . *e* alternando.

d'une proportion, & *cf* pour les moïens, nous aurons *a.c::f.e*, c'eſt-à-dire, le premier d'une part eſt au troiſiéme d'une même part, comme le troiſiéme de l'autre part eſt au ſecond de la même part. Et *alternando*, *a.f::c.e*, c'eſt-à-dire, le premier de la premiere part eſt au troiſiéme de la ſeconde, comme le troiſiéme de la premiere part eſt au ſecond de la ſeconde part.

Ceci s'appelle conclurre *ex æquo perturbato*, c'eſt-à-dire par *égalité troublée*, parce que le premier & le troiſiéme d'une même part ſont entr'eux, non pas comme le premier & le troiſiéme de l'autre, ce qui ſeroit dans l'ordre; mais comme le troiſiéme eſt au ſecond, ce qui eſt une eſpéce de déſordre ou de trouble dans la comparaiſon de ces grandeurs.

Les anciens Géométres ont fait ſouvent uſage des deux dernieres propoſitions.

DIXIE'ME PROPOSITION.

Si l'on a trois ou pluſieurs raiſons égales a.b::c.d::e.f, *la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens, comme l'un des antécédens eſt à ſon conſéquent.*

Cette propoſition eſt évidente par elle-même; car puiſque les antécédens contiennent les conſéquens de la même façon, il eſt sûr que tous les antécédens joints enſemble, contiendront tous les conſéquens de la même façon que le premier ou quelqu'autre des antécédens contient ſon conſéquent; cependant pour faire voir l'uſage qu'on peut faire des changemens rapportés ci-deſſus; voici comme on peut prouver cette propoſition.

Par les conditions portées nous avons, 1°. *a.b::c.d*, & *alternando* *a.c::b.d*, & *componendo* *a+c.c::b+d.d*; & *alternando* encore *a+c.b+d::c.d*.

2°. Nous avons *c.d::e.f*; au lieu de la raiſon *c.d*; mettant ſon égal *a+c.b+d*, que nous venons de trouver, nous avons *a+c.b+d::e.f*, & *alternando* *a+c.e::b+d.f*, & *componendo* *a+c+e.e::b+d+f.f*; & *alternando* en-

a . b : : c . d	
a . c : : b . d	alternando.
a+c . c : : b+d . d	componendo.
a+c . b+d : : c . d	alternando.

core $a+c+e . b+d+f :: e . f$, c'eſt-à-dire, la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme e eſt à f, ou comme a eſt à b, ou comme $c . d$; car ces trois raiſons ſont égales.

$c . d :: e . f$
$a+c . b+d :: e . f$
$a+c . e :: b+d . f$ alternando.
$a+c+e . e :: b+d+f . f$ componendo.
$a+c+e . b+d+f :: e . f$ alternando.

C'eſt ſur cette propoſition que ſont fondées les régles de ſociété, de fauſſe poſition & quelques-unes des autres régles que nous avons enſeignées dans la ſeconde Partie de cet Ouvrage; ainſi qu'on va voir par les applications que nous en allons faire dans les deux queſtions ſuivantes.

TROISIE'ME QUESTION.

Trois perſonnes ont mis en ſociété de jeu 45 *liv. la premiere en a mis* 10, *la ſeconde* 15 *& la troiſiéme* 20; *& elles ont gagné* 135 *liv. combien leur revient-il à chacune?*

J'appelle a la miſe du premier, b celle du ſecond, c celle du troiſiéme; f la miſe totale, t le gain total; x le gain du premier, y celui du ſecond & z celui du troiſiéme. Il eſt sûr qu'afin que le partage ſe faſſe avec équité, il faut que la miſe du premier ſoit à ſon gain, comme la miſe du ſecond eſt à ſon gain & comme celle du troiſiéme eſt à ſon gain; auſſi nous avons trois raiſons égales $a . x :: b . y :: c . z$, & la ſomme des antécédens de ces trois raiſons eſt f & celle des conſéquens eſt t: or par la propoſition précédente la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme chaque antécédent eſt à ſon conſéquent: donc nous avons trois proportions, comme on voit ici.

Et dans la premiere de ces propoſitions, faiſant le produit des moïens & celui des extrêmes, j'ai $at=fx$; & diviſant par f, j'ai $\frac{at}{f}=x$, gain du premier; & faiſant la même choſe à l'égard des deux autres, j'ai $\frac{tb}{f}=y$, gain du ſecond & $\frac{tc}{f}=z$, gain du troiſiéme.

$f . t :: a . x$
$f . t :: b . y$
$f . t :: c . z$

$\frac{at=fx}{at=x}$ $\quad$ $\frac{tb=fy}{tb=y}$
$\frac{}{f}$ $\quad$ $\frac{}{f}$
$\frac{tc=fz}{tc=z}$ $\quad$ $x=30$
$\frac{}{f}$ $\quad$ $y=45$
$\quad$ $z=60$

Or ceci nous apprend que pour avoir

les trois gains, il faut faire trois régles de trois, dont le premier terme ſoit la miſe totale, le ſecond le gain total & le troiſiéme la miſe particuliere d'un chacun, & c'eſt préciſément ce que nous avons vû qu'il falloit faire en parlant de la régle de Compagnie.

Pour répondre donc à la queſtion, je mets les valeurs des lettres connuës dans les valeurs trouvées de x, y, z; & je trouve $x=30$, $y=45$ & $z=60$.

QUATRIE'ME QUESTION.

Les trois âges de trois perſonnes ſont 90 *ans; l'âge de la premiere eſt inconnu, celui de la ſeconde eſt double, & celui de la troiſiéme eſt triple: quel âge chacune a-t-elle?*

Je ſuppoſe d'abord que la premiere a 10 ans, la ſeconde en aura donc 20 & la troiſiéme en aura 30; mais ces trois âges ne font que 60 ans, au lieu qu'ils doivent faire 90, ainſi ma ſuppoſition eſt fauſſe; cependant comme les trois nombres que j'ai ſuppoſés ont les mêmes conditions que les trois que je cherche, il eſt sûr que leur ſomme 60 eſt à la ſomme 90, comme chacun d'eux eſt à chacun de ceux que je cherche; ainſi appellant a le premier nombre 10 que j'ai ſuppoſé, b le ſecond 20, c le troiſiéme 30, f leur ſomme 60; t la ſomme 90 de ceux que je cherche, x le premier inconnu, y le ſecond & z le troiſiéme; je dis la ſomme f des nombres ſuppoſés eſt à la ſomme de ceux que je cherche, comme le premier ſuppoſé a eſt au premier inconnu x, & ainſi de même pour les deux autres; & par conſéquent j'ai les trois proportions qu'on voit ici. Ceci nous fait voir de même que dans la queſtion précédente, que pour trouver les trois âges inconnus, il faut faire trois régles de trois, dont le premier terme ſoit la ſomme des ſuppoſés, le ſecond la ſomme des inconnus & le troiſiéme chacun des ſuppoſés ſucceſſivement, & c'eſt-là préciſément ce que nous avons enſeigné dans la régle de fauſſe poſition.

$f . t :: a . x$	$x=\frac{at}{f}=15$
$f . t :: b . y$	$y=\frac{bt}{f}=30$
$f . t :: c . z$	$z=\frac{ct}{f}=45$
	90

J'ajouterai ici deux ou trois queſtions pour faire voir comment on peut réſoudre bien des problêmes par la connoiſſance des proportions.

CINQUIE'ME

CINQUIE'ME QUESTION.

Une perſonne tient dans chacune de ſes mains un certain nombre de jettons, les deux enſemble ſont 60, & le nombre de la main gauche eſt le $\frac{1}{3}$ de celui de la droite : combien y a-t-il dans chaque main ?

Puiſque l'un de ces nombres eſt le $\frac{1}{3}$ de l'autre, ces deux nombres ſont donc entr'eux comme 1 eſt à 3 ; j'appelle $1=a$, $3=b$, & le petit nombre z & le grand x, j'ai donc $a.b::z.x$; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, j'ai $ax=bz$; & diviſant par a, j'ai $x=\frac{bz}{a}$, valeur de x.

$$a.b::z.x$$
$$ax=bz$$
$$x=\frac{bz}{a}$$

Or par la condition du problême les deux nombres ſont 60 ; appellant donc $60=f$, j'ai $z+x=f$; & mettant la valeur trouvée de x, j'ai $z+\frac{bz}{a}=f$; & multipliant par a, puis diviſant par $a+b$, j'ai $z=\frac{af}{a+b}$; ainſi z eſt connu ; & mettant cette valeur de z dans l'équation $x=\frac{bz}{a}$, j'ai $x=\frac{abf}{aa+ab}$, ou $x=\frac{bf}{a+b}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $z=15$ & $x=45$.

$$z+x=f$$
$$z+\frac{bz}{a}=f$$
$$az+bz=af$$
$$z=\frac{af}{a+b}=\frac{60}{1+3}=15$$
$$x=\frac{abf}{aa+ab}=\frac{bf}{a+b}=\frac{180}{4}=45$$

SIXIE'ME QUESTION.

Deux vieillards s'entretenant enſemble, l'un dit à l'autre : j'ai deux fils, l'âge du plus jeune n'eſt que le $\frac{1}{3}$ de l'âge de l'autre ; & ſi l'on ajoute enſemble leurs âges, la ſomme eſt le dixiéme de la ſomme de leurs quarrés.

Puiſque l'âge du plus jeune eſt le tiers de l'autre, les deux âges ſont donc entr'eux comme 1 eſt 3, j'appelle $1=a$ & $3=b$; de même, puiſque la ſomme des âges eſt le $\frac{1}{10}$ de celle des quarrés, ces deux ſommes ſont donc entr'elles comme 1 eſt à 10, j'appelle $1=a$, $10=d$; le premier âge x & le ſecond z ; par la premiere condi-

tion, j'ai $a.b::x.z$; & faisant le produit des extrêmes & celui des moïens $az=bx$, & divisant par a, $z=\frac{bx}{a}$, valeur de z.

$a.b::x.z$

$az=bx$

$z=\frac{bx}{a}$ valeur de z.

Par la seconde condition, j'ai $x+z.xx+zz::a.d$; & mettant au lieu de z, sa valeur trouvée $\frac{bx}{a}$, j'ai $x+\frac{bx}{a}.xx+\frac{bbxx}{aa}::a.d$; & faisant le produit des extrêmes & celui des moïens $dx+\frac{dbx}{a}=axx+\frac{abbxx}{aa}$ je multiplie tout par aa; je divise ensuite par x, puis je divise encore par $aaa+abb$, & j'ai $\frac{aad+adb}{aaa+abb}=x$; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $x=4$; & substituant cette valeur de x dans celle de $z=\frac{bx}{a}$, j'ai $z=12$; ainsi le plus jeune a 4 ans & l'autre 12, & 4 est le $\frac{1}{3}$ de 12, & la somme 16 des deux âges est le $\frac{1}{10}$ de 160, somme des quarrés 144 & 16.

$x+z.xx+zz::a.d$

$x+\frac{bx}{a}.xx+\frac{bbxx}{aa}::a.d$

$dx+\frac{dbx}{a}=axx+\frac{abbxx}{aa}$

$aadx+adbx=a^3xx+abbxx$

$aad+adb=a^3x+abbx$

$\frac{aad+adb}{aaa+abb}=x$

$x=\frac{10+30}{1+9}=\frac{40}{10}=4$

$z=\frac{bx}{a}=\frac{3\times4}{1}=12$

Nous avons résolu cette question par la méthode ordinaire; mais pour montrer aux Commençans comment il arrive quelquefois que la nature même du problême & la connoissance de certains principes peut vous faire découvrir des voïes plus courtes, & des expressions plus abrégées & plus nettes, j'observe que si je multiplie a & b par la même inconnuë x, les produits ax & bx seront en même raison que a & b; ainsi j'aurai $a.b::ax.bx$, & par conséquent si je suppose que le premier âge est ax, le second sera nécessairement bx, puisque ces deux âges sont entr'eux comme a est à b: donc la premiere condition du problême est remplie, & je n'ai qu'une inconnuë x.

Par la seconde condition, j'ai donc $ax+bx.aaxx+bbxx::a.d$; & faisant le produit des extrêmes & celui des moïens, puis divisant par x & ensuite par a^3+abb, j'ai $x=\frac{ad+bd}{a^3+abb}$, qui est la même valeur de x que nous avons trouvée ci-dessus, si ce n'est

que le numérateur de la fraction a la grandeur a de moins dans ſes deux termes, ce qui ne change rien, à cauſe que a ne vaut qu'un; ainſi $x=4$ & $ax=4$, âge du premier, & $bx=3\times4=12$, âge du ſecond; où l'on voit que les expreſſions ſont plus courtes & plus nettes, ce qui n'eſt pas à négliger; car ſouvent on doit la découverte d'un problême à la netteté des expreſſions.

$$ax+bx \;.\; aaxx+bbxx :: a \;.\; d$$
$$adx+bdx=a^3xx+abbxx$$
$$ad+bd=a^3x+abbx$$
$$\frac{ad+bd}{a^3+abb}=x$$

$$x=\frac{10+30}{1+9}=4$$

donc $ax=4$
$bx=12$

SEPTIE'ME QUESTION.

J'ai fait trois paquets, dit un homme, dont la ſomme totale eſt 48 *liv. le premier, moins le ſecond, eſt le* $\frac{1}{3}$ *du troiſiéme; le ſecond, moins le troiſiéme, eſt le* $\frac{1}{3}$ *du premier; & le premier, moins le troiſiéme, eſt le* $\frac{1}{2}$ *du ſecond: combien y a-t-il dans chaque paquet?*

J'appelle la ſomme totale $ſ$, le premier paquet x, le ſecond y, le troiſiéme z; & puiſque le premier, moins le ſecond, eſt le $\frac{1}{3}$ du troiſiéme, donc $x-y \;.\; z :: 1 \;.\; 3$; j'appelle $1=a$, $3=b$.

De même, puiſque le ſecond, moins le troiſiéme, eſt le $\frac{1}{3}$ du premier, donc $y-z \;.\; x :: 1 \;.\; 5$; j'appelle $1=a$, $5=c$.

De même encore, puiſque le premier, moins le troiſiéme, eſt le $\frac{1}{2}$ du ſecond, donc $x-z \;.\; y :: 1 \;.\; 2$; j'appelle $1=a$, $2=d$.

Ainſi j'ai trois proportions, & faiſant dans chacune de ces proportions le produit des extrêmes & celui des moïens, j'en tire trois valeurs de la premiere inconnuë x; & ces trois valeurs ſont $x=\frac{az+by}{b}$, $x=\frac{cy-cz}{a}$ & $x=\frac{ay+dz}{d}$.

$$x-y \;.\; z :: a \;.\; b$$
$$y-z \;.\; x :: a \;.\; c$$
$$x-z \;.\; y :: a \;.\; d$$

$$bx-by=az$$
$$bx=az+by$$
$$x=\frac{az+by}{b}$$ premiere valeur de x

$$cy-cz=ax$$
$$x=\frac{cy-cz}{a}$$ ſeconde valeur de x

$$dx-dz=ay$$
$$dx=ay+dz$$
$$x=\frac{ay+dz}{d}$$ troiſiéme valeur de x

De ces trois valeurs, j'en tire deux valeurs de la seconde inconnuë z, c'eſt-à-dire, je compare les deux premieres valeurs enſemble ; je multiplie tout par a & par b ; puis ajoutant bcz & ôtant aby de part & d'autre, & diviſant par $aa+bc$, j'ai $z=\frac{bcy-aby}{aa+bc}$, premiere valeur de z.

$$\frac{az+by}{b}=\frac{cy-cz}{a}$$
$$aaz+aby=bcy-bcz$$
$$aaz+bcz=bcy-aby$$
$$z=\frac{bcy-aby}{aa+bc}$$ premiere valeur de z

Comparant de même la premiere & la derniere valeurs de x, je multiplie tout par b & par d, puis je retranche adz & aby, enfin je diviſe par $bd-ad$, & j'ai $z=\frac{bdy-aby}{bd-ad}$, ſeconde valeur de z.

$$\frac{az+by}{b}=\frac{ay+dz}{d}$$
$$adz+bdy=aby+bdz$$
$$bdy-aby=bdz-adz$$
$$\frac{bdy-aby}{bd-ad}=z$$ ſeconde valeur de z

$$\frac{bcy-aby}{aa+bc}=\frac{bdy-aby}{bd-ad}$$

Je pourrois tirer une troiſiéme valeur de z en comparant les deux dernieres valeurs de x, ce qui me donneroit $z=\frac{dcy-aay}{ad+dc}$, mais cette troiſiéme valeur de z ne me ſerviroit pas davantage que les deux précédentes, pour trouver la valeur de la troiſiéme inconnuë y.

$$x+y+z=f$$
$$x+y+\frac{bdy-aby}{bd-ad}=f$$
$$\frac{bdy-aay}{bd-ad}+y+\frac{bdy-aby}{bd-ad}=f$$
$$\frac{bdy-aay+bdy-ady+bdy-aby}{bd-ad}=f$$
$$bdy-aay+bdy-ady+bdy-aby=bdf-adf$$
$$y=\frac{bdf-adf}{bd-aa+bd-ad+bd-ab}$$
$$y=\frac{bdf-adf}{3bd-aa-ad-ab}$$
$$y=\frac{3\times2\times48-2\times48}{18-1-2-3}=\frac{288-96}{12}=\frac{192}{12}=16$$
$$x=\frac{bdy-aay}{bd-ad}=\frac{6\times16-16}{6-2}=\frac{96-16}{4}=\frac{80}{4}=20$$
$$z=\frac{bdy-aby}{bd-ad}=\frac{96-48}{4}=\frac{48}{4}=12$$

Je compare donc les deux valeurs de z enſemble, mais je m'apperçois que cette comparaiſon ne ſauroit me faire trouver une valeur de y, à cauſe que y ſe trouve également dans les deux membres avec les mêmes ſignes ; ainſi la grandeur y ſeroit indéterminée, ſi je ne ſavois que les trois inconnuës $x+y+z=f$, par la premiere condition du problême.

Je mets dans cette équation $x+y+z=f$ l'une des valeurs de z, comme, par exemple, la seconde, & j'ai $x+y+\frac{bdy-aby}{bd-ad}=f$.

Je mets dans l'une des valeurs de x, comme par exemple, dans la troiſiéme la valeur de z, & je trouve $x=\frac{ay}{d}+\frac{bdy-abdy}{bdd-add}$; & réduiſant les deux fractions en même dénomination $x=\frac{aybdd-aaydd}{bddd-addd}+\frac{bdddy-abddy}{bddd-addd}$; & corrigeant l'expreſſion $x=\frac{bdddy-aaydd}{bddd-addd}$, & diviſant le numérateur & le dénominateur par dd, j'ai enfin $x=\frac{bdy-aay}{bd-ad}$; & mettant cette valeur de x dans la derniere équation, j'ai $\frac{bdy-aay}{bd-ad}+y+\frac{bdy-aby}{bd-ad}=f$; & réduiſant y en fraction dont le dénominateur ſoit $bd-ad$, ce qui donne $\frac{bdy-ady}{bd-ad}$, j'ai enfin l'équation $\frac{bdy-aay+bdy-ady+bdy-aby}{bd-ad}=f$, où il n'y a plus que l'inconnuë y; & multipliant tout par $bd-ad$, puis diviſant tout par $bd-aa+bd-ad+bd-ab$, ou, en corrigeant l'expreſſion par $3bd-aa-ad-ab$, je trouve $y=\frac{bdf-adf}{3bd-aa-ad-ab}$; & mettant les valeurs des lettres connuës, j'ai $y=16$; & mettant cette valeur de y dans les valeurs de x & de z que j'ai mis dans la derniere équation, c'eſt-à-dire dans $x=\frac{bdy-aay}{bd-ad}$ & dans $z=\frac{bdy-aby}{bd-ad}$, j'ai $x=20$ & $z=12$, & l'on peut voir aiſément que ces trois nombres rempliſſent toutes les conditions du problême; car premierement $20+16+12$ font 48; ſecondement $20-16=4$, & 4 eſt le $\frac{1}{3}$ de 12; en troiſiéme lieu $16-12$ fait 4, & 4 eſt le $\frac{1}{5}$ de 20; enfin $20-12$ fait 8, & 8 eſt le $\frac{1}{2}$ de 16.

J'ai dit que ſi on ne ſavoit pas la ſomme totale des paquets, la grandeur y ſeroit indéterminée; & en effet, ſi l'on prenoit pour y tel nombre que l'on voudroit, & qu'on mît ce nombre à la place de y dans la derniere valeur de z, & enſuite la valeur de y & de z dans la troiſiéme valeur de x, on trouveroit trois nombres qui auroient les conditions requiſes dans ce problême, mais dont la ſomme totale varieroit ſelon que l'on ſuppoſeroit y plus grand ou moindre que 16.

Ainſi ſuppoſant $y=8$, on auroit $z=\frac{bdy-aby}{bd-ad}=\frac{6\times8-3\times8}{6-2}=\frac{24}{4}=6$, & $x=\frac{ay+dz}{d}=\frac{8+2\times6}{2}=\frac{8+12}{2}=\frac{20}{2}=10$, & ces trois nombres 10, 8 & 6 rempliroient les conditions du problême; car $10-8=2$, & 2 eſt le $\frac{1}{3}$ de 6; de même $8-6=2$, & 2 eſt le $\frac{1}{5}$ de 10; enfin $10-6=4$, & 4 eſt la moitié de 8.

De même ſuppoſant $y=4$, on auroit $z=\frac{6\times4-3\times4}{4}=\frac{12}{4}=3$ & $x=\frac{4+2\times3}{2}=\frac{10}{2}=5$, & ces trois nombres 5, 4 & 3 rempliroient encore les conditions du problême; car $5-4=1$, & 1 eſt le $\frac{1}{5}$ de 3; de même $4-3=1$, & 1 eſt le $\frac{1}{5}$ de 5; enfin $5-3=2$, & 2 eſt le $\frac{1}{2}$ de 4, & ainſi des autres ſuppoſitions qu'on pourroit faire.

Des progreſſions Géométriques.

PREMIERE PROPOSITION.

V. *Dans toute progreſſion Géométrique, le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par l'expoſant; le troiſiéme eſt égal au premier multiplié par le quarré, ou la ſeconde puiſſance de l'expoſant; le quatriéme eſt égal au premier multiplié par la troiſiéme puiſſance de l'expoſant, & ainſi des autres.*

Soit la progreſſion Géométrique $a.b.c.d.e.f.g$ dont nous appellerons l'expoſant p, le ſecond terme b pourra être changé en celui-ci ap; & mettant cette valeur de b dans la progreſſion, le troſiéme terme c étant égal au ſecond, multiplié par l'expoſant p, ſera donc app; & mettant cette valeur de c dans la progreſſion, le quatriéme, par la même raiſon ſera ap^3; ainſi le cinquiéme ſera ap^4, le ſixiéme ap^5, &c. donc la progreſſion ſera $a.ap.app.ap^3.ap^4.ap^5.ap^6$, où l'on voit que le ſecond terme eſt égal au premier, multiplié par l'expoſant; le troiſiéme au premier, multiplié par le quarré de l'expoſant, &c.

$a.$	$b.$	$c.$	$d.$	$e.$	$f.$	$g.$	expoſant 2.
2.	4:	8.	16.	32.	64.	128.	
$a.$	$ap.$	$app.$	$ap^3.$	$ap^4.$	$ap^5.$	$ap^6.$	
2.	$2\times2.$	$2\times4.$	$2\times8.$	$2\times16.$	$2\times32.$	2×64	

D'où il ſuit que pour avoir la valeur d'un terme, quel qu'il ſoit, il faut retrancher d'abord l'unité du nombre qui marque le quan-

tiéme eſt ce terme, & le reſte marquera le degré de l'expoſant qui doit multiplier le premier terme; ainſi pour trouver le ſixiéme terme, je retranche 1 de 6, & le reſte 5 me fait voir qu'il faut prendre p^5, lequel multiplié par le premier terme a, donne ap^5, valeur du ſixiéme terme, & ainſi des autres.

Il faut obſerver qu'afin que cette propoſition ſoit vraïe pour les progreſſions deſcendantes, de même que pour les aſcendantes, on ne doit pas prendre pour expoſant le quotient du plus grand des deux premiers termes, diviſé par le ſecond, mais toujours le quotient du ſecond, diviſé par le premier; & ce quotient eſt une fraction dans les progreſſions deſcendantes, ce qui rend cette propoſition générale de même que la plupart des ſuivantes; ainſi ſi la propoſition étoit 8.4.2, on auroit $p=\frac{1}{2}$, & par conſéquent a. ap. ap, & de même dés autres. 8.
$\frac{1}{2}\times 8$ $\frac{1}{4}\times 8$

SECONDE PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Géométrique, le produit de deux termes également éloigné des extrêmes eſt égal au produit des extrêmes.

Soit la progreſſion Géométrique $a.b.c.d.e.f$, dont nous ſuppoſerons l'expoſant $=p$, cette progreſſion pourra donc être changée en celle-ci $a.ap.$
$app.\ ap^3.\ ap^4.\ ap^5$; & ſi $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ expoſant p.
dans cette progreſſion $a.\ ap.\ app.\ ap^3.\ ap^4.\ ap^5.$
nous prenons le ſecond
terme ap & le cinquiéme ap^4, qui ſont également éloignés des extrêmes, nous trouverons que leur produit aap^5 ſera égal au produit aap^5 des deux extrêmes; & de même ſi nous prenons le troiſiéme & le quatriéme terme $app.\ ap^3$, qui ſont également éloignés l'un de l'extrême a & l'autre de l'extrême ap^5, nous trouverons que leur produit ſera encore aap^5, & ainſi des autres.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Géométrique dont les termes vont en augmentant, le ſecond terme, moins le premier, eſt au premier, comme le dernier, moins le premier, eſt à la ſomme de tous les termes qui précédent le dernier.

Soit la progreſſion Géométrique $a.b.c.d.e$; comme tous les termes compris entre les extrêmes ſervent d'antécédens & de con-

ſéquens, cette progreſſion pourra être changée en celle-ci $a.b::b.c.c::d::d::e$ qui eſt une ſuite de quatre raiſons égales : or nous avons vû plus haut que la ſomme des antécédens eſt à celle des conſéquens, comme l'un des antécédens eſt à ſon conſéquent, ainſi nous aurons $a.b::a+b+c+d.b+c+d+e$

& *invertendo* $b.a::b+c+d+e.a+b+c+d$

& *dividendo* $b-a.a::b+c+d+e-a-b-c-d.a+b+c+d$

& corrigeant l'expreſſion, en effaçant les termes qui ſe détruiſent par des ſignes contraires, on aura : $b-a.a::e-a.a+b+c+d$

le ſecond terme, moins le premier, eſt au premier, comme le dernier, moins le premier, eſt à la ſomme des termes qui précédent le dernier.

Voilà donc une maniere très-commode de trouver la ſomme de la progreſſion ; car aïant trouvé la ſomme des termes qui précédent le dernier, il n'y a plus qu'à ajouter le dernier terme à cette ſomme, & l'on aura la ſomme totale.

Si l'expoſant de la progreſſion eſt 2, c'eſt-à-dire, ſi le premier & le ſecond termes ſont comme 1 à 2, le dernier terme eſt égal à la ſomme des termes qui le précédent ; car appellant la ſomme de ces termes f & le dernier terme z, on aura $2-1.1::z.f$: or $2-1=1$; donc $z=f$.

Si l'expoſant de la progreſſion eſt 3, c'eſt-à-dire, ſi les deux premiers termes ſont comme 1 à 3, le dernier terme ſera double de la ſomme des termes qui le précédent ; car on aura $3-1.1::z.f$: or $3-1$ eſt égal à 2, & 2 eſt double du conſéquent 1, donc z eſt double de f.

Et on trouvera de même que l'expoſant de la progreſſion étant 4, le dernier terme ſera triple de la ſomme des termes qui le précédent ; & que l'expoſant étant 5, le dernier terme ſera quadruple de la ſomme des termes qui le précédent, & ainſi des autres ; deſorte que retranchant 1 de l'expoſant, le reſte marquera ce que le dernier terme eſt à la ſomme des termes ; ainſi ſuppoſant que l'expoſant ſoit 6 & le dernier terme 1296, ôtant 1 de l'expoſant 6, le reſte 5 marquera que le dernier terme 1296 eſt quintuple de la ſomme des termes qui le précédent ; & ainſi des autres.

Et il faut prendre garde que le ſecond & troiſiéme termes étant entr'eux comme le premier & le ſecond, & le troiſiéme & le quatriéme étant auſſi entr'eux comme le premier & le ſecond, & ainſi des autres termes ; ce que nous avons dit du premier & du ſecond eſt également vrai du ſecond & du troiſiéme, ou du troiſiéme

me

me & du quatriéme, ou enfin de deux autres termes qu'on voudra prendre, pourvû qu'ils ſe ſuivent immédiatement ; ainſi on pourra dire le quatriéme, moins le troiſiéme, eſt au troiſiéme comme le dernier, moins le premier, eſt à la ſomme des termes qui le précédent ; & de même le huitiéme, moins le ſeptiéme, eſt au ſeptiéme comme le dernier, moins le premier, eſt à la ſomme des termes qui le précédent, & ainſi des autres ; de même qu'on pourroit dire le dernier, moins le pénultiéme, eſt au pénultiéme comme le dernier, moins le premier, eſt à la ſomme des termes qui le précédent.

Que ſi la progreſſion alloit en diminuant, comme dans celle-ci, 32. 16. 8. 4. 2, on regarderoit le premier terme comme étant le dernier, & le dernier comme étant le premier, c'eſt-à-dire, on renverſeroit la progreſſion, en la changeant en celle-ci 2. 4. 8. 16. 32 ; & alors on acheveroit le reſte comme ci-deſſus.

Ou bien on dira, comme le premier terme 32, moins le ſecond 16, eſt au ſecond 16, ainſi le premier 32, moins le dernier 2, eſt à la ſomme des termes qui ſuivent le premier, & on voit bien que ceci revient au même ; car en renverſant la progreſſion & la changeant en celle-ci 2. 4. 8. 16. 32, on pourroit dire, comme nous avons vû, le dernier 32, moins le pénultiéme 16, eſt à 16, comme le dernier 32, moins le premier 2, eſt à la ſomme des termes qui précédent le dernier, où il n'y a de différence dans l'énoncé, que celle qui vient du renverſement de la progreſſion.

PREMIERE QUESTION.

Continuer une progreſſion, dont le premier & le ſecond termes ſont connus.

Appellons le premier terme a, le ſecond b & l'expoſant p ; le ſecond terme ſera donc ap, & par conſéquent le troiſiéme app, le quatriéme ap^3, & ainſi des autres ; & la progreſſion ſera $a. ap. app. ap^3. ap^4.$ &c. On ſe ſouviendra que ſi la progreſſion étoit deſcendante, l'expoſant ſeroit une fraction, & par conſéquent cette méthode ſert pour tous les cas.

$a.$	$ap.$	$app.$	$ap^3.$	$ap^4.$	&c.
2.	2X2.	2X4.	2X8.	2X16,	&c.
2.	4.	8.	16.	32.	

$a.$	$ap.$	$ap^2.$	$ap^3.$	$ap^4.$	&c.
32.	$\frac{1}{2}$X32.	$\frac{1}{4}$X32.	$\frac{1}{8}$X32.	$\frac{1}{16}$X32.	&c.
32.	16.	8.	4.	2.	

Ou bien, comme je ſais que le ſecond terme eſt

moïen, proportionnel entre le premier & le troiſiéme, ſi j'appelle le troiſiéme terme x, j'ai $:: a . b . x$; & faiſant le produit des extrêmes & le quarré de la moïenne, j'ai $ax = bb$; & diviſant par a, j'ai $x = \frac{bb}{a}$, ainſi le troiſiéme eſt $\frac{bb}{a}$; & ſi j'appelle le quatriéme z, j'ai $a . b :: \frac{bb}{a} . z$; & faiſant le produit des moïens & celui des extrêmes, j'ai $az = \frac{b^3}{a}$; & diviſant par a, j'ai $z = \frac{b^3}{aa}$; & je pourrois trouver de la même façon, tant d'autres termes que je voudrois.

SECONDE QUESTION.

Trouver la ſomme d'une progreſſion deſcendante infinie.

Soit la progreſſion $4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$, &c. puiſque cette progreſſion eſt infinie, le dernier terme ſera infiniment petit; car ce terme ſera 1 diviſé par la puiſſance infinie de deux, attendu que les dénominateurs 2 . 4 . 8 . 16 qui vont en montant, ſont les puiſſances de 2; & l'on ſait que plus le dénominateur eſt grand, plus le quotient du numérateur, diviſé par le dénominateur, eſt petit; d'où il ſuit que le dénominateur étant infiniment grand, le quotient ſera infiniment petit, & que par conſéquent on pourra le regarder comme égal à zero.

Cela poſé, comme la progreſſion eſt deſcendante, je dis, ſelon les principes établis dans la troiſiéme propoſition, le premier terme 4, moins le ſecond 2, eſt au ſecond 2, comme le premier terme 4, moins le dernier qui eſt zero, eſt à la ſomme des termes qui le ſuivent; ainſi appellant cette ſomme f, j'ai $4 - 2 . 2 :: 4 - 0 . f$, ou $2 . 2 :: 4 . f$, & par conſéquent $f = 4$: donc ajoutant cette ſomme 4 au premier terme 4, la ſomme 8 eſt la ſomme totale de la progreſſion, toute infinie qu'elle eſt.

$4 - 2 . 2 :: 4 - 0 . f$

$2 : 2 :: 4 . f$

Ou bien je renverſe la progreſſion, enſorte que le premier terme 4 devienne le dernier; & je dis, ſuivant les principes établis dans la même propoſition 3, l'expoſant eſt ici 2: donc retranchant 1 de l'expoſant 2, le reſte 1 me fait voir que le dernier terme 4 eſt égal à la ſomme des termes qui le précédent: donc ajoutant cette ſomme 4 au dernier terme 4, la ſomme 8 eſt la ſomme de la progreſſion.

C'eſt en ſuivant cette voïe qu'on a trouvé le moïen d'évaluer

les ſuites infinies $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{32}.\frac{1}{64}$, &c. $\frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{27}.\frac{1}{81}$, &c. $\frac{1}{4}.\frac{1}{16}.\frac{1}{64}$, &c. dont les numérateurs ſont toujours l'unité, & les dénominateurs les puiſſances de deux, les puiſſances de trois, les puiſſances de quatre, &c.

Ainſi la premiere ſuite $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.\frac{1}{16}.\frac{1}{32}$, &c. eſt égale à 1; car renverſant la progreſſion, on trouvera que l'expoſant eſt 2, & par conſéquent que le dernier terme $\frac{1}{2}$ eſt égal à la ſomme des termes qui le précédent: donc ajoutant cette ſomme $\frac{1}{2}$ au dernier terme $\frac{1}{2}$, on a 1 pour la ſomme totale de la progreſſion.

De même la ſuite $\frac{1}{3}.\frac{1}{9}.\frac{1}{27}.\frac{1}{81}$, &c. eſt égale à une moitié; car renverſant la progreſſion, on trouvera que l'expoſant eſt 3; & ôtant 1 de 3, le reſte 2 fera voir que le dernier terme $\frac{1}{3}$ eſt double de la ſomme des termes qui le précédent: donc cette ſomme ſera $\frac{1}{6}$ car la moitié d'un tiers eſt un ſixiéme; & ajoutant cette ſomme $\frac{1}{6}$ au dernier terme $\frac{1}{3}$, on aura $\frac{1}{2}$, qui eſt la ſomme totale de la progreſſion.

Par la même raiſon, la ſuite infinie $\frac{1}{4}.\frac{1}{16}.\frac{1}{64}$, &c. eſt égale à $\frac{1}{3}$; la ſuite infinie $\frac{1}{5}.\frac{1}{25}.\frac{1}{125}$, &c. eſt égale à $\frac{1}{4}$, &c. & ainſi des autres; deſorte qu'ôtant 1 de l'expoſant de la progreſſion, le reſte eſt le dénominateur de la ſomme totale, & le numérateur eſt toujours 1.

Ainſi pour trouver la ſomme totale de la ſuite infinie $\frac{1}{10}.\frac{1}{100}.\frac{1}{1000}$, &c. j'ôte 1 de l'expoſant 10 & le reſte eſt 9, par conſéquent la ſomme totale eſt $\frac{1}{9}$, & ainſi des autres.

On pourroit évaluer de la même façon les progreſſions infinies qui vont en augmentant, mais alors on trouveroit des valeurs infinies, dont la connoiſſance n'eſt qu'une belle ſpéculation.

Pour évaluer, par exemple, la ſuite infinie 1. 2. 4. 8. 16, &c. je vois que ces termes ne ſont autre choſe que les puiſſances de deux, ainſi le dernier terme ſera 2^{∞}, c'eſt-à-dire, 2 élevé à une puiſſance infinie; & comme l'expoſant eſt 2, je vois que le dernier terme, moins le premier 1, eſt égal à la ſomme des termes qui le précédent: donc cette ſomme eſt $2^{\infty}-1$; & ajoutant cette ſomme au dernier terme, j'ai $2\times 2^{\infty}-1$, ſomme de la progreſſion.

De même, pour évaluer la ſuite infinie 1. 3. 4. 27. 81, &c. je vois que le dernier terme ſera 3^{∞}; & comme l'expoſant eſt 3, le dernier terme, moins le premier 1, ſera double de la ſomme des termes qui le précédent, ainſi cette ſomme ſera $\frac{1}{2}3^{\infty}-\frac{1}{2}$; & ajoutant cette ſomme au dernier terme, j'ai $\frac{1}{2}3^{\infty}-\frac{1}{2}$, ſomme de la progreſſion.

De même pour évaluer 1 . 4 . 16 . 64, &c. à l'infini, je vois que le dernier terme ſera 4^{∞} ; & comme l'expoſant eſt 4, ce terme, moins le premier 1, ſera triple de la ſomme de ceux qui le précédent, ainſi cette ſomme ſera $\frac{1}{3}4^{\infty}-\frac{1}{3}$; & ajoutant cette ſomme au dernier terme, j'aurai $\frac{4}{3}4^{\infty}-\frac{1}{3}$, ſomme de la progreſſion.

Et je trouverois de même que la ſuite infinie 1 . 5 . 25 . 125, &c. vaut $\frac{1}{4}5^{\infty}-\frac{1}{4}$; que la ſuite infinie 1 . 6 . 36, &c. vaut $\frac{6}{5}6^{\infty}-\frac{1}{5}$, & ainſi des autres ; de ſorte que pour avoir la valeur d'une ſuite, quelle qu'elle ſoit, il faut élever l'expoſant à l'infini, puis le multiplier par une fraction, dont le numérateur eſt l'expoſant, & le dénominateur eſt moindre d'une unité que le numérateur ; & enfin, retrancher du produit une fraction, dont le numérateur eſt 1, & le dénominateur eſt le même que celui de la fraction précédente.

Ainſi pour évaluer la ſuite infinie 1 . 10 . 100 . 1000, &c. j'éleve 10 à l'infini, je le multiplie par $\frac{10}{9}$, ce qui fait $\frac{10}{9}10^{\infty}$, & j'en retranche $\frac{1}{9}$, & le reſte $\frac{10}{9}10^{\infty}-\frac{1}{9}$ eſt la ſomme de la progreſſion.

Que ſi à la ſuite infinie 1 . 2 . 4 . 8, &c. j'ajoute la ſuite infinie $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$, &c. qui vaut 1, nous aurons une ſuite infinie, en montant & en deſcendant : donc la valeur ſera $2X2^{\infty}-1+1$ ou $2X2^{\infty}$.

De même, ſi à la ſuite infinie 1 . 3 . 9 . 27, &c. j'ajoute la ſuite infinie $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{27}$, &c. qui vaut une moitié, j'aurai une ſuite infinie en montant & en deſcendant, dont la valeur eſt $\frac{3}{2}3^{\infty}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}3^{\infty}$.

Et on trouvera de même qu'ajoutant aux autres ſuites, les ſuites infinies de fraction qui leur correſpondent, on aura des ſuites infinies en montant & en deſcendant, dont les valeurs ſeront $\frac{4}{3}4^{\infty}$, $\frac{1}{4}5^{\infty}$, $\frac{6}{5}6^{\infty}$, &c.

C'eſt en examinant les propriétés de ces ſuites, que je réfutai autrefois un paradoxe avancé par un Savant, qui s'imaginoit faire un grand honneur aux Mathématiques en leur attribuant des prétendus myſtéres qu'elles n'ont jamais eu. On me pardonnera la digreſſion que je vais faire en faveur des Commençans, qui doivent s'accoutumer de bonne heure à ne pas ſe laiſſer ébloüir par ces ſortes de diſcours, n'y aïant rien de ſi dangereux pour jetter l'eſprit dans l'erreur, & empêcher de découvrir la vérité. Voici de quoi il s'agiſſoit.

Si l'on diviſe 1 par -1, diſoit notre Savant, il eſt sûr que le quotient eſt -1 ; cependant, ajoutoit-il, ſi l'on diviſe 1 par $1-2$, qui eſt la même choſe que -1, au lieu de trouver -1, on trouve la ſuite infinie $1+2+4+8+16+32$, &c. & comme les régles

qu'on ſuit, en faiſant cette diviſion, ſont certaines & inconteſtables, ce quotient n'eſt pas moins vrai que le quotient —1. Peut-on voir, continuoit-il, rien de ſi merveilleux ? & qui n'avoüera, après cela, que les Mathématiques n'aïent des ſecrets que l'eſprit humain ne ſauroit découvrir ?

Ce beau diſcours ne m'en impoſa point, je fis moi-même le calcul, & je trouvai en effet que le quotient étoit la ſerie infinie 1+2+4+8, &c. qui contient les puiſſances de 2 à l'infini; mais en examinant la choſe de près, je vis que chaque quotient partial que je trouvois laiſſoit un reſte double de ce quotient; que, par exemple, le quotient 2 laiſſoit un reſte 4; le quotient 4 laiſſoit un reſte 8, & ainſi des autres. Or je dis, ſuppoſons la diviſion pouſſée à l'infini, le dernier quotient ſera 2^{∞}; & par conſéquent le dernier reſte ſera $2X2^{\infty}$; évaluant donc la ſuite infinie du quotient, le total eſt $2X2^{\infty}-1$, par les régles ci-deſſus; & comme dans toute diviſion qui n'eſt pas exacte, il faut ajouter au quotient la fraction reſtante, il faut donc que j'ajoute à cette ſomme totale $2X2^{\infty}-1$ le reſte $\frac{2X2^{\infty}}{1-2}$: or $\frac{2X2^{\infty}}{1-2}=\frac{2X2^{\infty}}{-1}=-2X2^{\infty}$; ainſi ajoutant $-2X2^{\infty}$ à la ſomme totale $2X2^{\infty}-1$, j'ai $2X2^{\infty}-1-2X2^{\infty}$; & corrigeant l'expreſſion, j'ai —1 qui eſt préciſément le même quotient que je trouverois en diviſant 1 par —1; par conſéquent il n'y a point ici de myſtéres, & c'eſt à tort qu'on voudroit nous en faire trouver.

1 | 1+2+4+8+16, &c.
1−2
0+2
1−2
0+4
1−2
0+8
1−2
0+16
1−2
0+32

Ce raiſonnement étoit trop juſte pour ne pas déconcerter notre Savant, il gronda, il chercha des détours, peu s'en fallut qu'il ne me traitât de franc ignorant; & moi, ſatisfait de ma recherche, je ne répondis mot.

TROISIE'ME QUESTION.

Un Marchand a fait un habit magnifique pour un Seigneur, & comme ce Seigneur ne veut pas convenir du prix qu'il demande, tant pour l'étoffe, que pour les fournitures & la façon; le Marchand adroit lui dit qu'il n'a qu'à donner 1 *denier pour le premier bouton,* 2 *pour le ſecond,* 4 *pour le troiſiéme, & ainſi de ſuite, en doublant toujours; le Seigneur conſent à ce marché: & l'on demande combien il doit païer pour le dernier bouton, ſuppoſant que l'habit en a* 36 *?*

Le premier terme de cette progreſſion eſt 1, l'expoſant eſt 2, & le nombre des termes eſt 36; ainſi il s'agit de trouver le dernier terme; pour cela j'ôte 1 du nombre 36, & le reſte 35 me fait voir qu'il faut prendre la trente-cinquiéme puiſſance de 2, & la multiplier par le premier terme.

Et pour abréger, j'éleve 2 à la ſeconde puiſſance, ce qui fait 4; je multiplie cette ſeconde puiſſance par elle-même, & le produit 16 eſt la quatriéme puiſſance; je multiplie celle-ci par elle-même, & j'ai la huitiéme puiſſance; je la multiplie par elle-même, & j'ai la ſeiziéme puiſſance; & multiplant celle-ci par elle-même, j'ai la trente-deuxiéme

2	
2	
4	ſeconde puiſſance
4	
16	quatriéme puiſſance
16	
96	
16	
256	huitiéme puiſſance
256	
1536	
1280	
512	
65536	ſeiziéme puiſſance
65536	
393216	
196608	
327680	
327680	
393216	
4294967296	trente-deuxiéme puiſſance
8	troiſiéme puiſſance
34359738368 d.	trente-cinquiéme puiſſance
143165576 l. 10 ſ. 8 den.	dernier terme
2	
286331153 l. 4 ſ. 4 den.	ſomme totale

puiſſance ; enfin, multipliant cette derniere par la troiſiéme puiſſance 8, j'ai la trente-cinquiéme puiſſance, laquelle multipliée par le premier terme, reſte comme elle eſt, ainſi cette trente-cinquiéme puiſſance eſt le dernier terme, ou le prix du dernier bouton ; & évaluant cette puiſſance en livres, je trouve 143165576 liv. 10 ſ. 8 den. pour la valeur du dernier bouton ; & ſi on vouloit la valeur totale de la progreſſion, on ôteroit 1 de l'expoſant 2, & le reſte 1 faiſant voir que le dernier terme eſt égal à la ſomme de ceux qui le précédent, on ajouteroit le dernier terme à lui-même, ou, ce qui eſt la même choſe, on le multiplieroit par 2, & le produit 286331153 liv. 4 ſ. 4 den. ſeroit le prix de tous les boutons, & par conſéquent la ſomme que ce Seigneur devoit donner pour ſon habit, qui certainement lui reviendroit un peu cher.

QUATRIE'ME QUESTION.

Une perſonne a dépenſé le premier jour 2 ſols, & les autres jours elle eſt allée en augmentant, en progreſſion Géométrique, juſqu'au ſixiéme jour, où il s'eſt trouvé qu'elle a dépenſé 486 ſols : on demande quel eſt l'expoſant de cette progreſſion ?

Le premier terme de cette progreſſion eſt 2, le dernier 486, & le nombre des termes eſt 6, & il s'agit d'en trouver l'expoſant : or retranchant 1 du nombre des termes 6, je ſais que le reſte 5 marque la puiſſance de l'expoſant, laquelle multipliant le premier terme, a produit le dernier ; ainſi je diviſe le dernier terme 486 par le premier 2, & le quotient 243 eſt la cinquiéme puiſſance de l'expoſant ; conſultant donc la Table que nous avons donnée ci-deſſus pour les puiſſances des neuf premiers nombres, je trouve que la racine cinquiéme de 243 eſt 3 : donc l'expoſant eſt 3, & la progreſſion eſt 2 . 6 . 18 . 54 . 162 . 486.

2	
486	243
0.8	
0.6	
0	

Et s'il ſe trouvoit que l'expoſant fût élevé à une puiſſance plus élevée que celles qui ſont marquées dans la Table, comme, par exemple, ſi on nous diſoit que cette perſonne le onziéme jour a dépenſé 118098, auquel cas l'expoſant ſeroit élevé à la dixiéme puiſſance ; on continueroit la Table juſqu'à la dixiéme puiſſance, ce qui eſt fort aiſé à faire ; ou bien après avoir diviſé le dernier terme 118098 par le premier 2, & trouvé le quotient 59049, qui eſt la dixiéme puiſſance de l'expoſant, on en

tireroit la racine quarrée 243, qui n'en ſeroit plus que la cinquiéme puiſſance ; & alors conſultant la Table, on trouveroit que 243 eſt la cinquiéme puiſſance de 3 ; ainſi l'expoſant ſeroit 3, & la progreſſion ſeroit 2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122. 39366. 118098.

Et ſi outre cela on demandoit la ſomme de la progreſſion, ou la dépenſe totale, on diroit le ſecond terme 6, moins le premier 2, eſt au premier 2 comme le dernier terme, moins le premier 2, eſt à la ſomme des termes qui le précédent ; & comme le ſecond terme, moins le premier, eſt double du premier, on s'appercevroit tout d'un coup que le dernier terme, moins le premier, eſt double de la ſomme de ceux qui le précédent ; ôtant donc 2 du dernier terme, & prenant la moitié du reſte 118096, cette moitié ſeroit la ſomme des termes qui précédent le dernier ; & ajoutant cette moitié au dernier terme, on trouveroit 177144 pour la ſomme totale.

```
  2
118098 | 59049
-------
 1.8
 ---
 0.0
 ---
 0.9
 ---
 1.8

5|90|49|243
 2
 ---
 1.90
   44
 ----
  14.49
   4 83
 ----
  0 00
```

Et l'on pourroit auſſi connoître le rapport du dernier terme à la ſomme de ceux qui le précédent, en retranchant 1 de l'expoſant 3, & le reſte 2 feroit voir que le dernier terme, moins le premier, eſt double de la ſomme des termes précédens.

```
 118098
  59048
 ------
 177146
```

Et ſi on nous diſoit que cette perſonne a dépenſé le premier jour 2 ſols, le ſecond 6 & le dernier 118098, & qu'on nous demandât pendant combien de jours il a dépenſé, nous aurions alors le premier terme 2, l'expoſant 3 ; car le ſecond terme 6 eſt égal au premier multiplié par l'expoſant, lequel par conſéquent eſt 3, le dernier terme 118098, & il s'agiroit de trouver le nombre des termes ; pour cela nous diviſerions 118098 par 2, & le quotient 59049 ſeroit une puiſſance de l'expoſant dont le degré ſeroit moindre d'une unité que le nombre des termes ; ainſi élevant 3 à ſes puiſſances, nous aurions enfin trouvé que 59049 eſt ſa dixiéme puiſſance ; ajoutant donc 1 au degré 10, la ſomme 11 auroit été le nombre des termes. Nous donnerons une autre méthode pour ce cas-ci, lorſque nous parlerons des Logarithmes.

Et ſi l'on nous avoit caché le premier terme 2, & qu'on nous eût

eût dit que l'expoſant étoit 3, le nombre des termes 11, & le dernier terme 118098, il nous auroit fallu chercher le premier terme, en élevant l'expoſant 3 à ſa dixiéme puiſſance, après quoi, diviſant le dernier terme par cette dixiéme puiſſance, le quotient 2 auroit été le premier terme cherché.

3	
3	
9	quarré
9	
81	quatriéme puiſſance
81	
81	
648	
6561	huitiéme puiſſance
9	
59049	dixiéme puiſſance

59049 | 118098 | 2 premier terme

0000

CINQUIE'ME QUESTION.

Une perſonne a dépenſé 728 livres dans ſix jours, en augmentant toujours de trois par jour : on demande combien il a dépenſé le premier jour ?

Nous ne connoiſſons ici que l'expoſant, le nombre des termes & la ſomme de la progreſſion, c'eſt pourquoi la queſtion ne pouvant ſe réſoudre par les principes ci-deſſus, je ſuppoſe que le premier terme eſt 1; ainſi la progreſſion ſera 1.3.9.27.81.243, dont la ſomme ne fait que 364, au lieu qu'elle devroit être 728, c'eſt pourquoi ma ſuppoſition eſt fauſſe; mais je dis, par régle de trois, comme la ſomme 364 eſt au premier terme 1, ainſi la ſomme 728 eſt au premier terme que je cherche; & faiſant la régle, je trouve que ce premier terme eſt 2, & par conſéquent la progreſſion eſt 2. 6.18.54.162.486.

SIXIE'ME QUESTION.

Suppoſons, diſoit autrefois le Philoſophe Zénon, qu'Achille aille dix fois plus vîte qu'une tortuë, & que cette tortuë ait une lieuë d'avance; je ſoutiens, ajoutoit-il, que jamais Achille n'atteindra la tortuë; car tandis qu'Achille fera la premiere lieuë, la tortuë fera un dixiéme de la ſeconde; & tandis qu'Achille fera ce dixiéme, la tortuë fera un dixiéme de dixiéme; deſorte que continuant de même, la tor-

tuë aura toujours une partie d'avance : on demande comment on peut réfuter cet argument, dont l'expérience nous fait voir la fauſſeté ?

La ſolution de ceci n'eſt pas ſi difficile que bien des gens le croïent. Faiſons d'abord réfléxion que tous ces dixiémes & dixiémes de dixiémes que la tortuë parcourt, font une progreſſion deſcendante & infinie $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10000}$, &c. laquelle étant évaluée par les principes ci-deſſus, ne fait en tout que $\frac{1}{9}$ de lieuë ; & comme Achille va dix fois plus vîte que la tortuë, il eſt viſible que lorſque la tortuë aura fait ce $\frac{1}{9}$ de lieuë, il doit avoir fait $\frac{10}{9}$, c'eſt-à-dire, une lieuë & $\frac{1}{9}$, & par conſéquent qu'il doit atteindre la tortuë au premier $\frac{1}{9}$ de la ſeconde lieuë.

Et pour mieux confirmer ceci, ſuppoſons qu'Achille emploïe 3000 pas pour une lieuë, la tortuë aïant fait pendant ce tems-là le dixiéme de la ſeconde lieuë, aura le $\frac{1}{10}$ de 3000 pas d'avance, c'eſt-à-dire 300 pas ; & quand Achille fera ces 300 pas, la tortuë aura le dixiéme de ces 300 pas d'avance, c'eſt-à-dire 30 pas d'avance ; & quand Achille fera ces 30 pas, la tortuë en aura le dixiéme d'avance, c'eſt-à-dire 3 ; & quand enfin Achille fera ces 3 pas, la tortuë n'aura plus que $\frac{3}{10}$ de pas d'avance ; deſorte qu'Achille l'atteindra & la ſurpaſſera même en faiſant encore un pas : or ſi vous ajoutez enſemble le 300 pas qu'Achille fait pour le $\frac{1}{10}$ de la ſeconde lieuë, les 30 pour le $\frac{1}{10}$ du dixiéme, les 3 pour le $\frac{1}{10}$ du dixiéme du $\frac{1}{10}$, & enfin les $\frac{3}{10}$ de pas qu'il lui faut pour atteindre la tortuë, la ſomme fera $333\frac{3}{10}$ pas ; & comme il lui en faut 3000 pour une lieuë, diviſant 3000 pas par $333\frac{3}{10}$, vous trouverez que ces $333\frac{3}{10}$ ne ſont que le $\frac{1}{9}$ de 3000, ou le $\frac{1}{9}$ d'une lieuë ; ainſi Achille doit atteindre la tortuë au premier $\frac{1}{9}$ de la ſeconde lieuë.

L'argument de Zénon ne pouvoit donc conclurre qu'en ſuppoſant de deux choſes l'une, ou qu'Achille devoit emploïer une infinité de pas pour faire la premiere lieuë, auquel cas il ne ſeroit jamais venu à bout de la faire, ou que les pas qu'il faiſoit en parcourant le $\frac{1}{10}$ de la premiere lieuë, devenoient dix fois plus petits que ceux qu'il faiſoit en parcourant la premiere lieuë ; & que ceux qu'il faiſoit en parcourant le $\frac{1}{10}$ du dixiéme, devenoient encore dix fois plus petits, & ainſi de ſuite, auquel cas il eſt sûr qu'il n'auroit jamais pû atteindre la tortuë ; car ſes pas devenant dix fois plus petits après la premiere lieuë, il lui en auroit fallu également 300 pour parcourir le $\frac{1}{10}$ de la ſeconde, & la tortuë auroit eu encore 300 pas d'avance ſur lui ; & ſes pas diminuant de la mê-

me façon après le premier $\frac{1}{10}$ de la seconde lieuë, il lui auroit fallu encore 3000 pas pour parcourir le $\frac{1}{10}$ du $\frac{1}{10}$, & la tortuë auroit encore eu 300 pas d'avance sur lui; desorte que les choses subsistant toujours de même, jamais Achille n'auroit atteint la tortuë; mais comme l'une & l'autre de ces suppositions sont aussi ridicules qu'impossibles, n'y aïant point d'homme qui soit obligé de faire une infinité de pas pour faire une lieuë, ni dont les pas puissent devenir de dix en dix fois plus petits à l'infini, il s'ensuit que le beau raisonnement de Zénon n'est qu'un sophisme puérile, qui ne mérite pas la moindre attention.

Mais, me dira-t-on peut-être, vous supposez que la tortuë puisse faire $\frac{1}{9}$ de lieuë, ce qui n'est pas possible, puisque pour faire ce $\frac{1}{9}$ il faut parcourir une progression infinie $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000}$, &c. autre sophisme aussi puérile que le premier: si les pas de la tortuë alloient en diminuant à chaque $\frac{1}{10}$ de la même façon que ces $\frac{1}{10}$, à la bonne-heure; mais comme cette supposition est chimérique, il est tout aussi facile à la tortuë de faire $\frac{1}{9}$ de lieuë, qu'à Achille de faire une lieuë; de sorte qu'en supposant qu'Achille fait dans une heure $\frac{10}{9}$ de lieuë, la tortuë fait avec la même facilité $\frac{1}{9}$ dans le même tems.

Il seroit à souhaiter qu'on ne fit pas tant de cas dans les Ecoles de ces inepties des Anciens, ou du moins qu'on ne les proposât aux jeunes gens que pour leur faire voir que ces hommes, que l'éloignement des tems nous fait regarder comme des hommes extraordinaires & singuliers, n'avoient pour la plûpart que des génies très-bornés. Quoi de plus ridicule, après tout, que de voir qu'un raisonnement si peu sensé, & qu'on mépriseroit aujourd'hui dans la bouche d'un enfant de quinze ans, se soit conservé par tradition depuis Zénon jusqu'à nous?

Le principe que nous avons établi dans cette question peut servir à résoudre une question que l'on fait ordinairement: une montre, dit-on, a deux aiguilles, l'une marque les heures, & l'autre qui marque les minutes va douze fois plus vîte; on demande de trouver tous les endroits du cadran où ces aiguilles se rencontrent pendant l'espace de douze heures?

Supposant que les deux aiguilles partent toutes deux du point de douze heures, quand celle des minutes sera revenuë au même point, celle des heures aura sur elle une heure d'avance; & tandis que celle-ci fera $\frac{1}{11}$ de la seconde heure, l'autre qui va douze fois plus vîte fera $\frac{12}{11}$ ou une heure & $\frac{1}{11}$, & par conséquent les deux aiguilles se rencontreront.

Enſuite, quand l'aiguille des minutes ſera revenuë au même point, c'eſt-à-dire à $1\frac{1}{11}$ d'heure, celle des heures ſera ſur $2\frac{1}{11}$, & quand celle-ci parcourra $\frac{1}{11}$, celle des minutes en parcourra $\frac{12}{11}$; leſquels ajoutés à $1\frac{1}{11}$ feront $1\frac{1}{11}+\frac{12}{11}=1\frac{13}{11}=2\frac{2}{11}$, deſorte que les deux aiguilles ſe rencontreront encore à ce point; & ſuivant le même raiſonnement, on trouvera que les deux aiguilles dans l'eſpace de 12 heures ſe rencontreront aux points $1\frac{1}{11}$, $2\frac{2}{11}$. $3\frac{3}{11}$, $4\frac{4}{11}$, $5\frac{5}{11}$, $6\frac{6}{11}$, $7\frac{7}{11}$, $8\frac{8}{11}$, $9\frac{9}{11}$, $10\frac{10}{11}$, $11\frac{11}{11}$ ou 12, deſorte qu'elles ſe rencontreront 11 fois.

La régle eſt donc qu'il faut diminuer d'une unité le nombre qui marque combien de fois l'un va plus vîte que l'autre, & prendre enſuite ce nombre ainſi diminué pour le dénominateur d'une fraction, dont le numérateur eſt d'abord 1, enſuite 2, enſuite 3, puis 4, &c. Ainſi on voit qu'Achille allant 10 fois plus vîte que la tortuë, l'atteint au $\frac{1}{9}$ de la ſeconde lieuë, & le dénominateur 9 eſt moindre que 10 d'une unité; de même on voit que l'aiguille des minutes allant 12 fois plus vîte que celle des heures, l'atteint au $\frac{1}{11}$ de la ſeconde heure; & 11 eſt moindre que 12 d'une unité, qu'enſuite elle l'atteint au $\frac{2}{11}$ de la troiſiéme aux $\frac{3}{11}$ de la quatriéme, &c. ce qui fait voir que les numérateurs vont en augmentant dans la progreſſion des nombres naturels 1 . 2 . 3 . 4, &c.

Des raiſons compoſées.

VI. Avant de parler des raiſons compoſées, il eſt bon d'obſerver qu'on peut faire toutes les opérations de l'Arithmétique ſur les raiſons, de même que ſur les fractions; car à proprement parler, les raiſons ſont des fractions, ſoit propres, ſoit impropres; & c'eſt pour cela que la plûpart des Auteurs les écrivent de même que les fractions; ainſi au lieu de dire la raiſon $a.b$, ils écrivent la raiſon $\frac{a}{b}$, ce qui revient au même, puiſque la raiſon $a.b$ ſignifie le rapport de la grandeur a à la grandeur b, & la fraction $\frac{a}{b}$ ſignifie le même rapport. Que ſi nous ne nous ſervons pas de la même expreſſion, c'eſt afin de faire enviſager les raiſons préciſément en tant que raiſons, c'eſt-à-dire, en tant que leur aſſemblage peut compoſer des proportions & des progreſſions, ce qui partage moins l'eſprit & ſert à la clarté des idées.

Maintenant conſidérant les raiſons de la même maniere qu'on

conſidére les fractions, le premier terme tiendra la place du numérateur, & le ſecond la place du dénominateur; ainſi de même qu'on peut réduire une fraction à un dénominateur commun, on peut auſſi & de la même façon, réduire deux raiſons à un même conſéquent: ſoient par exemple, les raiſons $a.b$, $c.d$; ſi je veux les réduire au même conſéquent, je multiplie la premiere a, b par le conſéquent d de la ſeconde, & j'ai $ad.db$ qui ſont en même raiſon que a & b; je multiplie de même la ſeconde par le conſéquent b de la premiere, & j'ai bc, bd qui ſont en même raiſon que b & c; & pour faire voir que c'eſt de même qu'on en agit à l'égard des fractions, on n'a qu'à écrire les deux raiſons en fractions $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$, & on verra que l'opération que nous avons faite eſt la même que celle qu'on fait pour réduire deux fractions en même dénomination.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$$
$$\frac{ad}{bd} \quad \frac{bc}{bd}$$

L'avantage qu'on tire en réduiſant les raiſons au même conſéquent, eſt qu'on connoît plus aiſément par-là quel eſt le rapport de ces deux raiſons entr'elles; car les raiſons $a.b$, $c.d$ étant réduites au même conſéquent bd, elles deviennent $ad.cd$ & $bc.cd$; & comme le conſéquent eſt le même de part & d'autre, ces deux raiſons ſont donc entr'elles comme l'antécédent ad eſt à l'antécédent bc: ſoient, par exemple, les raiſons 4.2 & 9.3, ces deux raiſons réduites au même conſéquent, ſont 12.6 & 18.6; & il eſt évident qu'elles ſont entr'elles comme 12 eſt à 18; car puiſque les raiſons conſiſtent dans le rapport de leurs antécédens à leurs conſéquens, & que les conſéquens ſont ici les mêmes, ces deux raiſons auront entr'elles le même rapport que leurs antécédens, c'eſt-à-dire, que ſi l'antécédent de la premiere eſt double du conſéquent, & celui de la ſeconde triple du même conſéquent, la premiere eſt à la ſeconde comme 2 eſt à 3, ou comme 12 eſt à 18.

$$4 \cdot 2 \quad 9 \cdot 3$$
$$3\times4 \cdot 3\times2 \quad 2\times9 \cdot 2\times3$$
$$12 \cdot 6 \quad 18 \cdot 6$$

On voit par-là que pour ajouter enſemble deux raiſons, ou pour ſouſtraire l'une de l'autre, il faut les réduire au même conſéquent, & enſuite ajouter ou ſouſtraire leurs antécédens; ainſi pour ajouter enſemble les deux raiſons 4.2 & 9.3, je les réduits au même conſéquent, & j'ai 12.6 & 18.6; & ajoutant enſemble leurs an-

técédens 12 & 18, j'ai 30.6, qui eſt la ſomme des deux raiſons; & en effet ajouter deux raiſons qui ont pour expoſant l'une 2 & l'autre 3, c'eſt faire une raiſon dont l'expoſant ſoit 2+3, c'eſt-à-dire 5, & l'expoſant de 30.6 eſt 5.

De même pour ſouſtraire l'une de l'autre, je retranche l'antécédent 12 de l'antécédent 18, & j'ai la raiſon 6.6 qui eſt le reſte de la ſouſtraction; car ôter une raiſon qui a pour expoſant 2, d'une autre raiſon qui ait pour expoſant 3, c'eſt chercher une raiſon dont l'expoſant ſoit 3—2, c'eſt-à-dire 1, & la raiſon 6.6 a pour expoſant 1.

Et pour multiplier deux raiſons enſemble, il ſuffit de multiplier les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens.

Mais pour diviſer l'une par l'autre, il faut les réduire au même conſéquent, & enſuite diviſer les antécédens l'un par l'autre. Tout cela eſt évident après ce que nous avons dit en parlant des fractions.

Il y a des occaſions, où au lieu de faire les opérations ſur les raiſons, il ſuffit de les faire ſur les expoſans mêmes; ainſi pour multiplier deux raiſons qui ont pour expoſant l'une 2 & l'autre 3, il ſuffit de multiplier 2 par 3, ce qui fait 6, & 6 eſt l'expoſant du produit des deux raiſons; de même pour diviſer deux raiſons, dont l'une a pour expoſant 12 & l'autre 4, il faut diviſer 12 par 4, & le quotient 3 eſt l'expoſant du quotient des deux raiſons, & ainſi des autres, ce qui donne beaucoup de facilité. Nous dirons ailleurs en quelles occaſions on en agit ainſi.

Cela ſuppoſé, on appelle *raiſon compoſée* une raiſon qui eſt le produit de deux ou de pluſieurs raiſons, & l'on appelle *raiſons compoſantes* les raiſons dont le produit fait la *raiſon compoſée*; ainſi ſi l'on a deux raiſons 4.2 & 9.3, & qu'on multiplie les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens, les deux raiſons produites forment une troiſiéme raiſon qu'on appelle *raiſon compoſée*, & les deux premieres raiſons s'appellent les compoſantes; de même, ſi l'on multiplie enſemble les antécédens des trois raiſons 4.2, 9.3, 8.2, & enſuite les trois conſéquens, les deux produits 288 & 12 forment une quatriéme raiſon qui eſt compoſée des trois autres.

4 . 2	9 . 3	
36	6	
4 . 2	9 3	8 . 2
288 . 12		

L'expoſant d'une raiſon compoſée eſt toujours égal au produit

des expoſans des raiſons compoſantes : ſoient les deux raiſons $a.b$ & $c.d$, & que l'expoſant de la premiere ſoit p & que celui de la ſeconde ſoit q, ſi l'on fait la raiſon compoſée de ces deux raiſons, l'expoſant de cette raiſon compoſée ſera pq ; car ces deux raiſons peuvent ſe changer en ces deux-ci qui ſont les mêmes $a.ap$ & $c.cq$;

$a.b$		$c.d$
$a.ap$		$c.cq$
ac		$acpq$

& faiſant la raiſon compoſée, on aura $ac.acpq$ dont l'expoſant eſt pq, puiſqu'en diviſant le dernier terme $acpq$ par le premier ac, le quotient eſt pq.

De même, ſoient les trois raiſons $a.b$, $c.d$, $e.f$ dont les expoſans ſoient p, q, r, la raiſon compoſée des trois aura pour expoſant les produits p, q, r des trois expoſans ; car cette raiſon eſt $ace.apcqer$; & ſi l'on diviſe le conſéquent par l'antécédent, on aura pour quotient pqr, c'eſt-à-dire, le produit des trois expoſans.

$a.b$		$e.d$	$e.f$
$a.ap$		$c.cq$	$e.er$
ace	.	$apcqer$	

Et pour appliquer ceci à des exemples numériques, on peut voir ci-deſſus que les raiſons 4.2, 9.3 aïant pour expoſans l'une 2 & l'autre 3, la raiſon 36.6 qui en eſt la compoſée, a pour expoſant 6, qui eſt le produit de 2 par 3.

De même les trois raiſons ci-deſſus 4.2, 9.3, 8.2 aïant pour expoſant l'une 2, l'autre 3 & l'autre 4, la raiſon 288.12 qui en eſt la compoſée, a pour expoſant 24 ; car 12 eſt 24 fois dans 288 : or 24 eſt le produit des trois nombres 2, 3 & 4 ; & ainſi des autres.

Lorſque les deux raiſons compoſantes ſont égales, la *raiſon compoſée* s'appelle *raiſon doublée* de l'une des deux ; ainſi la raiſon 24.6 qui eſt compoſée des deux égales 4.2 & 6.3 s'appelle *raiſon doublée*, de la raiſon 4.2 ou de la raiſon 6.3 ; car l'expoſant de 24.6 étant le produit des expoſans des deux raiſons compoſantes, & ces expoſans étant égaux, c'eſt la même choſe de multiplier les deux expoſans 2 & 2 l'un par l'autre, ou de multiplier l'expoſant de la premiere par lui-même ; ainſi l'expoſant 4 de la raiſon compoſée, étant égal à l'expoſant 2 de la premiere compoſante, multiplié par lui-même, la raiſon compoſée eſt donc en raiſon doublée de la premiere compoſante ; & par la même raiſon, on peut dire que la raiſon compoſée eſt en raiſon doublée de la ſeconde compoſante.

4.2		6.3
24		6

Je ſais bien qu'on peut dire que ſi on prenoit 4.2 & 4.2 pour

les raiſons compoſantes, la raiſon compoſée ſeroit 16. 4 qui ſeroit doublée de la raiſon 4. 2; & par conſéquent que la raiſon 24. 6 que nous avous trouvée, ne peut pas être doublée de 4. 2; mais à cela je répons, & il faut que les Commençans y faſſent attention, que quoique les antécédens & les conſéquens de deux raiſons ne ſoient pas les mêmes, ſi l'expoſant eſt cependant le même, les deux raiſons ne différent point entr'elles, non plus que deux fractions telles, par exemple, que $\frac{1}{2}$ & $\frac{20}{40}$ ne différent point entr'elles, quoique leurs numérateurs & leurs dénominateurs ſoient différens, ſi le rapport des uns aux autres eſt le même; ainſi la raiſon 24. 6 aïant le même expoſant que la raiſon 16. 4, ces deux raiſons ne ſont point différentes, & l'une & l'autre ſont en raiſon doublée de 4. 2.

Lorſque trois raiſons ſont égales entr'elles, la raiſon qui en eſt la compoſée, s'appelle *raiſon triplée* ou de la premiere ou de la ſeconde ou de la troiſiéme; car l'expoſant de cette raiſon eſt un produit des trois expoſans; & comme les trois expoſans ſont égaux, c'eſt la même choſe de les multiplier les uns par les autres, ou de multiplier l'un d'entr'eux deux fois par lui-même; & par conſéquent l'expoſant 8 de la raiſon 240. 30 étant un produit de l'expoſant 2 de la premiere compoſante, multiplié 2 fois par lui-même; cette raiſon compoſée eſt donc triplée de la premiere ou de la ſeconde ou de la troiſiéme.

4 . 2	6 . 3	10 . 5
240	.	30

De même, ſi quatre raiſons égales compoſent une cinquiéme raiſon, cette raiſon ſera appellée *quadruplée*, ou de la premiere ou de la ſeconde, &c. & ainſi des autres.

PREMIERE PROPOSITION.

Lorſque l'on a trois ou pluſieurs grandeurs de ſuite, la raiſon de la premiere à la derniere eſt compoſée de la raiſon de la premiere à la ſeconde, de la ſeconde à la troiſiéme, & de toutes les autres intermédiaires.

Soient les trois grandeurs $a . b . c$; que l'expoſant de a à b ſoit p, & celui de b à c ſoit q, par conſéquent $b = ap$ & $c = apq$, ainſi ces trois grandeurs ſont $a . ap . apq$; or ſi l'on diviſe le dernier apq par le premier a, le quotient pq ſera l'expoſant de

a	b	c	expoſant p & q
2	4	12	2 3
a	ap	apq	
2	2×2	$2\times2\times3$	
2	4	12	

la

la raiſon $a . apq$, & cet expoſant eſt le produit de l'expoſant p de la premiere à la ſeconde, & de l'expoſant q de la ſeconde à la troiſiéme : donc la raiſon $a . apq$ eſt compoſée de ces deux raiſons.

De même ſoient les quatre grandeurs $a . b . c . d$, que l'expoſant de la premiere à la ſeconde ſoit p, celui de la ſeconde à la troiſiéme q, & celui de la troiſiéme à la quatriéme r ; ces quatre grandeurs pourront s'exprimer par ces quatre-ci $a . ap . apq . apqr$, & l'on voit bien que l'expoſant de la premiere à la derniere eſt pqr, c'eſt-à-dire, le produit des trois expoſans : donc la premiere eſt à la derniere en raiſon compoſée des raiſons intermédiaires.

$a . b . c . d$

$a . ap . apq . apqr$

SECONDE PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Géométrique, le premier terme eſt au troiſiéme, en raiſon doublée de la raiſon du premier au ſecond ; le premier eſt au quatriéme, en raiſon triplée de la même raiſon ; le premier eſt au cinquiéme en raiſon quadruplée de la même raiſon, & ainſi de ſuite.

Soit la progreſſion Géométrique $a . b . c . d . e . f . g$, &c. le premier terme eſt au troiſiéme en raiſon compoſée des deux intermédiaires ; or ces deux intermédiaires ſont égales : donc le premier terme eſt au troiſiéme, en raiſon doublée de celle du premier au ſecond ; de même le premier terme eſt au quatriéme en raiſon compoſée des trois intermédiaires ; or ces trois raiſons ſont égales : donc le premier eſt au quatriéme, en raiſon triplée de celle du premier au ſecond ; & on prouvera de même que le premier eſt au cinquiéme en raiſon quadruplée, de celle du premier au ſecond, & ainſi de ſuite.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Les quarrés ſont en raiſon doublée, de la raiſon de leurs racines ; les cubes en raiſon triplée de celle de leurs racines ; les quatriémes puiſſances en raiſon quadruplée, & ainſi de ſuite des autres puiſſances.

Soient les deux raiſons $a . b$, $a . b$; ſi je multiplie les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens, les produits ſeront en raiſon compoſée des deux compoſantes ; & comme les compoſantes ſont la même & unique raiſon, les produits ſeront en

$a . b$ $a . b$

aa bb

raiſon doublée de la raiſon $a.b$; or les termes $aa.bb$ de la raiſon doublée ſont les quarrés des termes $a.b$ de la raiſon compoſante: donc les quarrés ſont en raiſon doublée de la raiſon de leurs racines.

De même, ſi je prens les trois raiſons $a.b$, $a.b$, $a.b$, & que je faſſe la raiſon compoſée, cette raiſon $a^3.b^3$ ſera triplée de l'une des compoſantes $a.b$; or les termes $a^3.b^3$ ſont les cubes des termes de la compoſante $a.b$: donc les cubes ſont en raiſon triplée de la raiſon de leurs racines.

$a.b \quad a.b \quad a.b$

$a^3 \quad . \quad b^3$

Et on prouvera la même choſe à l'égard des puiſſances plus élevées.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Géométrique, le premier terme eſt au troiſiéme comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond; le premier eſt au quatriéme comme le cube du premier eſt au cube du ſecond; le premier eſt au cinquiéme comme la quatriéme puiſſance du premier à la quatriéme puiſſance du ſecond, & ainſi de ſuite.

Soit la progreſſion Géométrique $a.b.c.d.e.f$, le premier eſt au troiſiéme en raiſon doublée de la raiſon du premier au ſecond; or les quarrés du premier & du ſecond ſont auſſi en raiſon doublée de la raiſon du premier au ſecond: donc le premier eſt au troiſiéme, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond; de même, le premier eſt au quatriéme en raiſon triplée du premier au ſecond; or les cubes du premier & du ſecond ſont auſſi en raiſon triplée du premier au ſecond: donc le premier eſt au quatriéme, comme le cube du premier au cube du ſecond, & ainſi des autres.

COROLLAIRES.

De-là il ſuit, 1°. Que dans toute progreſſion, le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond, comme le premier au troiſiéme; que le cube du premier eſt au cube du ſecond, comme le premier au quatriéme; que la quatriéme puiſſance du premier eſt à la quatriéme puiſſance du ſecond, comme le premier au cinquiéme, &c. Ce corollaire eſt l'inverſe de la propoſition, & par conſéquent n'a pas beſoin de preuve.

De-là il ſuit, 2°. Que connoiſſant le premier terme d'une progreſſion, & un autre terme tel qu'il ſoit, pourvû qu'on ſache le

quantiéme il eſt, on peut connoître toute la progreſſion ; car ſoit le premier terme a & le quatriéme b, j'appelle le ſecond x, & je dis : Le premier eſt au quatriéme, comme le cube du premier eſt au cube du ſecond, ainſi j'ai $a.b::a^3.x^3$; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, j'ai $ax^3=ba^3$; & diviſant par a, j'ai $x^3=\frac{ba^3}{a}=baa$; & tirant la racine cubique, j'ai $x=\sqrt[3]{baa}$, ce qui me fait voir que faiſant le quarré du premier terme, & le multipliant par le quatriéme terme, la racine cubique du produit eſt le ſecond terme ; de même, ſi j'ai le premier terme a & le cinquiéme c, j'appelle le ſecond x, & je dis : Le premier eſt au cinquiéme, comme la quatriéme puiſſance du premier à la quatriéme puiſſance du ſecond, ainſi j'ai $a.c::a^4.x^4$; & faiſant le produit des extrêmes & celui des moïens, j'ai $ax^4=ca^4$; & diviſant par a, j'ai $x^4=\frac{ca^4}{a}=ca^3$; & tirant la racine quatriéme, j'ai $x=\sqrt[4]{ca^3}$, ce qui fait voir que faiſant le cube du premier terme & le multipliant par le quatriéme, la racine quatriéme du produit eſt égale au ſecond terme.

Ceci eſt le fondement de ce que j'ai enſeigné dans l'Arithmétique, au ſujet des intérêts d'intérêts.

Il ſuit, 3°. Qu'on peut trouver entre deux termes tant de moïennes proportionnelles qu'on voudra ; car ſi on ne veut qu'une moïenne proportionnelle, appellant le premier terme a, le troiſiéme b, & la moïenne qu'on cherche x, on dira : puiſque les trois termes $a.x.b$ ſont en progreſſion : donc $a.b::aa.xx$, & par conſéquent $axx=aab$; & diviſant par a, $xx=ab$ & $x=\sqrt{ab}$: donc pour avoir une moïenne proportionnelle, il faut multiplier les deux extrêmes connuës, & tirer la racine de leur produit.

Et pour avoir deux moïennes proportionnelles, on cherchera d'abord la premiere qu'on appellera x, & l'on dira : Puiſqu'entre a & b il doit y avoir deux moïennes proportionnelles, les quatre termes enſemble feroient une progreſſion : donc le premier a eſt au quatriéme b, comme le cube a^3 du premier au cube x^3 du ſecond ; ainſi $a.b::a^3.x^3$ & $ax^3=ba^3$, & $x^3=baa$ & $x=\sqrt[3]{baa}$, ce qui fait voir, de même que ci-deſſus, qu'il faut faire le quarré de la premiere, le multiplier par la quatriéme & tirer la racine cubique du produit ; cette premiere proportionnelle étant trouvée, on l'appellera c & la ſeconde z, & par conſéquent on aura $a.c::c.z$

$az=cc$ & $z=\frac{cc}{a}$, ce qui fait voir que pour avoir la ſeconde proportionnelle, il faut faire le quarré de la premiere proportionnelle, & le diviſer par le premier terme; & on trouveroit de même tant d'autres moïennes proportionnelles qu'on voudroit.

Soient les nombres 2 & 8, entre leſquels je veux trouver une moïenne proportionnelle; je multiplie 2 par 8, ce qui fait 16, & tirant la racine quarrée de 16, qui eſt 4, ce nombre 4 eſt la moïenne que je cherche, car ::2.4.8.

Soient de même les nombres 2 & 16, entre leſquels je cherche deux moïennes proportionnelles, je fais le quarré de 2 qui eſt 4, je le multiplie par 16, ce qui donne 64; & tirant la racine cubique de 64, qui eſt 4, cette racine eſt la premiere des deux que je cherche; & pour trouver l'autre que j'appelle z, je dis: 2.4::4.z, & $2z=16$, & $z=\frac{16}{2}$, & $z=8$; ainſi 8 eſt la ſeconde proportionnelle cherchée, les quatre termes ſont 2.4.8.16.

Soient de même les nombres 2.64, entre leſquels je cherche quatre moïennes proportionnelles, je dis: 2 eſt au ſixiéme terme 64, comme la cinquiéme puiſſance de 2 qui eſt 32, à la cinquiéme puiſſance de la premiere moïenne proportionnelle que j'appelle x; ainſi 2.64::32.x^5, & $2x^5=64\times32$, & $x^5=\frac{64\times32}{2}=64\times16=1024$, & $x=\sqrt[5]{1024}$; & tirant la racine cinquiéme de 1024, je trouve 4, qui eſt la premiere des quatre proportionnelles que je cherche; celle-ci trouvée, j'appelle la ſeconde z & j'ai 2.4::4.z: donc $2z=16$ & $z=\frac{16}{2}=8$, voilà la ſeconde; & pour trouver la troiſiéme que j'appelle y, je dis: 2.4::8.y, & j'ai $2y=32$ & $y=\frac{32}{2}=16$, voilà la troiſiéme; & je trouverai la quatriéme de la même façon, ou bien comme l'expoſant eſt 2, je n'ai qu'à multiplier la troiſiéme 16 par 2, & le produit 32 eſt la quatriéme cherchée; ainſi les 6 termes ſont 2.4.8.16.32.64.

On ne peut pas toujours trouver ces moïennes proportionnelles en nombres rationels, & nous verrons dans la ſuite quels ſont les cas où on ne peut les exprimer que par des grandeurs incommenſurables.

Les raiſons compoſées ſont d'un grand uſage & d'une grande utilité dans la Géometrie; ſoient, par exemple, deux ſurfaces de figure de quarré long; que la baſe de la premiere ſoit 6, & la baſe de l'autre ſoit 3, la hauteur de la premiere 16 & la hauteur de l'autre 4; comparant ces deux raiſons enſemble, & faiſant la rai-

ſon compoſée, on trouve que ces deux ſurfaces ſont entr'elles en raiſon compoſée de la raiſon de leur baſe & de celle de leur hauteur; & en effet, le premier terme 96 de la raiſon compoſée, étant le produit des deux antécédens 6 & 16, dont l'un eſt la baſe & l'autre la hauteur de la premiere ſurface; ce produit eſt par conſéquent le contenu ou la valeur de cette ſurface; car on ſait que pour avoir la valeur d'une ſurface, il faut multiplier la baſe par la hauteur; & de même le conſéquent 12 de la raiſon compoſée, eſt le produit des conſéquens 3 & 4, dont l'un eſt la baſe & l'autre la hauteur de la ſeconde ſurface; ainſi ce produit eſt la valeur de la ſeconde ſurface: donc puiſque 96 & 12 ſont en raiſon compoſée de la raiſon des hauteurs & de celles des baſes, & que ces mêmes produits 96 & 12 ſont les valeurs des ſurfaces, il s'enſuit que les deux ſurfaces ſont en raiſon compoſée de la raiſon de leurs baſes & de celles de leurs hauteurs.

baſe du premier.	baſe du ſecond.	hauteur du premier.	hauteur du ſecond.
6 .	3	16 .	4
96 .	12		

Et comme la plûpart du tems on ne cherche, en Géométrie, qu'à connoître le rapport que les figures ont entr'elles, ſans ſe mettre en peine de leurs valeurs abſoluës dont on n'a pas toujours beſoin; alors au lieu de faire le produit des antécédens & celui des conſéquens, ce qui quelquefois ſeroit bien long, on multiplie les expoſans des raiſons compoſantes les uns par les autres, & le produit donne l'expoſant de la compoſée, qui eſt l'unique choſe qu'on cherche; ainſi dans le cas préſent, multipliant l'expoſant 2 de la premiere raiſon, par l'expoſant 4 de la ſeconde, le produit 8 feroit voir que la premiere ſurface eſt 8 fois plus grande que l'autre, quoiqu'on ne connût point la valeur abſoluë de l'une ni de l'autre, ce qui abrége beaucoup, & ſur tout lorſqu'il s'agit des ſolides, comme on va voir.

Soient de même deux ſolides, que la largeur du premier ſoit 24 & celle de l'autre 12; la profondeur du premier 18, celle du ſecond 6; enfin la hauteur du premier 32 & celle du ſecond 8; il eſt sûr que ſi on vouloit connoître la valeur de chacun de ces ſolides, il faudroit en faire la raiſon compoſée, en multipliant les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens; & l'antécédent de la raiſon compoſée étant le produit des trois dimen-

24 . 12 18 . 6 32 . 8

ſions du premier ſolide, ſeroit par conſéquent ſa valeur, de même que le conſéquent de cette même raiſon étant le produit des trois dimenſions du ſecond, ſeroit la valeur du ſecond; mais ſi on ne cherche que le rapport d'un ſolide à l'autre, on prend l'expoſant 2 de 24 à 12, l'expoſant 3 de 18 à 6, & l'expoſant 4 de 32 à 8; & multipliant ces trois expoſans enſemble, 24 eſt l'expoſant qu'auroit la raiſon compoſée ſi on la faiſoit; ainſi l'on ſait que le premier ſolide eſt 24 fois plus grand que l'autre.

Ceux qui étudieront la Géométrie, trouveront beaucoup d'autres utilités que cette ſcience tire des raiſons compoſées, & dont il eſt inutile que je parle ici.

Les propoſitions ſuivantes ſont des conſéquences de tout ce que nous avons dit juſqu'ici touchant les raiſons, les proportions, les progreſſions & les raiſons compoſées.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

L'expoſant d'une raiſon doublée eſt un nombre quarré; celui d'une raiſon triplée eſt un cube; celui d'une raiſon quadruplée eſt une quatriéme puiſſance, & ainſi des autres.

L'expoſant d'une raiſon doublée eſt le produit des deux expoſans égaux des raiſons compoſantes; or le produit de deux nombres égaux eſt un quarré: donc cet expoſant eſt un quarré. De même l'expoſant d'une raiſon triplée eſt le produit des trois expoſans égaux des raiſons compoſantes; or le produit de trois grandeurs égales eſt un cube: donc cet expoſant eſt un cube, & ainſi des autres.

SIXIE'ME PROPOSITION.

L'expoſant de deux quarrés inégaux eſt un quarré; celui de deux cubes eſt un cube; celui de deux quatriémes puiſſances eſt une quatriéme puiſſance, &c.

Deux quarrés inégaux ſont en raiſon doublée de leurs racines: donc leur expoſant eſt le produit de l'expoſant des racines, multiplié par lui-même, & par conſéquent cet expoſant eſt un quarré. De même deux cubes ſont en raiſon triplée de la raiſon de leurs racines: donc leur expoſant eſt un produit de l'expoſant des racines, multiplié deux fois par lui-même, & par conſequent cet expoſant eſt un cube, & ainſi des autres.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Les deux termes d'une raiſon doublée ſont entr'eux comme deux nombres quarrés ; ceux d'une raiſon triplée, ſont entr'eux comme deux nombres cubes, &c.

Soit la raiſon doublée $ac . bd$, dont les compoſantes ſont $a . b$, $c . d$; ſi l'expoſant de la premiere compoſante eſt p, celui de la ſeconde ſera auſſi p, puiſque ces deux raiſons ſont égales : ces deux raiſons pourront donc ſe changer en celles-ci $a . ap$, $c . cp$; & faiſant le produit des antécédens & celui des conſéquens, la raiſon doublée ſera $ac . acpp$; & réduiſant cette raiſon à ſes expoſans, c'eſt-à-dire, aux moindres termes, en diviſant l'antécédent & le conſéquent par ac, les quotiens ſont $1 . pp$, qui ſont en même raiſon que $ac . acpp$; or 1 & pp ſont deux nombres quarrés : donc $ac . acpp$. ſont entr'eux comme deux nombres quarrés.

$a . ap \quad c . cp$

$ac . acpp$

$1 . pp$

De même ſoit la raiſon triplée $ace . bdf$, dont les compoſantes ſont $a . b$, $c . d$, $e . f$; ſi l'expoſant de la premiere eſt p, celui des deux autres ſera auſſi p ; par conſéquent ces trois raiſons pourront ſe changer en celles-ci $a . ap$, $c . cp$, $e . ep$, dont la raiſon triplée ſera $ace . apcpep$, laquelle étant réduite à ſes expoſans, en diviſant l'antécédent & le conſéquent par ace, les quotiens ſeront $1 . p^3$ qui ſont en même raiſon que $ace . apcpep$; or 1 & p^3 ſont deux nombres cubes : donc les deux termes $ace . apcpep$ ſont entr'eux comme deux nombres cubes ; & ainſi des autres.

$a . b . c . d . e . f$

$a . ap \quad c . cp \quad e . ep$

$ace . apcpep$

Remarquez qu'en réduiſant une raiſon compoſée à ſes expoſans, le plus petit devient égal à 1, & le grand devient égal à l'expoſant des deux termes ; ainſi ſi la raiſon eſt $4 . 12$, dont l'expoſant eſt 3, réduiſant la raiſon à ſes moindres termes, en diviſant tout par 4, cette raiſon doit rendre celle-ci $1 . 3$, dont le petit terme eſt 1 & le grand eſt l'expoſant 3 ; de même, ſoit la raiſon $4 . 6$ dont l'expoſant eſt $\frac{3}{2}$; ſi on réduit cette raiſon aux moindres termes, en diviſant 6 par 4, & enſuite 4 par le reſte 2, ce reſte 2 diviſant exactement, 4 & 6 ſera le diviſeur commun des deux termes, & les quotiens 2 & 3 ſeront les moindres termes entiers auſquels cette raiſon pourra être réduite ; mais ſi l'on veut abſolument ſes moindres ter-

mes, on diviſera 2 & 3 par 2, & l'on aura $1, \frac{3}{2}$, qui ſeront les moindres termes ; ainſi le premier ſera 1, & le ſecond l'expoſant $\frac{3}{2}$, ainſi que nous venons d'obſerver ; & il en eſt de même à l'égard de toute autre raiſon.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Si l'on diviſe deux quarrés inégaux l'un par l'autre, le quotient ſera encore un quarré qui aura pour ſa racine le quotient des deux racines ; de même, ſi l'on diviſe deux cubes inégaux l'un par l'autre, le quotient ſera encore un cube qui aura pour racine le quotient des deux racines ; & ainſi des autres puiſſances.

L'expoſant de deux quarrés eſt un nombre quarré ; or le quotient de leur diviſion eſt le même que leur expoſant : donc ce quotient eſt un nombre quarré. De même l'expoſant de deux cubes eſt un nombre cube ; or le quotient de leur diviſion eſt le même que leur expoſant : donc ce quotient eſt un cube, & ainſi des autres puiſſances.

Il me reſte à prouver que ces quotiens ont pour racine les quotiens des racines ; & pour cela ſoit les deux quarrés $aa.bb$, & leur expoſant ſoit cc : donc ſuppoſant aa plus grand que bb, nous aurons $aa=bbcc$, ainſi les deux quarrés ſeront $bbcc$ & bb ; & diviſant l'un par l'autre, le quotient ſera cc ; or par l'équation précédente $aa=bbcc$, nous avons donc, en diviſant tout par bb, $\frac{aa}{bb}=cc$ & $c=\frac{\sqrt{aa}}{bb}=\frac{a}{b}$, c'eſt-à-dire, que la racine c du quotient cc eſt égale à la racine du grand quarré, diviſée par la racine du petit ; ainſi ſuppoſant que le grand quarré eſt 36 & le petit quarré 9, nous aurons, en diviſant l'un par l'autre, le quotient 4, qui eſt encore un quarré ; & la racine 2 de ce quotient eſt égale au quotient $\frac{6}{3}$ des racines 6 & 3 des deux quarrés.

De même, ſoient les cubes $a^3.b^3$, & leur expoſant ſoit c^3 : donc $a^3=b^3c^3$; & les deux cubes ſont $b^3c^3.b^3$; diviſant l'un par l'autre, nous avons c^3 ; or par l'équation précédente $a^3=b^3c^3$ nous avons $c^3=\frac{a^3}{b^3}$ & $c=\frac{\sqrt[3]{a^3}}{b^3}=\frac{a}{b}$, c'eſt-à-dire, que la racine cubique du quotient c^3 eſt égale à la racine du grand cube, diviſée par celle du petit ; ainſi ſi le grand cube eſt 64 & le petit 8, diviſant l'un par l'autre, nous aurons le quotient 8 dont la racine cubique 2 eſt égale à

le à $\frac{4}{1}$, c'eſt-à-dire, au quotient de la racine cubique du grand cube, diviſée par la racine cubique du petit.

REMARQUE.

A propos de ceci, nous obſerverons en paſſant ce que nous avons déja dit ailleurs, que le produit de deux quarrés eſt encore un nombre quarré qui a pour racine le produit des deux racines ; que le produit de deux cubes eſt encore un cube, qui a pour racine le produit des deux racines ; & ainſi des autres puiſſances.

Car ſoient les quarrés $aa.bb$, leur produit ſera le quarré $aabb$, dont la racine ab eſt le produit des deux racines a & b des deux quarrés ; de même, ſoient les deux cubes $a^3.b^3$, leur produit ſera le cube a^3b^3, dont la racine cubique ab eſt le produit des deux racines cubiques a & b des deux cubes ; & ainſi des autres

DE'FINITIONS.

Le produit ab de deux grandeurs a & b, s'appelle *nombre plan* ou *de deux dimenſions*, dont les racines ſont les grandeurs a & b.

Le produit abc de trois grandeurs a, b, c, s'appelle *nombre ſolide* ou *de trois dimenſions*, dont les racines ſont les grandeurs a, b, c.

Le produit $abcd$ de quatre grandeurs, s'appelle *nombre de quatre dimenſions*, dont les racines ſont les grandeurs a, b, c, d ; & ainſi des autres.

Lorſque deux nombres plans ab, cd ont leurs racines proportionnelles, c'eſt-à-dire, que la premiere racine du premier eſt à la premiere du ſecond, comme la ſeconde du premier eſt à la ſeconde du ſecond ; enſorte que l'on ait $a.c::b.d$, ces deux nombres s'appellent *plans ſemblables*.

De même, lorſque deux nombres ſolides abc, def ont leurs racines proportionnelles, enſorte que l'on ait $a.d::b.e::c.f$, ces deux nombres s'appellent *ſolides ſemblables* ; & ainſi des autres.

Dans les *plans ſemblables*, les racines de même eſpéce, c'eſt-à-dire, la petite racine du premier & la petite du ſecond, ou la grande du premier & la grande du ſecond, s'appellent *racines homologues* ; & de même dans les nombres ſolides ſemblables, & dans ceux d'un plus grand nombre de dimenſions.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Deux nombres plans ſemblables, ab.cd, *ſont entr'eux en raiſon doublée de celles de leurs racines.*

Car les raiſons des racines ſont $a.c, b.d$; & ſi l'on multiplie les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens, nous aurons les deux plans ſemblables $ab.cd$, qui ſont par conſéquent en raiſon compoſée de celles de leurs racines; & comme les raiſons des racines ſont égales, ces deux plans ſont donc en raiſon doublée de l'une de ces racines.

$a.c$	$b.d$
2.3	4.6
ab	cd
8	18

De-là il ſuit, 1°. Que l'expoſant de deux plans ſemblables eſt un nombre quarré, puiſqu'il eſt le produit de deux expoſans égaux.

2°. Que ces deux plans ſont entr'eux comme deux nombres quarrés; car réduiſant ces deux plans aux moindres termes, le petit ſera l'unité, & le grand l'expoſant de l'un à l'autre; & ces deux nombres ſont des nombres quarrés.

3°. Que les plans ſemblables ſont entr'eux, comme les quarrés de leurs racines homologues; car puiſque ab & cd ſont entr'eux en raiſon doublée de celles de leurs racines $a.c$, ou de celles de leurs racines $b.d$; & que les quarrés $aa.cc$ des racines $a.c$, ou les quarrés $bb.dd$ des racines $b.d$, ſont auſſi en raiſon doublée de ces racines, il s'enſuit que les plans ſemblables ſont entr'eux, comme les quarrés de leurs racines homologues.

DIXIE'ME PROPOSITION.

Deux nombres ſolides ſemblables, ſont entr'eux en raiſon triple de celles de leurs racines.

Soient les ſolides ſemblables $abc.def$, nous avons donc trois raiſons égales $a.d, b.e, c.f$, dont le produit des antécédens & celui des conſéquens donne les ſolides ſemblables $abc.def$, qui ſont par conſéquent en raiſon compoſée de celles de leurs racines; & comme les trois raiſons des racines ſont égales, ces ſolides ſont donc en raiſon triplée de l'une de ces raiſons.

$a.d$	$b.e$	$c.f$
2.4	3.6	5.10
abc		def
30		240

De-là il ſuit, 1°. Que deux nombres ſolides ſemblables ont pour expoſant un nombre cube; car cet expoſant eſt le produit de trois expoſans égaux.

2°. Que deux nombres ſolides ſemblables ſont entr'eux, comme deux nombres cubes; car réduiſant ces deux nombres à leurs ex-

poſans, le petit ſera l'unité & le grand l'expoſant des deux; & ces deux nombres ſont deux nombres cubes.

3°. Que les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs racines homologues; car les ſolides *abc*. *def* étant en raiſon triplée de celles des racines *a*. *d*, ou de celles des racines *b*. *e*, ou de celles des racines *c*. *f*; & les cubes de ces racines étant en raiſon triplée de ces mêmes racines, les ſolides ſont par conſéquent en raiſon triplée de celles de leurs racines homologues.

Il faut obſerver que pour réduire une raiſon aux moindres expoſans, il ſuffit de diviſer tout par le moindre terme, & d'écrire tout de ſuite les quotiens; car alors le petit terme devient 1, & le grand eſt l'expoſant des deux termes; ainſi pour réduire aux expoſans la raiſon 8. 18 de deux plans ſemblables, il faut tout diviſer par 8, & ſans aller plus loin, on aura 1. $2\frac{1}{4}$ qui ſeront les expoſans de 8 & 18, où l'on voit que le petit terme devient 1 & le ſecond eſt l'expoſant $2\frac{1}{4}$, lequel expoſant eſt en effet le quarré des deux expoſans égaux $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ des raiſons compoſantes; car $\frac{3}{2}$ par $\frac{3}{2}$ fait $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$; que ſi on n'en agit pas de même à l'égard des fractions, c'eſt que le dénominateur deviendroit alors compoſé d'entiers & de fractions, ce qui ſeroit trop embarraſſant; & qu'ainſi il faut néceſſairement chercher les moindres termes entiers qui ſoient comme le numérateur eſt au dénominateur; après tout, quand on ſe ſerviroit de la même méthode des fractions à l'égard des raiſons, il n'y auroit point de mal; car les moindres termes qu'on trouveroit dans la queſtion préſente ſeroient 4 & 9, qui ſont deux quarrés en même raiſon que 1 & $2\frac{1}{4}$, puiſque ces deux-ci ſe réduiſent à $\frac{4}{4}$ & $\frac{4}{9}$ qui ſont entr'eux, comme 4 & 9; mais la méthode que j'enſeigne étant plus courte & plus commode, doit être préférée.

La Géométrie tire encore une grande utilité de ce que nous venons de dire des nombres plans ſemblables & des ſolides ſemblables; car ſoient, par exemple deux ſolides, dont le premier ait 12 de largeur, 18 de profondeur & 22 de hauteur; & le ſecond ait 6 de largeur, 9 de profondeur & 11 de hauteur; ſi l'on ne veut ſavoir ſimplement que le rapport de l'un à l'égard de l'autre, on compare la largeur à la largeur, la profondeur à la profondeur, & la hauteur à la hauteur; & ſi l'on découvre que ces raiſons ſoient égales, comme elles le ſont ici, on dit que ces ſolides ſont ſemblables, & par conſéquent en raiſon triplée de leurs dimenſions homologues; ainſi prenant l'expoſant 2 de ces raiſons, on fait le cube qui eſt 8; & l'on trouve par-là que le petit ſolide eſt au grand, comme 1 eſt

à 8, quoique l'on ne ſache pas quel eſt le contenu de l'un & de l'autre, contenu dont on n'a que faire pour lors. Quelquefois auſſi on ſe contente de dire que ces ſolides ſont entr'eux, comme les cubes de leurs dimenſions homologues, parce qu'on n'a beſoin que de cette connoiſſance, & tout cela abrége beaucoup.

REMARQUE.

Nous avons vû que l'expoſant de deux plans ſemblables étoit un nombre quarré, d'où il ſuit que diviſant deux nombres plans l'un par l'autre, le quotient eſt un quarré; & l'on doit dire de même, que ſi l'on multiplie deux plans ſemblables l'un par l'autre, le produit ſera encore un nombre quarré; car ſoient les deux plans ſemblables *ab . cd*, leur expoſant ſera par conſéquent un quarré; ſuppoſant donc que cet expoſant ſoit *ff*, & que *ab* ſoit le plus grand des deux plans, donc *ab=cdff*: & par conſéquent les deux plans ſemblables ſont *cdff . cd*; & multipliant l'un par l'autre, le produit ſera *cdcdff*, qui eſt un nombre quarré, dont la racine eſt *cdf*.

On prouvera de même que le produit de deux ſolides ſemblables, eſt encore un ſolide; & ainſi des autres.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Si l'on fait les quarrés de tous les termes d'une progreſſion Géométrique, ces quarrés ſeront encore en progreſſion; & il en ſera de même ſi l'on fait les cubes de tous les termes, les quatriémes puiſſances, &c.

Soit la progreſſion Géométrique *a . b . c . d . e . f*

Les quarrés ſeront *aa . bb . cc . dd . ee . ff*

Or le premier quarré *aa* ſera au ſecond $a^3 . b^3 . c^3 . d^3 : e^3 . f^3$. *bb* en raiſon doublée de *a . b*, & le ſecond quarré *bb* ſera au troiſiéme *cc* en raiſon doublée de *b . c*; or la raiſon *b . c* eſt égale à la raiſon *a . b*: donc la raiſon de *bb . cc* eſt auſſi égale à la raiſon doublée de *a . b*; & par conſéquent la raiſon des quarrés *aa . bb* eſt égale à la raiſon des quarrés *bb . cc*: donc ces trois quarrés ſont en progreſſion. Et continuant le même raiſonnement, on trouvera que tous les quarrés ſont en progreſſion.

Par la même raiſon, les cubes ſeront auſſi en progreſſion; car ils ſeront tous entr'eux en raiſon triplée d'une même raiſon; & ainſi des autres puiſſances.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Le produit des racines des deux quarrés inégaux, eſt un moïen proportionnel entre ces deux quarrés.

Soient les quarrés $aa.bb$, dont les racines ſont a & b; je dis que le produit ab eſt moïen proportionnel entre aa & bb; car multipliant d'une part les racines a & b par a, les produits $aa.ab$ ſont en même raiſon que $a.b$; ainſi nous avons $aa.ab::a.b$.

$$\begin{array}{ll} a.b & a.b \\ a & b \\ \hline aa.ab & ab.bb \end{array}$$

$$\begin{array}{l} aa.ab \\ ab.bb \end{array} :: a.b$$

$$aa.ab :: ab.bb$$

De même, multipliant les deux racines par b, nous avons les produits $ab.bb$, qui ſont encore en même raiſon que $a.b$, ainſi nous avons $ab.bb::a.b$; voilà donc deux proportions, dans chacune deſquelles la ſeconde raiſon $a.b$ eſt la même: donc la raiſon $aa.ab$ & la raiſon $ab.bb$ étant chacune égales à une même raiſon $a.b$, ſont par conſéquent égales entr'elles: donc $aa.ab::ab.bb$; donc ab eſt moïen proportionnel entre aa & bb.

On trouvera de même qu'entre deux cubes il y a deux moïennes proportionnelles, dont la premiere eſt le quarré de la racine du premier cube, multiplié par la racine du ſecond; & la ſeconde eſt le quarré de la racine du ſecond, multiplié par la racine du premier; ainſi ſoit $a^3.b^3$, dont les racines ſont a, b; multipliant ces racines par aa, nous aurons $a^3.aab$, qui ſeront entr'elles comme $a.b$; ainſi $a^3.aab::a.b$.

De même, multipliant ces racines par bb, nous aurons $abb.b^3$, qui ſeront encore entr'elles comme $a.b$, ainſi $abb.b^3::a.b$: donc puiſque la raiſon $a^3.aab$ & la raiſon $abb.b^3$ ſont chacune égales à la même raiſon $a.b$; elles ſont égales entr'elles, ainſi $a^3.aab::abb.b^3$; & comme le premier moïen aab & le ſecond abb, étant diviſés par ab, donnent pour quotient a & b, il s'enſuit que ces deux moïens ſont encore entr'eux comme $a.b$; ainſi nous avons $::a^3.aab.abb.b^3$.

$$\begin{array}{ll} a.b & a.b \\ aa & bb \\ \hline a^3.aab & abb.b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^3.aab \\ abb.b^3 \end{array} :: a.b$$

$$\begin{array}{l} a^3.aab :: abb.b^3 \\ :: a^3.aab.abb.b^3 \end{array}$$

Et l'on trouveroit de même combien il y a de moïens proportionnels entre a^4 & b^4, entre a^5 & b^5, entre a^6 & b^6, &c. & ſi on ne veut pas ſe donner la peine de les chercher, on prendra la Table des puiſſances; & faiſant abſtraction des coefficiens, on prendra le quatriéme rang $a^4+a^3b+aabb+ab^3+b^4$, & ce rang fera voir qu'entre deux quatriémes puiſſances a^4 & b^4, il y a trois moïens proportionnels, dont le premier eſt le produit du cube de la racine a par la racine b; le ſecond le produit du quarré de la racine a par le quarré de la racine b, & le troiſiéme le produit de la racine a par le cube de la racine b; & ainſi des autres puiſſances.

Je pourrois ajouter ici beaucoup d'autres propoſitions; mais comme la plûpart ne ſont pas fort utiles, & que d'ailleurs elles ſont toutes très-faciles à trouver à ceux qui auront bien compris ce que nous avons dit juſqu'ici, il ſeroit inutile d'en groſſir cet Ouvrage.

Des incommenſurables.

VII. Nous avons déja parlé des grandeurs incommenſurables dans ce Traité, mais alors nous ne les conſidérions qu'en elles-mêmes, c'eſt-à-dire, en tant qu'elles ſont des grandeurs qui ne peuvent s'exprimer, ni par aucun nombre entier, ni par aucun nombre rompu; ici nous allons les conſidérer ſelon le rapport qu'elles peuvent avoir les unes aux autres, ou que leurs puiſſances peuvent avoir.

DEFINITIONS.

Deux grandeurs ſont dites *incommenſurables entr'elles*, lorſque leur rapport ne peut s'exprimer par aucun nombre entier ni rompu; 2 & $\sqrt{3}$ ſont incommenſurables entr'elles, parce qu'il n'eſt pas poſſible d'exprimer de quelle maniere 2 contient $\sqrt{3}$.

Donc deux grandeurs ſont incommenſurables, lorſqu'elles ne ſont pas entr'elles comme un nombre à un autre nombre, ou, ce qui revient au même, lorſque leur rapport n'eſt pas de nombre à nombre; car ſi ce rapport étoit de nombre à nombre, on pourroit l'exprimer.

Lorſque deux grandeurs, étant incommenſurables entr'elles, leurs quarrés, ou leurs cubes, ou leur quatriéme puiſſance, &c. ſont commenſurables, on dit qu'elles ſont incommenſurables en elles-mêmes & commenſurables en puiſſance; ainſi 2 & $\sqrt{3}$ ſont incommenſurables en elles-mêmes, & commenſurables en ſecon-

de puiſſance, parce que leurs quarrés 4 & 3 ſont commenſurables ; & ainſi des autres.

PREMIERE PROPOSITION.

Toute raiſon doublée a pour expoſant un quarré, dont la racine eſt l'expoſant de l'une ou de l'autre des raiſons compoſantes ; de même, toute racine triplée a pour expoſant un cube, dont la racine cubique eſt l'expoſant des racines compoſantes, & ainſi des autres puiſſances ; c'eſt ce qu'on a montré ci-deſſus. Donc ſi l'expoſant d'une racine doublée n'eſt pas un quarré parfait dont on puiſſe tirer la racine, il s'enſuit que l'expoſant des raiſons compoſantes ſera incommenſurable, & par conſéquent que l'antécédent & le conſéquent de chacune de ces raiſons ſeront incommenſurables entr'eux, puiſqu'on ne ſauroit en connoître le rapport ; de même, ſi l'expoſant d'une raiſon triplée n'eſt pas un cube parfait dont on puiſſe extraire la racine, il s'enſuit que l'expoſant des raiſons compoſantes eſt incommenſurable, & par conſéquent que l'antécédent & le conſéquent de chacune d'elles ſont incommenſurables entr'eux.

Cette propoſition n'a pas beſoin de preuves après tout ce que nous avons dit ci-deſſus ; il ſuffit de bien obſerver les termes de *nombre* à *nombre* dont nous nous ſervons ici ; car l'incommenſurabilité des grandeurs ne conſiſte que dans l'impoſſibilité d'exprimer leurs rapports en nombres, ce rapport pouvant fort bien être exprimé d'une autre façon ; comme, par exemple en lignes, ainſi qu'on le fait en Géométrie. Ainſi quand nous diſons que deux grandeurs ne ſont pas entr'elles comme un quarré à un autre quarré, il faut entendre, comme un nombre quarré dont on peut extraire la racine, à un autre nombre quarré dont on peut extraire auſſi la racine ; car autrement il peut fort bien ſe faire que ces grandeurs ſoient entr'elles comme deux quarrés ; comme, par exemple, deux ſurfaces quarrées, dont le contenu ſeroit tel qu'on ne pourroit pas en extraire la racine en nombre. Ce que je dis eſt d'une extrême conſéquence, puiſqu'il arrive tous les jours que le rapport de deux grandeurs ne pouvant s'exprimer en nombres, s'exprime cependant d'une autre façon.

SECONDE PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Géométrique, 1°. Si le premier eſt au troiſiéme, comme un nombre quarré à un nombre quarré, le premier & le ſe-

cond terme ſont commenſurables entr'eux, & par conſéquent tous les termes de la progreſſion ſont commenſurables. 2°. Si le premier & troiſiéme terme ſont entr'eux, comme un nombre non quarré eſt à un nombre non quarré, le premier & le ſecond terme ſont incommenſurables entr'eux, mais commenſurables en ſeconde puiſſance; & il en ſera de même de tous les termes de la progreſſion. Enfin, ſi le premier & le troiſiéme ne ſont point entr'eux, comme nombre à nombre, le premier & le ſecond terme ſeront incommenſurables entr'eux & en ſeconde puiſſance, & il en ſera de même des autres termes.

1°. Dans toute progreſſion, le premier eſt au troiſiéme en raiſon doublée, de la raiſon du premier au ſecond: donc l'expoſant du premier au troiſiéme eſt le produit de l'expoſant des deux premiers, multiplié par lui-même; & puiſque nous ſuppoſons que le premier eſt au troiſiéme, comme un nombre quarré à un nombre quarré, l'expoſant de ces deux termes ſera donc un quarré parfait; ainſi tirant la racine quarrée de cet expoſant, cette racine ſera l'expoſant du premier au ſecond; & par conſéquent le premier & le ſecond ſeront commenſurables entr'eux, & tous les termes de la progreſſion le ſeront.

Soient le premier & le troiſiéme termes d'une progreſſion 1 & 4, ces deux nombres ſont en raiſon doublée, de la raiſon du premier au ſecond: donc leur expoſant 4 eſt le produit de l'expoſant des deux premieres, multiplié par lui-même; tirant donc la racine de 4, j'aurai 2 qui ſera l'expoſant des deux premiers; & comme le premier eſt 1, le ſecond ſera 2; & il eſt viſible que tous les autres termes de la progreſſion ſeront commenſurables.

2°. Si l'expoſant du premier au troiſiéme, eſt comme un nombre non quarré à un nombre non quarré, leur expoſant ne ſera pas un nombre quarré; cependant comme ces deux termes ſeront entr'eux en raiſon doublée de celle des deux premiers, il eſt sûr que leur expoſant ſera le produit de l'expoſant des deux premiers, multiplié par lui-même; ainſi cet expoſant ſera un quarré, mais un quarré dont la racine ſera incommenſurable: donc cette racine incommenſurable ſera l'expoſant des deux premiers termes, & ces deux premiers termes ſeront incommenſurables entr'eux; mais comme leurs quarrés ſont entr'eux comme le premier au troiſiéme que nous ſuppoſons commenſurables, ces deux premiers termes ſeront commenſurables en puiſſance.

Soient le premier & le troiſiéme termes d'une progreſſion 1 & 6, qui ne ſont pas entr'eux comme des nombres quarrés; leur expo-

ſant

ſant 6 n'eſt donc pas un nombre quarré : cependant cet expoſant étant le produit de l'expoſant des deux premiers termes, multiplié par lui-même ; 6 eſt donc un quarré dont la racine eſt incommenſurable, ainſi l'expoſant des deux premiers termes eſt $\sqrt{6}$; & comme le premier terme eſt 1, le ſecond eſt $\sqrt{6}$ & le troiſiéme 6 : donc ces deux premiers termes ſont incommenſurables entr'eux ; mais leurs quarrés étant entr'eux comme le premier au troiſiéme, ces quarrés ſont donc comme 1 & 6, & par conſéquent commenſurables.

3°. Enfin, ſi le premier & le troiſiéme terme ſont entr'eux comme un nombre connu à un nombre irrationel, ils ſeront incommenſurables entr'eux, & leur expoſant ſera un nombre irrationel ou radical ; & comme cet expoſant eſt le produit de l'expoſant des deux premiers, multipliés par lui-même, l'expoſant des deux premiers ſera donc la racine de l'expoſant irrationel du premier au troiſiéme, & par conſéquent il ſera irrationel & les deux premiers termes ſeront incommenſurables entr'eux ; de plus, leurs quarrés étant entr'eux, comme le premier eſt au troiſiéme qui ſont incommenſurables, ſeront auſſi incommenſurables ; ainſi les deux premiers termes ſeront incommenſurables entr'eux & en ſeconde puiſſance.

Soient le premier & le troiſiéme terme d'une progreſſion $1 . \sqrt{3}$, leur expoſant $\sqrt{3}$ eſt irrationel ; or cet expoſant eſt le quarré de celui des deux premiers termes : donc tirant la racine de cet expoſant, nous aurons $\sqrt[4]{3}$, qui ſera l'expoſant du premier au ſecond ; & comme le premier eſt 1, le ſecond ſera $\sqrt[4]{3}$, & ces deux termes ſeront incommenſurables ; de plus, leurs quarrés étant entr'eux, comme le premier eſt au troiſiéme qui ſont incommenſurables, ils ſeront auſſi incommenſurables, & les deux premiers ſeront incommenſurables entr'eux & en ſeconde puiſſance.

Et ſi on vouloit ſavoir comment iroit cette progreſſion, la voici : $1 . \sqrt[4]{3} . \sqrt[4]{9} . \sqrt[4]{27} . 3 . 3\sqrt[4]{3} . 3\sqrt[4]{9} . 3\sqrt[4]{27} . 9 . 9\sqrt[4]{3} . 9\sqrt[4]{9} . 9\sqrt[4]{27} . 81$, & ainſi de ſuite ; deſorte qu'il y auroit toujours trois termes incommenſurables entre deux commenſurables, & que les commenſurables ſeroient les puiſſances ſucceſſives de 3 ; & pour expliquer ceci, il faut ſavoir que de même qu'en tirant la racine quarrée d'une racine quarrée, on a la racine quatriéme, de même auſſi en multipliant racine quatriéme par racine quatriéme, on doit avoir racine ſeconde ; ainſi le ſecond terme de la progreſſion étant $\sqrt[4]{3}$, & ce terme étant en même-tems l'expoſant de la progreſſion, je le mul-

tiplie par lui-même, & j'ai le troiſiéme terme $\sqrt[2]{3}$; mais comme pour avoir le quatriéme, il faut que je multiplie ce troiſiéme par l'expoſant, & que le ſigne radical de l'un n'eſt pas le même que le radical de l'autre; je les réduis au même ſigne, en élevant au quarré la grandeur 3 qui eſt ſous le ſigne du troiſiéme terme, & j'ai $\sqrt[4]{9}$ qui eſt le même que $\sqrt[2]{3}$, comme nous avons vû ailleurs; après quoi multipliant le troiſiéme terme $\sqrt[4]{9}$ par l'expoſant $\sqrt[4]{3}$, j'ai $\sqrt[4]{27}$ qui eſt le quatriéme terme; & multipliant celui-ci par l'expoſant, j'ai $\sqrt[4]{81}$ qui eſt le cinquiéme; mais comme $\sqrt[4]{81}$ eſt égal à 3, j'écris 3 au lieu de $\sqrt[4]{81}$; & multipliant 3 par l'expoſant, j'ai $3\sqrt[4]{3}$ qui eſt le ſixiéme; enſuite multipliant celui-ci par l'expoſant, j'ai $3\sqrt[4]{9}$ qui eſt le ſeptiéme; & celui-ci multiplié par l'expoſant, donne $3\sqrt[4]{27}$ qui eſt le huitiéme; & celui-ci multiplié par l'expoſant, donne $3\sqrt[4]{81}$ qui eſt le neuviéme; & comme $\sqrt[4]{81}=3$, donc $3\sqrt[4]{81}=9$, & j'écris 9; & l'on peut continuer de même la progreſſion à l'infini.

TROISIEME PROPOSITION.

Dans toute progreſſion Géométrique, 1°. Si le premier & le quatriéme ſont entr'eux comme deux nombres cubes, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi les expoſans de ces deux termes eſt un nombre cube, les deux premiers termes ſont commenſurables, & toute la progreſſion l'eſt auſſi. 2°. Si le premier & le quatriéme terme ont pour expoſant un nombre qui ne ſoit pas cube, les deux premiers termes ſont incommenſurables entr'eux & commenſurables en troiſiéme puiſſance. 3°. Enfin, ſi l'expoſant du premier & du quatriéme terme eſt irrationel, les deux premiers ſont incommenſurables entr'eux & en puiſſance.

1°. Si le premier & le quatriéme ont pour expoſant un nombre cube, cet expoſant étant le produit de l'expoſant des deux premiers termes, multiplié deux fois par lui-même, ſera le cube de l'expoſant des deux premiers termes; ainſi tirant la racine cubique, on aura l'expoſant des deux premiers termes, qui par conſéquent ſeront commenſurables.

Soit le premier terme d'une progreſſion 2, & le troiſiéme 54, ces deux termes réduits à leurs moindres expreſſions, ſont 1 & 27 qui ſont deux nombres cubiques dont l'expoſant eſt 27; & comme cet expoſant eſt le cube de celui des deux premiers termes, ti-

rant la racine cubique de 27, nous aurons 3 qui ſera l'expoſant des deux premiers termes ; ainſi le premier étant 2, le ſecond ſera 6, & la progreſſion 2 . 6 . 18 . 54, &c.

2°. Si le premier & le quatriéme terme ont pour expoſant un nombre qui ne ſoit pas cube, la racine cubique de cet expoſant ſera un nombre irrationel ; & comme cette racine eſt l'expoſant des deux premiers termes, ces deux termes ſeront incommenſurables entr'eux, mais commenſurables en troiſiéme puiſſance, puiſque leurs cubes ſeront entr'eux comme le premier terme au quatriéme.

Soit le premier terme d'une progreſſion 2 & le quatriéme 60, l'expoſant de ces deux termes eſt 30 qui n'eſt pas un nombre cube, ainſi ſa racine cubique ſera le nombre irrationel $\sqrt[3]{30}$; & par conſéquent ce nombre ſera l'expoſant des deux premiers termes ; donc les deux premiers ſeront 2 & $2\sqrt[3]{30}$ qui ſont incommenſurables entr'eux ; mais leurs cubes ſeront commenſurables, puiſqu'ils ſeront entr'eux comme 2 . 60, & les termes de la progreſſion ſeront $2 . 2\sqrt[3]{30} . 2\sqrt[3]{900} . 2\sqrt[3]{27000}$, & celui-ci eſt égal à 60 ; car $\sqrt[3]{27000}$ eſt 30, lequel multiplié par 2 fait 60 ; enſuite les autres ſeront $60\sqrt[3]{30} . 60\sqrt[3]{900} . 60\sqrt[3]{27000}$, & celui-ci ſera 1800 ; car $\sqrt[3]{27000}$ eſt 30, lequel multiplié par 60 fait 1800 ; deſorte qu'il y aura toujours deux termes incommenſurables entre deux commenſurables, & que les commenſurables ſeront une progreſſion dont l'expoſant ſera 30.

3°. Si l'expoſant du premier au quatriéme eſt un nombre irrationel, ſa racine cubique ſera auſſi irrationelle ; & comme cette racine eſt l'expoſant des deux premiers termes, ces deux termes ſeront incommenſurables entr'eux & en troiſiéme puiſſance, puiſque leurs cubes ſeront comme le premier au quatriéme.

Soit le premier terme 2 & le quatriéme $2\sqrt{2}$, leur expoſant ſera $\sqrt{2}$, dont la racine cubique eſt $\sqrt[6]{2}$; ainſi l'expoſant des deux premiers termes ſera $\sqrt[6]{2}$; & par conſéquent le premier ſera 2 & le ſecond ſera $2\sqrt[6]{2}$, & la progreſſion ſera $2 . 2\sqrt[6]{2} . 2\sqrt[6]{4} . 2\sqrt[6]{8}$, & celui-ci ſera le même que $2\sqrt{2}$; car pour élever $\sqrt{2}$ à $\sqrt[6]{}$, il faut faire le cube de $\sqrt{}$, ainſi il faut cuber la grandeur 2 qui eſt ſous le ſigne, les termes d'après ſeront $2\sqrt[6]{16} . 2\sqrt[6]{32} . 2\sqrt[6]{64}$, & celui-ci ſera 4 ; car

$\sqrt[6]{64}$ eſt égal à 2, lequel multiplié par 2 fait 4; enſuite viendront $4\sqrt[6]{2} . 4\sqrt[6]{4} . 4\sqrt[6]{8} . 4\sqrt[6]{16} . 4\sqrt[6]{32} . 4\sqrt[6]{64}$, & celui-ci ſera 8; car $\sqrt[6]{64}$ eſt égal à 2, lequel multiplié par 4 fait 8; de ſorte que la progreſſion étant $2 . 2\sqrt[6]{2} . 2\sqrt[6]{4} . 2\sqrt[6]{8} . 2\sqrt[6]{16} . 2\sqrt[6]{32} . 4 . 4\sqrt[6]{2} . 4\sqrt[6]{4} . 4\sqrt[6]{8} . 4\sqrt[6]{16} . 4\sqrt[6]{32} . 8$, &c. on voit qu'il y aura cinq termes incommenſurables entre deux commenſurables, & que les commenſurables ſeront les puiſſances ſucceſſives de 4; au reſte, ce que je dis ici n'eſt que pour faire voir comment on peut calculer ces ſortes de progreſſions; car il ne faut pas s'imaginer que ce qui arrive à celles-ci, ſoit une régle générale pour les autres, attendu que les choſes varieront autant de fois que l'on variera le quatriéme terme, & qu'il ſe trouvera plus ou moins de termes incommenſurables entre deux commenſurables, ſelon que l'expoſant du premier au quatriéme terme ſera différent; & il faut dire la même choſe de l'exemple que j'ai donné dans la propoſition précédente.

On prouveroit de la même façon, que ſi le premier & le cinquiéme terme n'avoient pas pour expoſant une quatriéme puiſſance, le premier & le ſecond terme ſeroient incommenſurables & commenſurables en quatriéme puiſſance; & que ſi l'expoſant du premier au cinquiéme étoit irrationel, les deux premiers termes ſeroient incommenſurables entr'eux & en quatriéme puiſſance.

Et l'on pourroit encore faire la même choſe en comparant le premier au ſixiéme, le premier au ſeptiéme, &c.

COROLLAIRES.

Il ſuit de-là, 1°. Que ſi deux nombres n'ont pas pour expoſant un nombre quarré, on ne ſauroit trouver une moïenne proportionnelle entre ces deux nombres qui puiſſe s'exprimer par quelque nombre que ce ſoit; car ſoient les nombres 2 & 6 entre leſquels on demande une moïenne proportionnelle que j'appelle x, nous avons la proportion continuë $:: 2 . x . 6$; & dans cette proportion, qui eſt un commencement de progreſſion, le premier terme eſt au troiſiéme en raiſon doublée de celle du premier au ſecond: donc l'expoſant du premier au troiſiéme eſt un produit de l'expoſant des deux premiers, multiplié par lui-même, & par conſéquent cet expoſant eſt un quarré; il faut donc tirer la racine de ce quar-

ré pour avoir l'exposant des deux premiers nombres; mais l'exposant de 2 à 6 étant 3, qui n'est pas un nombre quarré, sa racine est incommensurable & ne peut s'exprimer que par $\sqrt{3}$: donc l'exposant du premier au second étant $\sqrt{3}$, le moïen proportionnel est $2\sqrt{3}$, qui est un nombre incommensurable.

2°. Entre deux nombres qui n'ont pas pour exposant un nombre cube, on ne sauroit trouver deux moïennes proportionnelles qui puissent s'exprimer en nombres; car soient les deux nombres 2 & 10 dont l'exposant 5 n'est pas un nombre cube, & appellons les deux moïennes x & z, nous aurons $2.x.z.10$ qui sont en progression: donc l'exposant du premier au quatriéme est un produit de l'exposant des deux premiers, multiplié deux fois par lui-même: donc cet exposant est un cube dont il faut tirer la racine cubique pour avoir l'exposant des deux premiers termes, & comme on ne peut tirer la racine cubique de 5 qu'en écrivant $\sqrt[3]{5}$, il s'ensuit que l'exposant des deux premiers termes est incommensurable, & ainsi le second terme est $2\sqrt[3]{5}$, & par conséquent le troisiéme est $2\sqrt[3]{25}$, & ces deux termes sont incommensurables.

On prouveroit de même qu'on ne peut trouver trois moïennes proportionnelles entre deux termes, dont l'exposant n'est pas une quatriéme puissance; & ainsi des autres.

Des nombres premiers & des nombres composés, des nombres premiers entr'eux & des nombres composés entr'eux, & de la division de ces différentes espéces de nombres.

VIII. Lorsqu'un nombre ne peut être divisé par aucun autre nombre différent de lui-même, qui soit plus grand que l'unité, on l'appelle *nombre premier* ou *simple*; ainsi les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, &c. qui ne peuvent être divisés exactement que par l'unité, sont des nombres *simples* ou *premiers*.

Tout nombre qui peut être divisé exactement par un nombre différent de l'unité & de lui-même, s'appelle *nombre composé*; ainsi 4 qui peut être divisé par 2, 6 qui peut être divisé par 3 ou par 2, &c. sont des nombres composés.

Par le mot de diviseur d'un nombre, on entend un nombre qui le divise exactement & sans reste.

Ce diviseur peut être simple ou composé; il est simple quand il ne peut être divisé par aucun autre nombre différent de l'unité; &

il eſt compoſé, quand il peut ſe diviſer par quelqu'autre nombre.

Lorſqu'un même nombre diviſe exactement deux différentes grandeurs, on l'appelle *diviſeur commun* de ces grandeurs, & s'il eſt le plus grand diviſeur de ces grandeurs, on l'appelle *le plus grand diviſeur commun*; & de même, s'il eſt le plus petit, il s'appelle *le moindre diviſeur commun*.

Lorſque deux nombres n'ont d'autres diviſeurs communs que l'unité, on les appelle *nombres premiers entr'eux*; & lorſqu'ils ont un diviſeur commun différent de l'unité, on les appelle *nombres compoſés entr'eux*.

COROLLAIRES.

De ces définitions il ſuit, 1°. Que le plus grand diviſeur d'un nombre eſt ce nombre lui-même, puiſqu'il ne peut en contenir un autre qui ſoit plus grand que lui.

2°. Que le moindre diviſeur d'un nombre eſt l'unité; car ce qui eſt au-deſſous de l'unité, c'eſt-à-dire toute fraction, loin de diviſer un nombre, le multiplie; ainſi quand on veut diviſer 2 par $\frac{1}{2}$, le quotient eſt 4, qui eſt une véritable multiplication de 2.

3°. Le plus grand diviſeur commun de deux nombres, ne peut être plus grand que le plus petit de ces nombres, puiſqu'il ne ſeroit pas contenu dans ce petit, s'il étoit plus grand que lui; & le moindre diviſeur commun ne peut être au-deſſous de l'unité.

4°. Tout nombre entier peut être diviſé par un autre nombre entier; car s'il eſt ſimple, il peut ſe diviſer lui-même; & s'il eſt compoſé, quelque nombre ſimple le diviſera.

5°. Si de deux nombres, l'un diviſe l'autre, ce diviſeur eſt le diviſeur commun des deux nombres; ainſi ſi 2 diviſe 8, ce nombre 2 eſt le diviſeur commun des deux nombres 2 & 8.

6°. Si deux nombres ſont compoſés entr'eux, & que l'un des deux ſoit un nombre ſimple, ce nombre ſimple diviſe exactement l'autre; car autrement les deux nombres n'auroient point de diviſeur commun différent de l'unité; ſoient les deux nombres 3 & 6 qui ſont compoſés entr'eux, & le premier 3 un nombre ſimple; puiſque ces deux nombres ſont compoſés entr'eux, il faut qu'ils aïent un diviſeur commun différent de l'unité; or 3 étant ſimple, ne peut être diviſé que par l'unité ou par lui-même: donc 3 doit diviſer 6.

7°. Si deux nombres 3 & 4 ſont premiers entr'eux, & qu'un troi-

même nombre 2 diviſe l'un des deux, comme, par exemple 4, ce nombre 2 ſera premier à l'égard de l'autre nombre 3; car s'il pouvoit le diviſer, les nombres 3 & 4 ne ſeroient pas premiers entr'eux.

8°. Si deux nombres 3 & 4 ſont premiers entr'eux, chacun d'eux ſera encore premier à l'égard de leur ſomme 3+4; car 3 ne pouvant diviſer 4, ne ſauroit auſſi diviſer la ſomme 3+4; & de même 4 ne pouvant diviſer 3, ne ſauroit auſſi diviſer la ſomme 3+4.

Toutes ces conſéquences ſont très-ſimples & des plus naturelles; cependant il ne faut pas les négliger; car il arrive preſque toujours que les plus grandes découvertes ne ſont duës qu'à l'application que l'on a fait des vérités les plus communes. Qui diroit, en effet, que l'Analyſe, cette ſcience ſi fertile en inventions, n'eſt fondée que ſur ce raiſonnement ſi ſimple: *Que deux choſes demeurent égales, ſi ce qu'on leur ajoute ou ce qu'on leur retranche eſt égal de part & d'autre, ou ſi on les multiplie ou diviſe par la même grandeur*; c'eſt-là ſon unique principe, tous les autres qu'elle peut emploïer ne ſont, comme nous avons vû, que des emprunts qu'elle fait d'ailleurs, ſelon l'exigence & la nature des queſtions; & cependant à quoi ne parvient-elle pas? Déſabuſons-nous, la ſcience eſt ſimple & unie, & les difficultés qui s'y rencontrent, viennent bien moins de ſa part que de la diſſipation de notre eſprit, ou de l'agitation que lui cauſent les paſſions qui l'empêchent d'enviſager tranquillement les premiers principes, & les conſéquences qu'on en peut tirer: laiſſons aux Chymiſtes & aux Caballiſtes ces principes obſcurs & embarraſſés, dont ils ſe vantent d'avoir ſeuls l'intelligence; & pour nous, contens des plus ſimples vérités, prenons-les pour guides, & nous ferons des découvertes auſſi utiles & certaines, que les leurs ſont infructueuſes & chimériques.

PREMIERE PROPOSITION.

Si un nombre eſt premier à l'égard de deux autres nombres, il eſt auſſi premier à l'égard de leur produit.

Soient les nombres 2 & x dont le produit eſt $2x$, & un troiſiéme nombre 7 qui eſt premier à l'égard de l'un & l'autre; je dis qu'il eſt auſſi premier à l'égard du produit $2x$; car ſi 7 diviſoit le produit $2x$, il faudroit que ce produit fût ou égal au nombre 7, ou un multiple du nombre 7: or $2x$ ne peut pas être 7; car $2x$ peut ſe diviſer par 2, & 7 ne peut être diviſé par 2, attendu que 7 & 2 ſont premiers entr'eux. Il ne peut pas ſe faire non plus que $2x$ ſoit un

multiple de 7; car si cela étoit, il faudroit que ce fût un multiple de 7 divisible par 2; ainsi ce produit seroit ou 2 fois 7, ou deux fois 14, ou 2 fois 28, ou 2 fois 56, & ainsi de suite, en prenant toujours les multiples de 7 qui peuvent être divisés par 2; & dans tous ces cas le nombre x seroit ou 7, ou 14, ou 28, &c. ensorte que ce nombre seroit divisible par 7: or nous supposons que x & 7 sont premiers entr'eux, donc il n'est pas possible que x soit ni 7, ni aucun de ses multiples; & par conséquent le produit de $2x$ ne sauroit être divisé par 7, ainsi 7 & le produit $2x$ sont encore premiers entr'eux.

On prouvera de même que si un nombre est premier à l'égard de trois autres, il sera aussi premier à l'égard du produit des trois; car soient les trois nombres 2, 3 & x dont le produit est $6x$, & un quatriéme nombre 5 qui soit premier à l'égard de chacun des trois, ce nombre 5 sera donc aussi premier à l'égard du produit 6 des deux premiers nombres; & considérant ensuite ce produit & le troisiéme nombre x comme deux nombres, à l'égard desquels le nombre 5 est premier, ce nombre 5 sera donc aussi premier à l'égard de leur produit $6x$; & comme ce produit est le produit des trois, 5 sera donc premier à l'égard du produit des trois.

Et il en sera de même pour quatre nombres, pour cinq, pour six, &c.

COROLLAIRES.

Il suit de-là que si un nombre divise le produit de deux autres nombres, & qu'il soit premier à l'égard de l'un d'entr'eux, il divisera certainement l'autre.

Car soient les deux nombres 2 & x dont le produit est $2x$, & un troisiéme nombre 5 qui est premier à l'égard de 2, & qui divise cependant le produit $2x$; alors le produit $2x$ doit être égal à 5 ou à 1 multiple de 5: or $2x$ ne peut pas être égal à 5; car $2x$ peut se diviser par 2, & 5 ne peut pas être divisé par 2, attendu que 5 & 2 sont premiers entr'eux; il faut donc que $2x$ soit un multiple de 5, qui soit en même-tems divisible par 2: donc $2x$ ne peut être que 2 fois 5, ou 2 fois 10, ou 2 fois 20, &c. en prenant toujours les multiples de 5 qui peuvent être divisés par 2; & dans tous ces cas, le nombre x est ou 5, ou 10, ou 20, ou enfin quelqu'autre multiple de 5 divisible par 2, & par conséquent x peut se diviser par 5.

Et l'on prouvera de même que si un nombre divise exactement le produit de trois nombres, & qu'il soit premier à l'égard de deux d'entr'eux, il divisera certainement le troisiéme.

Car

Car soient les trois nombres 2, 3 & x dont le produit est $6x$, & un quatriéme nombre 7 qui soit premier à l'égard des deux premiers 2 & 3, & qui cependant divise exactement le produit $6x$; ce nombre 7 sera encore premier à l'égard du produit 6 des deux premiers; mais comme il divise le produit $6x$ des trois, il faut que ce produit soit ou égal au nombre 7, ou quelqu'un des multiples de 7 qui soit divisible par 6 : or il ne peut pas être 7, parce que $6x$ est divisible par 6, & que 7 ne peut être divisé par 6, attendu que 6 & 7 sont premiers entr'eux; ainsi $6x$ sera ou 6 fois 7, ou 6 fois 14, ou 6 fois 21, &c. en prenant tous les multiples de 7 que 6 peut diviser; & dans tous ces cas, x sera ou 7, ou 14, &c. & par conséquent x sera divisible par 7.

SECONDE PROPOSITION.

Le produit de deux nombres premiers entr'eux, est le moindre nombre que l'un & l'autre puissent diviser.

Soient les deux nombres 4 & 5 qui sont premiers entr'eux, leur produit est 20, & je dis : que ce produit est le moindre nombre qui soit divisible en même-tems par les deux nombres 4 & 5; car si cela n'est pas, il y aura donc quelqu'autre nombre moindre que 20 qui sera divisible par 4 & 5 : or quel que ce nombre puisse être, dès-lors qu'il pourra être divisé par 5, ou ce sera 5 lui-même, ou un multiple de 5 : mais il ne peut pas être 5, parce que 4 ne sauroit le diviser, donc c'est un multiple de 5; supposons donc que le nombre qui multiplie 5, pour faire son multiple soit x, donc ce multiple est $5x$, & $5x$ doit être le plus petit nombre que 4 puisse diviser : or $5=4+1$; mettant donc $4+1$ au lieu de 5 dans le multiple $5x$, nous avons $4x+1x=5x$, il faut donc que $4x+1x$ soit divisible par 4; & pour cela, il faut que le second terme $1x$ soit divisible par 4, & qu'il soit en même-tems le plus petit nombre que 4 puisse diviser : mais cela ne peut se faire qu'en supposant $x=4$, ainsi $4x+1x=4\times4+4=16+4=20$; or $5x=4x+1x$: donc $5x=20$, c'est-à-dire, que le produit 20 est le plus petit nombre que 4 & 5 puissent diviser.

Soient de même les deux nombres premiers entr'eux 4 & 11 dont le produit est 44, si ce produit n'est pas le moindre nombre que les deux 5 & 11 puissent diviser, quelqu'autre nombre moindre que 44 pourra donc être divisé par les deux 4 & 11; quel que ce soit ce nombre, ce sera certainement ou 11, ou un multiple de 11;

mais il ne peut pas être 11, à cauſe que 4 ne ſauroit le diviſer, puiſque 4 & 11 ſont premiers entr'eux : donc ce nombre eſt multiple de 11 ; ainſi ſuppoſant que le nombre qui multiplie 11 pour en faire le multiple que nous cherchons ſoit x, le multiple ſera $11x$, & $11x$ doit être diviſible par 4 : or $11=4+4+3$; mettant donc cette valeur de 11 dans le multiple $11x$, nous aurons $4x+4x+3x=11x$, ainſi il faut que $4x+4x+3x$ puiſſe être diviſé par 4 ; & comme il eſt évident que les deux premieres parties $4x+4x$ ſont diviſibles par 4, il ne reſte plus que la troiſiéme $3x$ qui doit avoir la même propriété : or $3x$ ne peut être diviſé par 4, qu'en ſuppoſant ou que $3x$ eſt égal à 4, ou que c'eſt un multiple de 4, mais $3x$ ne peut pas être égal à 4 ; car $3x$ peut ſe diviſer par 3, & 4 ne ſauroit être diviſé par 3, attendu que 4 & 3 ſont premiers entr'eux : donc $3x$ eſt un multiple de 4 qui doit être diviſible par 3 ; or $4=3+1$; ſuppoſant donc que le nombre qui multiplie 4, pour faire le multiple que nous cherchons ſoit z, nous aurons $3z+1z=3x$ qui ſera ce multiple ; & comme $3z+1z$ doit être diviſible par 3, il faut que la partie $1z$ ſoit diviſible par 3, & ſoit même le plus petit nombre que 3 puiſſe diviſer : donc z doit être 3, & par conſéquent $3z+z=3\times3+3=9+3=12$; & comme $3z+z=3x$, dont $3x=12$, & par conſéquent $x=\frac{12}{3}=4$; & mettant cette valeur de x dans le nombre $11x$ que nous avons ſuppoſé le moindre que 11 & 4 puiſſent diviſer, nous trouverons $11x=44$, c'eſt-à-dire, que le moindre nombre que les deux nombres premiers 11 & 4 puiſſent diviſer, eſt leur produit 44 ; & ainſi des autres.

On prouvera de même que le produit de trois nombres premiers entr'eux, eſt le moindre nombre que ces trois nombres puiſſent diviſer ; car ſuppoſons les trois nombres 2. 3 & 5 qui ſont premiers entr'eux, leur produit eſt 30, & je dis : que 30 eſt le plus petit nombre qui puiſſe être diviſé par 2, 3 & 5 ; car le produit 6 des deux premiers 2 & 3, peut bien être diviſé par les deux nombres 2 & 3, mais il ne ſauroit être diviſé par 5, attendu que 5 étant premier à l'égard de 2 & 3, eſt par conſéquent premier à l'égard de leur produit ; & il en arriveroit de même ſi l'on faiſoit le produit de 2 & 5, c'eſt-à-dire 10, lequel pourroit bien être diviſé par 2 & 5, mais non pas par 3 ; & de même encore ſi on faiſoit le produit 15 de 3 & 5, lequel peut être diviſé par 3 & 5, & non pas par 2 ; mais ſi l'on faiſoit le produit des trois, alors ce produit 30 ſera diviſible par les trois, & ſera même le moindre que les trois puiſſent diviſer ; car ſi on veut qu'il y ait un autre nombre moindre que 30 qui puiſ-

ſe être diviſé par les trois, ce nombre ſera ou le produit 6, qui eſt le moindre que les deux premiers 2 & 3 puiſſent diviſer, ou un multiple de ce produit : or il ne peut pas être 6, parce que 6 étant premier à l'égard du troiſiéme nombre 5, ne ſauroit par conſéquent être diviſé par 5 ; il faut donc que ce nombre ſoit un multiple de 6 qui puiſſe être diviſé par 5, & qui ſoit le moindre de ces multiples que 5 puiſſe diviſer ; ſuppoſons donc que le nombre qui multiplie 6, pour faire le multiple que nous cherchons ſoit x, nous aurons donc $6x$ qui doit être le moindre multiple de 6 que 5 puiſſe diviſer : or $6=5+1$; mettant donc $5+1$ au lieu de 6 dans le multiple $6x$, nous aurons $5x+1x=6x$, ainſi il faut que $5x+1x$ ſoit diviſible par 5, & pour cela, il faut que le dernier terme $1x$ ſoit le moindre nombre que 5 puiſſe diviſer : donc x doit être 5, & par conſéquent $5x+x=5\times5+5=25+5=30$: or $5x+x=6x$ qui eſt le moindre nombre que nous avons ſuppoſé que les trois nombres puiſſent diviſer : donc $6x=30$, c'eſt-à-dire, que le produit des trois nombres eſt le moindre qu'ils puiſſent tous trois diviſer.

On prouvera de même que le produit de quatre nombres premiers entr'eux eſt le moindre nombre qu'ils puiſſent diviſer tous quatre ; & ainſi de même pour 5 nombres, pour 6, pour 7, &c.

Ce que nous venons de démontrer pour les nombres premiers entr'eux, doit s'entendre des nombres ſimples, c'eſt-à-dire, que le produit de deux nombres ſimples eſt le moindre que ces deux nombres puiſſent diviſer ; que celui de trois nombres ſimples, eſt le moindre que ces trois nombres puiſſent diviſer ; & ainſi des autres, ce qui ne ſouffre aucune difficulté.

COROLLAIRES.

De tout ce que nous avons dit juſqu'ici, il ſuit, 1°. Que le produit ab de deux nombres ſimples a & b ne peut avoir d'autres diviſeurs que 1, a, b & ab, c'eſt-à-dire, qu'il ne peut être diviſé que par l'unité, ou par l'un ou l'autre des deux nombres, ou enfin par lui-même ; car ces deux nombres étant ſimples ou premiers, tout autre nombre eſt premier à leur égard, & par conſéquent à l'égard de leur produit.

2°. Que le produit abc de trois nombres ſimples ou premiers a, b, c, ne peut avoir pour diviſeur que 1, a, b, c, ab, ac, bc, abc, c'eſt-à-dire, qu'il ne peut être diviſé que par l'unité, ou par les trois nombres, ou par les produits alternatifs des trois nombres

pris deux à deux, ou enfin par lui-même; car ces trois nombres étant premiers, nul autre ne peut les diviſer, ni diviſer par conſéquent leur produit.

3°. Que le produit *abcd* des quatre nombres premiers *a*, *b*, *c*, *d* ne peut être diviſé que par 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, *abc*, *abd*, *acd*, *bcd* & *abcd*; & ainſi des autres produits qui ſeroient compoſés d'un plus grand nombre de racines ſimples.

4°. Que le quarré *aa* d'un nombre ſimple ou premier *a*, ne peut avoir pour diviſeur que 1, *a* & *aa*; car le quarré eſt le produit de deux racines égales *a*, *a*; & comme ces racines ſont des nombres premiers, nul autre nombre ne peut les diviſer, ni diviſer leur produit.

5°. Par la même raiſon, le cube a^3 d'un nombre ſimple *a*, ne peut avoir pour diviſeurs que 1, *a*. *aa* & a^3; de même que la quatriéme puiſſance a^4 d'un nombre premier *a*, ne peut avoir pour diviſeurs que 1, *a*. *aa*. a^3. a^4, & ainſi des autres puiſſances plus élevées.

6°. Que ſi deux nombres ſont diviſés par leur plus grand diviſeur commun, leurs quotiens ſeront premiers entr'eux; car les plus grands diviſeurs donnent les plus petits quotiens; & ſi ces quotiens pouvoient être encore diviſés, ils ne ſeroient pas les plus petits; & il en eſt de même ſi trois ou pluſieurs nombres ſont diviſés par leur plus grand diviſeur commun. Ce corollaire eſt une ſuite des définitions que nous avons données des diviſeurs.

PROBLEME PREMIER.

Trouver tous les diviſeurs ſimples égaux ou inégaux d'un nombre propoſé.

Si le nombre ſimple eſt pair, il faut le diviſer par le premier nombre 2 & le quotient encore par 2 s'il eſt pair, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on trouve un quotient impair; enſuite il faut diviſer le quotient impair par le nombre ſimple 3 s'il ſe peut, & le quotient encore par 3, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on ne puiſſe plus le diviſer par 3; après quoi on diviſera le quotient par 5, puis par 7, par 11, &c. ne ceſſant de diviſer par un même nombre que lorſque ce nombre ne peut plus diviſer; & quand en diviſant ainſi ſucceſſivement par les nombres ſimples impairs, on viendra à trouver pour quotient un nombre ſimple ou premier, lequel ſe diviſant donnera l'unité pour quotient, la queſtion ſera réſoluë.

Ainſi pour trouver les diviſeurs ſimples de 280, je le diviſe d'abord par 2; & comme le quotient 140 eſt pair, je le diviſe encore par 2, & le quotient eſt 70 qui eſt un nombre impair: ce nombre ne pouvant être diviſé par les nombres ſimples 3 & 5, je le diviſe par 7 & le quotient eſt 10 que je diviſe par 5; & le quotient étant le nombre ſimple 2, qui diviſé par lui-même donne 1, je connois que les diviſeurs ſimples de 180 ſont 1.2.2.2.5.7.

2	2	7	5	2	
280	140	70	10	2	1

De même, pour trouver les diviſeurs ſimples de 888, je le diviſe par 2; & le quotient étant encore pair, je diviſe ce quotient par 2, & le ſecond quotient encore par 2, parce qu'il eſt pair; & je trouve pour dernier quotient 111 qui eſt un nombre premier, lequel diviſé par lui-même donne 1; ainſi tous les diviſeurs ſimples de 888 ſont 1.2.2.2 & 111.

2	2	2	111	
888	444	222	111	1

On trouvera de même que les diviſeurs ſimples de 12600 ſont 1. 2.2.2.3.3.5.5.7; & ainſi des autres.

2	3	7	3	5	2	5	2	
12600	6300	2100	300	100	20	10	2	1

PROBLEME SECOND.

Trouver tous les diviſeurs différens d'un même nombre.

Je prens d'abord tous les diviſeurs ſimples égaux ou inégaux de ce nombre, & ſi je n'en trouve que d'inégaux, je laiſſe à part l'unité, puis je multiplie ces diviſeurs ſimples les uns par les autres, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. & tous ces produits ſont autant de diviſeurs différens; ainſi je trouve que tous les diviſeurs de ce nombre ſont l'unité, les diviſeurs ſimples & inégaux que j'ai trouvé, & tous les produits qu'ils ont faits.

Soit le nombre 210, j'en prens tous les diviſeurs ſimples 1.2.3.5.7; & comme ces diviſeurs ſont tous inégaux, je laiſſe à part l'unité, parce que les produits que je pourrois faire par l'unité, ne ſeront pas différens des nombres à multiplier.

Puis je dis: Puiſque ce nombre eſt diviſible ſucceſſivement par 2 & par 3, il eſt donc auſſi diviſible par le produit 6 de ces deux nombres, ainſi 6 eſt un de ſes diviſeurs; & continuant le même rai-

ſonnement, je trouve qu'il eſt auſſi diviſible par les produits de 2 par 5, de 2 par 7, de 3 par 5, de 3 par 7 & de 5 par 7, c'eſt-à-dire, qu'il peut être diviſé par les produits de ces quatre nombres ſimples pris deux à deux; & ces produits ſont 6 . 10 . 14 . 15 . 21. 35.

2	3	5	7	
210	105	35	7	1

6.	15.	35.	30.	105.	210.	1,
10.	21.		42.			2.
14.			70.			3.
						5.
						7.

Je dis de même, puiſque ce nombre peut ſe diviſer ſucceſſivement par 2 . 3 . 5, il peut auſſi ſe diviſer par le produit 30 de ces trois nombres; & de même par tous les produits des quatre diviſeurs ſimples pris trois à trois; & ces produits ſont 30 . 42 . 70 . 105.

Enfin, faiſant le produit des quatre diviſeurs ſimples, je trouve 210 qui eſt encore un diviſeur, car tout nombre peut ſe diviſer lui-même; raſſemblant donc tous ces produits avec les quatre diviſeurs ſimples & l'unité, je trouve que le nombre 210 a ſeize différens diviſeurs 1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 6 . 10 . 14 . 15 . 21 . 35 . 30 . 42 . 70 . 105 . & 210.

On trouvera de même que tous les diviſeurs différens du nombre 2310, dont les diviſeurs ſimples ſont 1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 qui ſont tous inégaux, ſont les 32 nombres que l'on expoſe ici; & ainſi des autres.

2	3	5	7	11	
2310	1155	385	77	11	1

6.	15.	35.	77.	30.	105.	385.	210.			1.
10.	21.	55.		42.	165.		330.	1155.	2310.	2.
14.	33.			66.			462.			3.
22.				70.	231.		770.			5.
				110.						7.
				154.						11.

Mais ſi parmi les diviſeurs ſimples il y en a d'égaux & d'inégaux, tels que ſont les diviſeurs ſimples 1 . 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5; je laiſſe à part l'unité, & j'obſerve que tous les produits des quatre 2 . 2 . 2 . 2, pris deux à deux, ſont toujours le même diviſeur 4; de même que leurs produits, pris trois à trois ſont toujours le même diviſeur 8, & enfin, que le produit des 4 eſt le diviſeur 16; ainſi ces quatre ne peuvent donner que les quatre diviſeurs 2 . 4 . 8 . 16, auſquels ajoutant l'unité, j'ai les cinq diviſeurs 1 . 2 . 4 . 8 . 16.

2	2	2	3	3	3	5	5	2	
21600	10800	5400	2700	900	300	100	20	4	1

1.

2.	3.	6.	18.	54.	5.	10.	15.	30.	90.	270.
4.	9.	12.	36.	108.	25.	20.	45.	60.	180.	540.
8.	27.	24.	72.	216.		40.	135.	120.	360.	1080.
16.		48.	144.	428.		80.		240.	720.	2160.

50.	75.	150.	450.	1350.
100.	225.	300.	900.	2700.
200.	675.	600.	1800.	5400.
400.		1200.	3600.	10800.
21600				

Or les 3 ſimples égaux 3.3.3 ne peuvent me donner que les trois différens diviſeurs 3. 9 & 27; car leur produit pris 2 à 2, eſt toujours le même diviſeur 9, & pris 3 à 3, il eſt le diviſeur 27; & ces trois diviſeurs multiplians les 5 que je viens de trouver, me donneront quinze autres diviſeurs 3.9.27.6.12.24, &c. tels qu'on les voit ici; ainſi ajoutant les cinq premiers à ces quinze, j'ai déja vingt diviſeurs différens.

Or les deux ſimples égaux 5.5 ne peuvent me donner que deux différens diviſeurs 5 & 25; & chacun de ceux-ci multipliant les vingt précédens, nous donnera vingt autres diviſeurs; ainſi les deux nous en donneront quarante, leſquels ajoutés aux vingt précédens ſont ſoixante, auſquels ajoutant enfin pour dernier diviſeur le nombre 21600, qui peut ſe diviſer lui-même, nous aurons en tout les ſoixante-un diviſeurs différens que l'on voit ici; & ainſi des autres.

PROBLEME TROISIE'ME.

Trouver combien un nombre peut avoir de diviſeurs.

Si les diviſeurs ſimples de ce nombre ſont tous inégaux, il faut négliger l'unité & examiner enſuite combien les autres diviſeurs ſimples peuvent faire de produits différens pris deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. après quoi, ajouter au nombre qu'on trouvera, celui des diviſeurs ſimples, en y comprenant l'unité; & la ſomme totale ſera le nombre des différens diviſeurs que le nombre propoſé peut avoir.

Ainſi ſi l'on veut ſavoir combien le nombre 2310 peut avoir de diviſeurs différens, je cherche, comme ci-deſſus, ſes diviſeurs ſimples 1.2.3.5.7.11; & comme ils ſont tous inégaux, je néglige le premier 1, & j'examine combien de produits différens peuvent

être faits par les cinq autres 2.3.5.7.11 pris deux à deux, & je vois que deux, multiplié par les quatre ſuivans, peut faire quatre produits différens 2X3, 2X5, 2X7, 2X11; de même 3 multiplié par les trois ſuivans, peut faire trois produits différens 3X5, 3X7, 3X11; de même 5 multiplié par les deux ſuivans, peut faire deux produits différens 5X7, 5X11; enfin, 7 avec 11 ne peut faire qu'un produit 7X11; ajoutant donc enſemble les nombres 4.3.2.1 de ces différens produits, la ſomme totale 10 me fait voir que les cinq diviſeurs ſimples 2.3.5.7.11, pris deux à deux, peuvent donner dix différens diviſeurs.

Et prenant ces diviſeurs ſimples trois à trois, je trouve qu'ils peuvent donner dix autres différens diviſeurs; & les prenant quatre à quatre, je trouve qu'ils peuvent en donner 5 autres; & enfin cinq à cinq, ils peuvent en donner 1; ainſi ajoutant enſemble les nombres 10.10.5.1 des différens diviſeurs que les cinq diviſeurs ſimples peuvent donner, leur ſomme eſt 26, à laquelle ajoutant le nombre cinq des cinq diviſeurs ſimples, puis l'unité que j'avois négligé, le total 32 eſt le nombre des différens diviſeurs du nombre propoſé.

La difficulté conſiſte à trouver le nombre des différens produits que les diviſeurs ſimples peuvent donner pris deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. mais comme ceci dépend des combinaiſons dont nous traiterons dans la Partie ſuivante de cet Ouvrage, nous ne nous y arrêterons pas pour le préſent.

Et ſi parmi les diviſeurs ſimples du nombre propoſé, il s'en trouvoit d'égaux, tels que ſont les diviſeurs 1.2.2.2.2.3.3.3.5.5 du nombre 21600, on examineroit d'abord que les quatre égaux 2.2.2.2 ne peuvent donner que quatre différens diviſeurs, de quelque maniere qu'on les prenne, ainſi qu'on a vû ci-deſſus, leſquels quatre diviſeurs avec l'unité font cinq; enſuite on examineroit que les trois égaux 3.3.3 ne peuvent donner que trois différens diviſeurs, & que ces trois multipliant les cinq précédens, en donneroient quinze autres; & ces quinze avec les cinq précédens feroient vingt diviſeurs; enfin on trouveroit que les deux égaux 5.5 ne peuvent donner que deux différens diviſeurs, leſquels multipliant les vingt précédens en donneroient quarante autres, & ces quarante avec les vingt précédens feroient ſoixante diviſeurs; & prenant enfin pour dernier diviſeur 21600, qui peut ſe diviſer lui-même, on auroit en tout ſoixante-un diviſeurs; & par conſéquent on verroit par-là que ce nombre peut avoir ſoixante-

un

un diviſeurs différens que l'on chercheroit après, ainſi que nous avons fait ci-deſſus, ſi l'on en avoit beſoin.

Ceci ſera mieux éclairci lorſque nous traiterons des combinaiſons.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Trouver tous les diviſeurs d'une grandeur littérale.

Par rapport aux grandeurs littérales, tout diviſeur qui n'a qu'une ſeule lettre, & tout binome, trinome, &c. dont les termes n'ont chacun qu'une lettre, s'appellent des diviſeurs ſimples.

Soit donc la grandeur $aabc+abbc+abcc$ dont on demande les diviſeurs, j'en cherche d'abord les diviſeurs ſimples en la diviſant par a, parce que a eſt dans chacun de ſes termes; & comme a ne ſe trouve plus dans chaque terme du quotient, je diviſe le quotient par b; & comme b ne ſe trouve plus dans tous les termes du ſecond quotient, je diviſe ce ſecond quotient par c, & le dernier quotient eſt $a+b+c$ qui eſt un diviſeur ſimple, lequel ſe diviſant lui-même donne l'unité; ainſi tous les diviſeurs ſimples de la grandeur propoſée, ſont 1. a, b, c, $a+b+c$.

a	b	c	$a+b+c$	1
$aabc+abbc+abcc$	$abc+bbc+bcc$	$ac+bc+cc$	$a+b+c$	

Comme tous ces diviſeurs ſimples ſont inégaux, j'en fais les produits deux à deux, trois à trois & quatre à quatre, & je trouve

ab.	abc.	1.
ac.	$aab+abb+abc$.	a.
$aa+ab+ac$.	$aac+abc+acc$.	b.
bc.	$abc+bbc+bcc$.	c.
$ba+bb+bc$	$aabc+abbc+abcc$.	$a+b+c$.
$ca+cb+cc$		

onze différens diviſeurs, auſquels ajoutant les cinq ſimples 1. a, b, c, $a+b+c$, la ſomme totale des diviſeurs eſt les 16 qu'on voit ici.

La méthode eſt la même que pour les grandeurs numériques, ainſi il ſeroit inutile d'en parler plus long-tems.

PROBLEME CINQUIE'ME.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs.

Nous avons déja enſeigné dans notre Arithmétique la maniere de réſoudre ce problême; mais pour en montrer la théorie & en faire l'application aux principes que nous venons d'établir, ſuppoſons que les deux nombres ſoient 24 & 8, le plus grand diviſeur

de ces deux nombres ne peut pas être plus grand que 8, ainſi je prens 8 pour diviſeur; & diviſant 24 par 8, je trouve que la diviſion eſt exacte; & comme 8 ſe diviſe lui-même, & qu'il ne ſauroit avoir un plus grand diviſeur, 8 eſt par conſéquent le plus grand diviſeur des deux nombres propoſés 24 & 8.

Mais ſi les nombres propoſés ſont tels que le petit nombre ne diviſe pas le plus grand, tels que ſont les nombres 18 & 8, je dis toujours le plus grand diviſeur de ces deux nombres ne ſauroit excéder le petit 8, ainſi je diviſe par 8 & je trouve un reſte 2; le plus grand diviſeur que je cherche eſt donc moindre que 8, & comme la diviſion me fait voir que le grand nombre 18 eſt égal à deux fois 8, plus 2, ou à 8+8+2, il faut donc que le grand diviſeur que je cherche diviſe exactement 8+8+2, auquel cas il eſt sûr qu'il diviſera exactement les deux nombres propoſés; mais l'expreſſion 8+8+2 me fait voir que ce diviſeur ne peut pas être plus grand que le reſte 2 de la diviſion; car autrement il pourroit bien diviſer les deux premieres parties 8 & 8, mais il ne diviſeroit pas la troiſiéme 2; ainſi je prens le reſte 2 de la premiere, & diviſant le petit nombre 8 par ce reſte, je trouve qu'il diviſe exactement 8, & par conſéquent il diviſera exactement 18=8+8+2; ainſi 2 eſt le plus grand diviſeur commun de ces deux nombres.

Et ſi les nombres ſont tels que le premier reſte ne diviſe pas exactement le petit nombre, ainſi que ſont les nombres 27 & 21, je dis toujours: puiſque le plus grand diviſeur ne peut ſurpaſſer 21, je diviſe 27 par 21, & le reſte eſt 6, ainſi 27=21+6; il faut donc que le diviſeur que je cherche ſoit plus petit que le petit nombre 21, & qu'il diviſe exactement, non-ſeulement 21, mais encore le grand 21+6, & pour cela il ne doit pas être plus grand que le reſte 6; car s'il étoit plus grand, il diviſeroit bien la premiere partie 21 du grand, mais il ne diviſeroit pas l'autre partie 6: je prens donc le reſte 6, & diviſant le petit nombre 21 par 6, je trouve un ſecond reſte 3, ainſi 21=3×6+3 ou 21=6+6+6+3, & par conſéquent le grand nombre 21+6=6+6+6+3+6; le diviſeur que je cherche eſt donc encore moindre que 6, & il doit être de telle nature, qu'il diviſe exactement les deux nombres 6+6+6+3=21 & 6+6+6+3+6=27; & pour cela, je vois bien qu'il ne ſauroit être plus grand que 3, puiſqu'autrement il pourroit bien diviſer les parties 6, mais il ne diviſeroit pas la partie 3 qui ſe trouve dans ces expreſſions; je prens donc ce ſecond reſte 3, diviſant le premier reſte 6 par 3, je trouve que la diviſion eſt exacte; ainſi comme 3 divi-

ſe exactement 6, & qu'il ſe diviſe exactement lui-même, il diviſera ſans doute 6+6+6+3=21 & 6+6+6+3+6=27 : donc 3 ſera le plus grand diviſeur commun de ces deux grandeurs.

Et ſi ce ſecond reſte n'avoit pas diviſé exactement, j'aurois continué de même en diviſant ce ſecond reſte par le troiſiéme, & celui-ci par le quatriéme s'il y en avoit eu ; & ainſi de ſuite juſqu'à ce que j'euſſe trouvé un diviſeur exact qui auroit été le plus grand diviſeur cherché.

Et ſi en allant ainſi de reſte en reſte, on trouvoit enfin un dernier reſte qui fût 1, ce ſeroit une marque que les deux nombres n'auroient point de diviſeurs communs differens de l'unité.

COROLLAIRES.

Il ſuit de-là que ſi deux nombres ont quelqu'autre diviſeur commun outre leur plus grand diviſeur, ce diviſeur commun ſera moindre que leur plus grand diviſeur commun, & le diviſera.

Car ſuppoſons que les deux nombres ſoient 104 & 76, que leur plus grand diviſeur commun ſoit 4, & qu'outre cela ils aïent un autre diviſeur qui leur ſoit commun & que j'appelle z ; je diviſe le grand nombre 104 par le petit 76, le quotient eſt 1 & le reſte eſt 28 : donc 104=76+28 ; & comme z diviſe exactement 104 & 76, il doit auſſi diviſer 76+28, c'eſt-à-dire qu'il doit auſſi diviſer 28 ; car autrement il ne diviſeroit pas 104.

Je diviſe donc le petit nombre 76 par le reſte 28, & le quotient eſt 2 & il reſte 20, ainſi 76=2X28+20 ; & comme z diviſe 28, il doit auſſi diviſer ſon multiple 2X28, & il doit auſſi diviſer 20, car ſans cela il ne diviſeroit pas 76 ; je diviſe encore le premier reſte 28 par 20, & le quotient eſt 1 & il reſte 8, donc 28=20+8 ; & comme z diviſe 28 & 20, il doit auſſi diviſer 8, car autrement il ne diviſeroit pas 28 ; je diviſe encore le ſecond reſte 20 par le troiſiéme 8, le quotient eſt 2 & il reſte 4, donc 20=2X8+4 ; & comme z diviſe 8, il doit auſſi diviſer ſon multiple 2X8 & en même-tems le reſte 4, car autrement il ne diviſeroit pas 20 ; or le reſte 4 eſt le plus grand diviſeur commun des deux nombres 104 & 76 : donc z qui eſt auſſi un diviſeur commun de ces deux nombres diviſe 4, mais 4 ne peut être diviſé que par 2 : donc z eſt 2, moindre que 4.

PROBLEME SIXIE'ME.

Trouver le plus grand diviſeur commun de deux grandeurs littérales.

Pour trouver le plus grand diviſeur de deux grandeurs littéra-

les, il faut prendre tous les diviſeurs ſimples de l'une & de l'autre; enſuite en faire tous les produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. & prendre pour diviſeur des deux grandeurs le plus grand de ces produits qui pourra les diviſer exactement.

Soient, par exemple, les deux grandeurs *abdf* & *acdb*, je prens les diviſeurs ſimples de la premiere qui ſont *a*, *b*, *d*, *f*, j'en fais les produits *ab*, *ad*, *af*, *bd*, *bf*, *df*; *abd*, *abf*, *adf*, *bdf* & *abdf*; je prens de même les diviſeurs ſimples de la ſeconde qui ſont *a*, *c*, *d*, *b*, j'en fais les produits *ac*, *ad*, *ab*, *cd*, *cb*, *db*, *acd*, *acb*, *adb*, *cdb*, *acdb*; cela fait, je cherche parmi ces diviſeurs le plus grand qui ſoit commun à l'une & à l'autre grandeur, & je trouve que ce diviſeur eſt *abd*, qui par conſéquent eſt leur plus grand diviſeur commun.

De même ſoient les deux grandeurs *acf* + *acq* + *ach* & *acp* + *amc* + *acl*, je prens les diviſeurs ſimples de la premiere *a*, *c*, *f* + *q* + *h*, & leurs produits *ac*, *af* + *aq* + *ah*, *cf* + *cq* + *ch*; je prens de même les diviſeurs ſimples de la ſeconde *a*, *c*, *p* + *m* + *l*, & leurs produits *ac*, *ap* + *am* + *al*, *cp* + *cm* + *cl*; & cherchant parmi ces diviſeurs le plus grand qui ſoit commun aux deux grandeurs, je trouve que c'eſt *ac*, qui par conſequent eſt leur plus grand diviſeur commun; & ainſi des autres. Au reſte, pour peu qu'on ait d'uſage du calcul littéral, l'inſpection ſeule vous fait ſouvent découvrir le diviſeur que l'on cherche, ſans être obligé d'en venir à chercher tous les diviſeurs ſimples & leurs produits.

PROBLEME SEPTIE'ME.

Trouver le plus grand diviſeur commun de trois grandeurs.

Soient les trois nombres 72, 48 & 64, je prens d'abord le plus grand diviſeur commun des deux premiers 72 & 48, & ce diviſeur eſt 24; mais comme 24 ne diviſe pas 64, il faut néceſſairement que le diviſeur que je cherche ſoit moindre que 24, attendu que celui-ci eſt le plus grand qui puiſſe être commun aux deux premiers nombres; je cherche donc le plus grand diviſeur commun de 24 & du troiſiéme nombre 64, & je trouve que ce diviſeur eſt 8, lequel doit par conſéquent être le plus grand diviſeur commun des trois nombres propoſés; car puiſque 8 diviſe 24, & que 24 eſt le plus grand diviſeur commun des deux premiers nombres, par conſéquent 8 diviſera les deux premiers nombres; & comme 8 eſt le plus grand qui diviſe le dernier nombre 64 & le diviſeur commun 24 des deux premiers, il ſera néceſſairement le plus grand

diviſeur commun des trois ; car ſi on en pouvoit trouver un plus grand, il faudroit qu'il fût entre 24 & 8, ce qui ne ſe peut pas, puiſque dès-lors il ne ſeroit plus commun à 24 & 64, attendu que 8 en eſt le plus grand diviſeur commun, ainſi il ne diviſeroit pas 24, & cela étant il ne pourroit pas non plus diviſer les deux premiers nombres ; car ceux-ci ſont des multiples de 24.

On trouveroit, de la même façon, le plus grand diviſeur commun de quatre nombres, de cinq, de ſix, &c.

PROBLEME HUITIE'ME.

Trouver le plus petit nombre que deux autres nombres puiſſent diviſer.

Si les deux nombres ſont ſimples ou premiers entr'eux, il eſt sûr que leur produit ſera le plus petit nombre que l'un & l'autre puiſſent diviſer, ainſi qu'on a vû ci-deſſus.

Mais ſi les deux nombres ſont compoſés entr'eux, comme 48 & 60, je cherche leur plus grand diviſeur commun qui eſt 12 ; & diviſant l'un & l'autre par 12, les deux quotiens 4 & 5 ſont les moindres termes auſquels 48 & 60 puiſſent être réduits, & ſont par conſéquent premiers entr'eux : or le plus petit nombre que 4 & 5 puiſſent diviſer eſt leur produit 20 ; ainſi multipliant 4 & 5 & leur produit 20, chacun par 12, nous aurons 4X12, 5X12 & 20X12 ; & comme 20X12 n'eſt pas plus grand par rapport à 4X12 & 5X12, que 20 par rapport à 4 & 5, il s'enſuit que 20X12 eſt encore le moindre nombre que 4X12 & 5X12 puiſſent diviſer ; mais 4X12=48 & 5X12=60 : donc 20X12 ou 240 eſt le moindre nombre que 48 & 60 puiſſent diviſer.

Que ſi on veut une preuve de ceci, tirée des principes précédens, ſuppoſons que le plus petit nombre que 48 & 60 puiſſent diviſer ſoit x, ce nombre quel qu'il ſoit, doit être un multiple de 60 qui puiſſe être diviſé par 48 ; & comme 60 & 48 ſont égaux, l'un a 5X12 & l'autre 4X12 ; il faut donc que ce nombre ſoit multiple de 5X12, & qu'il puiſſe être diviſé par 4X12 : or ſuppoſons que le nombre qui multiplie 5X12, pour faire ſon multiple ſoit z, donc ce multiple ſera $5z$X12 ; & comme $5=4+1$, mettant $4+1$ au lieu de 5 dans ce multiple, nous aurons $4z$X12+$1z$X12 ; & comme 4X12 diviſe le premier terme $4z$X12, il faut auſſi qu'il diviſe le ſecond terme $1z$X12 ; car autrement il ne diviſeroit pas le multiple $4z$X12+$1z$X12 tout entier : or il ne peut diviſer ce ſe-

cond terme qu'en ſuppoſant $z=4$, puiſqu'il faut en même-tems que le multiple $4z\times12+12\times12$ ſoit le moindre que 4×12 puiſſe diviſer : donc ſi $z=4$, $4z$ ſera égal à 16, & $4z+12=5z=20$, & $5z\times12=20\times12=240$, ainſi 240 eſt le moindre terme que 48 & 60 puiſſent diviſer.

La régle eſt donc, lorſqu'il s'agit de chercher le moindre nombre que deux nombres compoſés entr'eux puiſſent diviſer, de réduire ces nombres à leurs moindres termes en les diviſant par leur plus grand diviſeur commun, enſuite de multiplier leurs moindres termes l'un par l'autre ; & de multiplier enfin leur produit par le plus grand diviſeur commun des nombres propoſés.

Ainſi pour trouver le moindre nombre que 50 & 70 puiſſent diviſer, je réduis 50 & 70 à leurs expoſans 5 & 7, en diviſant l'un & l'autre par leur plus grand diviſeur commun 10, je fais le produit 35 de 5 & 7 ; & multipliant ce produit par 10, j'ai 350 qui eſt le moindre nombre que 50 & 70 puiſſent diviſer.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Trouver le moindre nombre que trois autres nombres puiſſent diviſer.

Si les trois nombres ſont ſimples, le produit des trois nombres eſt le nombre cherché ; mais ſi les trois nombres ne ſont pas tous trois ſimples ou premiers entr'eux, & qu'il s'en trouve au moins deux qui ſoient compoſés entr'eux, alors il faut chercher le moindre nombre qu'ils puiſſent diviſer, puis chercher le moindre que celui-ci & le dernier puiſſent diviſer.

Soient, par exemple, les nombres 3 . 4 & 6, dont les deux derniers 4 & 6 ſont compoſés entr'eux ; comme les deux premiers ſont ſimples, leur produit 12 eſt le moindre nombre que l'un & l'autre puiſſent diviſer ; ainſi il ne s'agit plus que de trouver le moindre nombre que 12 & le dernier nombre 6 puiſſent diviſer ; pour cela je réduis 12 & 6 à leurs expoſans 2 & 1, en les diviſant l'un & l'autre par leur plus grand diviſeur commun 6 ; je fais le produit 2 des expoſans 2 & 1, & multipliant ce produit par le plus grand diviſeur commun 6, le produit 12 eſt le moindre nombre que les trois propoſés 3 . 4 . 6 puiſſent diviſer.

Et ſi l'on propoſoit quatre nombres 3 . 4 . 6 & 9, je prendrois le moindre nombre 12 que les trois premiers puiſſent diviſer ; & pour trouver enſuite le moindre nombre que 12 & le dernier nombre puiſſent diviſer, je réduis 12 & 9 à leurs expoſans 4 & 3, en les

diviſant par leur plus grand diviſeur commun 3 ; enſuite je fais le produit 12 des expoſans 4 & 3, & multipliant ce produit par le plus grand diviſeur commun 3, j'ai 36 qui eſt le moindre nombre que 3.4.6 & 9 puiſſent diviſer.

Ceci eſt très-commode lorſqu'il s'agit de réduire pluſieurs fractions en même dénomination ; car l'on trouve par ce moïen un dénominateur commun moindre que celui qu'on trouve par la régle qu'on enſeigne ordinairement, & qu'on a vû dans notre Arithmétique, lorſque nous avons traité des fractions ; & par-là les calculs deviennent moins embarraſſans.

Soient, par les exemples, les fractions $\frac{1}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{1}{6}$ ſelon la régle ordinaire ; il faut multiplier tous les dénominateurs enſemble, & le produit 360 eſt le dénominateur commun ; enſuite il faut multiplier chaque numérateur par tous les dénominateurs ſimples des autres, & les produits deviennent les numérateurs ; ainſi ces fractions ſe réduiſent à $\frac{240.270.288.300}{360}$; mais ſi je veux avoir un dénominateur moindre, qui par conſéquent rendra auſſi les numérateurs moindres, je prens le moindre nombre que les quatre dénominateurs puiſſent diviſer ; & comme les trois premiers ſont premiers entr'eux, leur produit 60 eſt le moindre nombre qu'ils puiſſent diviſer, ainſi je cherche le moindre nombre que 60 & le dernier dénominateur 6 puiſſent diviſer ; & pour cela je les réduis à leurs expoſans 10 & 1, en les diviſant par leur plus grand diviſeur commun 6 ; enſuite je fais le produit 10 des expoſans 10 & 1, & multipliant ce produit par le plus grand diviſeur commun 6, j'ai 60 qui eſt le moindre nombre que les quatre dénominateurs 3.4.5 & 6 puiſſent diviſer ; ainſi je prens pour dénominateur commun 60, & pour avoir les numérateurs, je dis : La premiere fraction eſt $\frac{1}{3}$, je prens donc les $\frac{1}{3}$ de 60 qui eſt 40, & j'écris $\frac{40}{60}$; de même la ſeconde eſt $\frac{3}{4}$, je prens les trois quarts de 60 qui ſont 45, & j'écris $\frac{45}{60}$; de même la troiſiéme eſt $\frac{4}{5}$, je prens les quatre cinquiémes de 60 qui ſont 48, & j'écris $\frac{48}{60}$; enfin la derniere eſt $\frac{1}{6}$, je prens les cinq ſixiémes de 60 qui ſont 50, & j'écris $\frac{50}{60}$, & mes quatre fractions réduites ſont $\frac{40.45.48.50}{60}$; & ces expreſſions ſont beaucoup moindres que les précédentes, & ainſi des autres.

QUESTION.

Il s'eſt fait cette année dans une Ville trois cérémonies différentes ; la premiere doit recommencer de quatre en quatre ans ; la ſe-

conde de ſix en ſix ans, & la troiſiéme de huit en huit ans; & l'on demande en quelle année elles ſe feront encore toutes les trois enſemble.

Je prens le moindre nombre que 4. 6 & 8 puiſſent diviſer, & pour cela je prens d'abord 12, qui eſt le moindre nombre qui puiſſe être diviſé par 4 & 6; enſuite je prens le moindre nombre que 12 & 8 diviſent, & trouvant que ce nombre eſt 24, je dis: Que ces trois cérémonies au bout de 24 ans recommenceront toutes les trois la même année; car diviſant 24 par les 4 années de la premiere cérémonie, le quotient 6 me fait voir qu'on l'aura faite 6 fois dans l'eſpace de ces 24 années & qu'elle doit recommencer la 25e année; & diviſant de même 24 par les 6 années de la ſeconde année, le quotient 4 me fait voir qu'on l'aura faite 4 fois, & qu'elle doit recommencer à la 25e année; enfin diviſant 24 par les 8 années de la troiſiéme, je vois par le quotient 3 qu'on l'aura faite trois fois, & qu'elle doit recommencer auſſi à la 25e année; de ſorte que ces trois cérémonies ſe feront toutes trois cette année, & il en ſera de même la 49e, la 73e la 97e, &c. en augmentant toujours de 24.

Fin de la quatriéme Partie.

L'ARITHMETIQUE

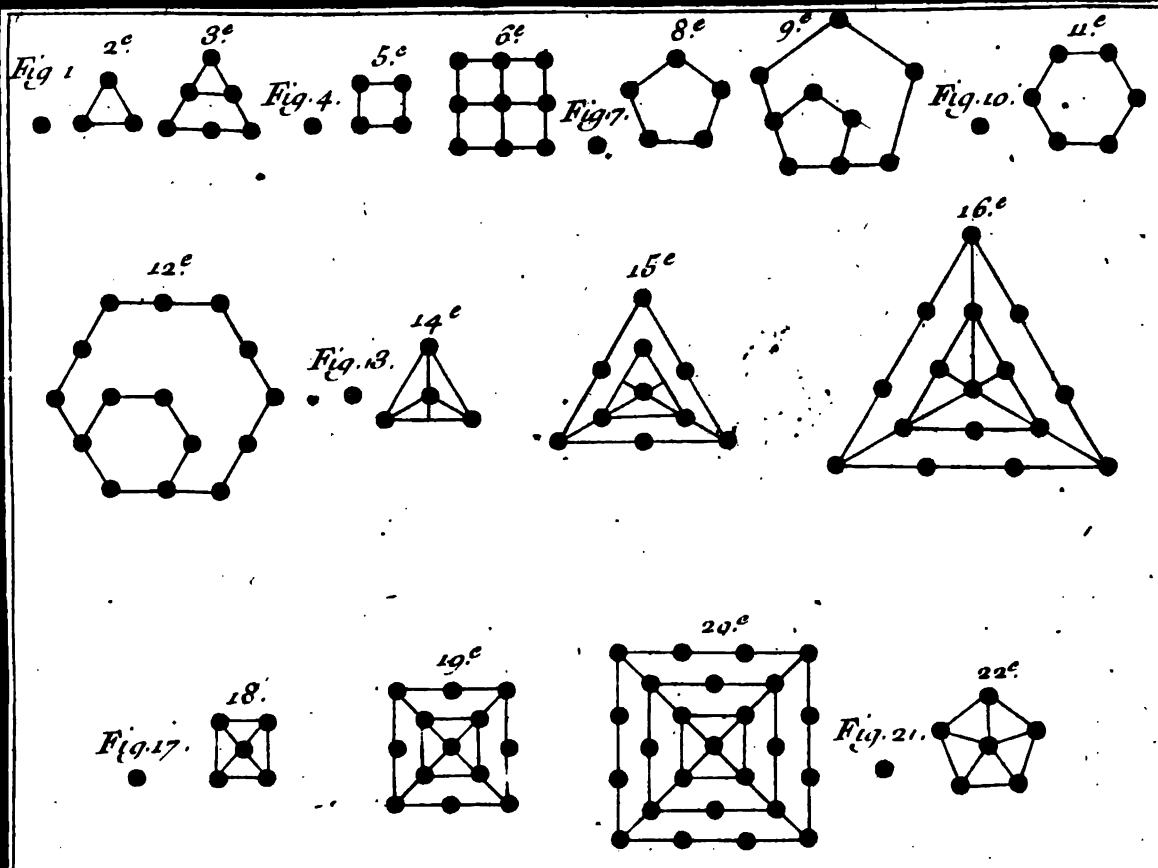


Table des Puissances

1										
a	b									
a^2	$2ab$	bb								
a^3	$3aab$	$3abb$	$b3$							
a^4	$4a^3b$	$6aabb$	$4ab^3$	$b4$						
a^5	$5a^4b$	$10a^3bb$	$10aab^3$	$5ab^4$	b^5					
a^6	$6a^5b$	$15a^4bb$	$20a^3b^3$	$15aab^4$	$6ab^5$	b^6				
a^7	$7a^6b$	$21a^5bb$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21aab^5$	$7ab^6$	b^7			
a^8	$8a^7b$	$28a^6bb$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28aab^6$	$8ab^7$	b^8		
a^9	$9a^8b$	$36a^7bb$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36aab^7$	$9ab^8$	b^9	
a^{10}	$10a^9b$	$45a^8bb$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45aab^8$	$10ab^9$	b^{10}

L'ARITHMETIQUE DES GÉOMÉTRES.

CINQUIE'ME ET DERNIERE PARTIE.

Qui traite des nombres de différens Ordres, qu'on appelle autrement *Triangle Arithmétique ;* des Combinaiſons & des Permutations ; des nombres Polygones & des Polygones centraux ; de l'Arithmétique des infinis ; des Logarithmes & des Fractions décimales.

Des Nombres de différens Ordres.

I. SI L'ON prend une ſuite d'unités 1, 1, 1, 1, &c. telles qu'on les voit ici dans le premier rang perpendiculaire à gauche de cette Table ; & qu'enſuite on prenne la premiere unité, puis la ſomme des deux premieres, la ſomme des trois premieres, la ſomme des quatre premieres, &c. on aura une autre ſuite de nombres, qui ſont les nombres naturels, 1, 2, 3, 4, &c. & qu'on appellera *nombres du ſecond ordre ;* & la ſuite des unités s'appellera nombre du premier ordre.

De même, si on prend le premier nombre du second rang perpendiculaire, puis la somme des deux premiers, la somme des trois premiers, la somme des quatre premiers, &c. on aura une nouvelle suite 1, 3, 6, 10, &c. qu'on appellera *nombres du troisiéme ordre*, autrement dits, *nombres triangulaires*.

Si l'on prend de même le premier nombre du troisiéme ordre, la somme des deux premiers, celle des trois premiers, &c. on aura une quatriéme suite 1, 4, 10, 20, &c. qu'on appellera *nombres du quatriéme ordre*, autrement dits, *pyramidaux*.

Et l'on aura de la même façon, les nombres du cinquiéme ordre, du sixiéme ordre, du septiéme ordre, & ainsi de suite à l'infini.

Si l'on prend la Table des puissances, & qu'on ne fasse attentiõ qu'aux coefficiens, c'est-à-dire, aux chiffres qui précédent les lettres dans chaque cellule, on trouvera que le premier rang perpendiculaire de cette Table contient les nombres du premier ordre, ou les unités; que le second rang perpendiculaire contient les nombres du second ordre ou les nombres naturels; que le troisiéme rang contient les nombres du troisiéme ordre, & ainsi des autres rangs; & comme cette Table des puissances est faite en forme de triangle, c'est peut-être ce qui a donné lieu à Monsieur Paschal de donner le nom de

1e ordre.	2e ord.	3e ord.	4e ord.	5e ord.	6e ordre.
1.	1.	1.	1.	1.	1.
1.	2.	3.	4.	5.	6.
1.	3.	6.	10.	15.	21.
1.	4.	10.	20.	35.	56.
1.	5.	15.	35.	70.	126.
1.	6.	21.	56.	126.	252.
1.	7.	28.	84.	210.	462.
1.	8.	36.	120.	330.	792.
1.	9.	45.	165.	495.	1287.
1.	10.	55.	220.	715.	2002.

triangle Arithmétique au Traité qu'il a fait touchant ces nombres de différens ordres. Quoi qu'il en ſoit, ce ſavant Auteur en développe toutes les propriétés, & fait voir qu'ils ſont d'une très-grande utilité dans pluſieurs queſtions d'Arithmétique ; c'eſt ce qu'on verra mieux dans la ſuite de cet Ouvrage, & ſur tout dans les combinaiſons dont nous allons commencer à parler.

Des Combinaiſons.

II. A prendre le mot dans ſa véritable ſignification, *combiner* ne ſignifie autre choſe que prendre pluſieurs choſes deux à deux ; mais l'uſage, qui eſt le maître des Langues, a voulu qu'on étendît ce terme non-ſeulement aux aſſemblages qu'on peut faire de pluſieurs choſes deux à deux, mais encore à tous ceux qu'on en peut faire trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, &c.

On exprime ordinairement les grandeurs que l'on combine par les lettres a, b, c, d, &c. & leurs aſſemblages ſe marquent de même que les produits Algébriques ; ainſi ab marque la combinaiſon de la grandeur a avec b ; abc la combinaiſon des trois a, b, c ; & ainſi des autres.

Il y a deux eſpéces principales de combinaiſons qu'il faut bien diſtinguer ; la premiere eſt celle où l'on ne cherche que les différens aſſemblages que pluſieurs choſes peuvent faire, ſans avoir égard à la place que chacune de ces choſes occupe ou peut occuper dans les aſſemblages où elles ſe trouvent ; ainſi l'aſſemblage ab des deux grandeurs a & b, n'eſt pas différent de l'aſſemblage ba, & ces deux ne paſſent que pour un ſeul.

La ſeconde eſt celle où l'on a égard aux différentes places que les grandeurs peuvent occuper dans les aſſemblages qu'elles forment ; ainſi ab & ba, dans cette eſpéce, forment deux aſſemblages ; de même $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, forment ſix aſſemblages, au lieu que dans la premiere eſpéce ces ſix aſſemblages ne paſſeroient que pour un ſeul ; & ainſi des autres.

Selon que les queſtions ſont propoſées, on connoît à laquelle de ces deux eſpéces elles doivent ſe rapporter ; ſi l'on demande, par exemple, le nombre des conjonctions poſſibles des ſept Planétes deux à deux, trois à trois, &c. appellant le Soleil a, la Lune b, Jupiter c, &c. on voit bien que ab qui eſt la rencontre du Soleil & de la Lune, n'eſt pas différente de ba qui eſt la rencontre de la Lune & du Soleil ; ainſi la queſtion appartient à la premiere eſpéce

de combinaiſon ; mais ſi on demande en combien de manieres différentes trois perſonnes peuvent ſe ranger à table, appellant ces perſonnes *a*, *b*, *c*, on voit bien que les ſix combinaiſons *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* doivent être comptées, puiſque les différens arrangemens de ces trois perſonnes ne peuvent ſe faire que par les différentes places qu'elles occuperont les unes à l'égard des autres.

La premiere eſpéce de combinaiſons s'appelle *combinaiſon ſimple*, ou ſimplement *combinaiſon*, & la ſeconde s'appelle *permutation* ou *changement d'ordre* ; comme elles ont chacune leurs régles particulieres, nous les traiterons chacune à part, & nous commencerons par les combinaiſons ſimples.

Des Combinaiſons ſimples.

III. Les combinaiſons ſimples ont trois différens cas ; le premier eſt lorſqu'on combine pluſieurs choſes toutes différentes entr'elles, & qu'il ne faut pas qu'une grandeur ſe combine avec elle-même, ni qu'elle ſe trouve répétée dans un même aſſemblage ; le ſecond, lorſqu'on peut combiner chaque grandeur avec elle-même, autant de fois que l'eſpéce des aſſemblages change, c'eſt-à-dire, que lorſqu'on prend les grandeurs deux à deux ; trois à trois, &c. la grandeur *a*, par exemple, peut ſe combiner avec elle-même pour faire l'aſſemblage *aa* ; enſuite quand on les prend trois à trois, la grandeur *a* peut encore ſe combiner avec *aa* pour faire l'aſſemblage *aaa*, & ainſi des autres ; & en ce cas la même grandeur peut ſe trouver répétée dans les aſſemblages où elle ſe trouve mêlée avec les autres.

Enfin, le troiſiéme eſt lorſqu'on combine pluſieurs grandeurs, dont quelques-unes ſont égales entr'elles.

Premier cas des Combinaiſons ſimples.

IV. Pour marcher avec ordre & ſans confuſion dans une matiere où il eſt facile de ſe tromper ſi on n'y prend garde de bien près, nous examinerons d'abord combien de fois 2, 3, 4, 5, 6 grandeurs, &c. peuvent être combinées en les prenant deux à deux ; enſuite combien de fois 3, 4, 5, 6, 7 grandeurs, &c. peuvent être combinées en les prenant trois à trois ; puis combien de fois 4, 5, 6 grandeurs, &c. peuvent être combinées en les prenant quatre à quatre ; & ainſi de ſuite en les prenant cinq à cinq, ſix à ſix, &c.

après quoi, rassemblant le nombre de ces divers assemblages, il nous sera facile d'en tirer une régle générale pour savoir combien de fois 2, 3, 4, 5, 6 grandeurs, &c. peuvent être combinées, en les prenant de toutes les façons qu'on les peut prendre.

En premier lieu donc, deux grandeurs *a* & *b* ne peuvent souffrir qu'une seule combinaison *ab*; car *ba* n'est pas différent de *ab*, ainsi que nous avons dit; de même trois grandeurs *a*, *b*, *c* prises deux à deux, ne peuvent souffrir que trois combinaisons *ab*, *ac*, *bc*; quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, prises deux à deux, n'en peuvent souffrir que six *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*; cinq prises deux à deux, n'en peuvent souffrir que dix *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *bc*, *bd*, *be*, *cd*, *ce*, *de*; de même six grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* n'en peuvent souffrir que quinze prises deux à deux, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *cd*, *ce*, *cf*, *de*, *df*, *ef*, & ainsi de suite; de sorte qu'on trouve que les combinaisons que peuvent souffrir 2, 3, 4, 5, 6 grandeurs, &c. prises deux à deux, sont exprimées par les nombres 1. 3. 6. 10. 15, &c. qui sont les nombres du troisiéme ordre.

En second lieu, trois grandeurs *a*, *b*, *c*, prises trois à trois, donnent l'unique combinaison *abc*; quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, prises trois à trois, en donnent quatre *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*; cinq grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, prises trois à trois, en donnent dix *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*; six grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, prises trois à trois, en donnent vingt *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *acd*, *ace*, *acf*, *ade*, *adf*, *aef*, *bcd*, *bce*, *bcf*, *bde*, *bdf*, *bef*, *cde*, *cdf*, *cef*, *def*; de sorte qu'en faisant la même chose pour 7, 8, 9 grandeurs, &c. on trouvera que les combinaisons que peuvent donner 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 grandeurs, &c. prises trois à trois, sont exprimées par les nombres 1. 4. 10. 20. 35, &c. qui sont les nombres du quatriéme ordre.

En troisiéme lieu, quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, prises quatre à quatre, ne donnent qu'une seule combinaison *abcd*; cinq grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, prises quatre à quatre n'en donnent que cinq *abcd*, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*; six grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, prises quatre à quatre, en donnent quinze *abcd*, *abce*, *abcf*, *abde*, *abdf*, *abef*, *acde*, *acdf*, *acef*, *adef*, *bcde*, *bcdf*, *bcef*, *bdef*, *cdef*, & ainsi de suite; de sorte que les combinaisons que peuvent donner 4, 5, 6, 7 grandeurs, &c. prises quatre à quatre, sont exprimées par les nombres 1, 5, 15, 35, &c. qui sont les nombres du cinquiéme ordre.

Et on trouvera de même que les nombres du sixiéme ordre 1. 6. 21. 56. 126, &c. expriment les combinaisons que peuvent don-

ner 5, 6, 7, 8 grandeurs, &c. priſes cinq à cinq; que les nombres du ſeptiéme ordre 1, 7, 28, 84, expriment les combinaiſons que peuvent donner 6, 7, 8 grandeurs, &c. priſes ſix à ſix; & ainſi des autres.

nombre des choſes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
priſes 2 à 2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
priſes 3 à 3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220		
priſes 4 à 4	1	5	15	35	70	126	210	330	495			
priſes 5 à 5	1	6	21	56	126	252	462	792				
priſes 6 à 6	1	7	28	84	210	462	924					
priſes 7 à 7	1	8	36	120	330	792						
priſes 8 à 8	1	9	45	165	495							
priſes 9 à 9	1	10	55	220								
priſes 10 à 10	1	11	66									
priſes 11 à 11	1	12										
priſes 12 à 12	1											

Si donc on écrit de ſuite les nombres du ſecond ordre 1, 2, 3, 4, 5, &c. pour marquer les différens nombres des choſes qu'on peut combiner, & qu'on écrive ſous eux les nombres du troiſiéme ordre, en mettant le premier 1 ſous le ſecond 2 de ceux du ſecond ordre; & les autres de ſuite, comme on voit dans cette Table; chaque nombre du troiſiéme ordre marquera combien peuvent donner de combinaiſons les grandeurs qui leur répondent, étant priſes deux à deux; ainſi le nombre 28, qui eſt ſous le nombre 8, marquera que 8 grandeurs priſes deux à deux donnent 28 combinaiſons; de même 45 qui eſt ſous le nombre 10, marquera que 10 grandeurs priſes deux à deux donnent 45 combinaiſons; & ainſi des autres.

De même ſi on écrit les nombres du quatriéme ordre ſous ceux du troiſiéme, en mettant le premier 1 ſous le ſecond 3 du troiſiéme ordre, & les autres de ſuite, chaque nombre de ce quatriéme ordre marquera le nombre de combinaiſons que peuvent donner les grandeurs qui leur répondent dans ceux du ſecond ordre, étant priſes trois à trois; ainſi le nombre 35 de ce quatriéme ordre, qui ſe trouve ſous le nombre 7 du ſecond ordre, marque que ſept grandeurs priſes trois à trois donnent 35 combinaiſons; de même le nombre 84 de ce quatriéme ordre, qui ſe trouve ſous le nombre 9

du ſecond, marque que 9 grandeurs priſes trois à trois donnent 84 combinaiſons; & ainſi des autres.

Et ſi l'on écrit les nombres du cinquiéme ordre ſous ceux du quatriéme, en avançant toujours d'un rang vers la droite, on trouvera que chaque nombre de cet ordre marquera les combinaiſons des grandeurs qui leur répondent dans le ſecond ordre, priſes quatre à quatre.

Et écrivant de la même façon le nombre du ſixiéme ordre ſous ceux du cinquiéme, chaque nombre de cet ordre marquera les combinaiſons que peuvent donner les grandeurs qui leur répondent dans le ſecond ordre, priſes cinq à cinq; & ainſi des autres.

PROBLEME PREMIER.

Trouver toutes les combinaiſons que peuvent donner pluſieurs grandeurs priſes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. c'eſt-à-dire, priſes de toutes les manieres qu'on peut les prendre, ſans excepter même une à une.

Suppoſons que le nombre des grandeurs ſoit 6, je prens dans la Table de la page précédente le nombre 6 parmi les nombres du ſecond ordre, qui forment le premier rang paralléle; je prens enſuite tous les nombres qui ſont écrits ſous lui, & le nombre 15 me marquera que ces 6 choſes priſes deux à deux donnent 15 combinaiſons; le nombre 20 qui eſt écrit ſous 15, marque que ces 6 choſes priſes trois à trois donnent 20 combinaiſons; le nombre 15 écrit ſous 20, marque que ces 6 choſes priſes quatre à quatre donnent 15 combinaiſons; enſuite le nombre 6 écrit ſous 15, marque qu'elles donnent 6 combinaiſons priſes cinq à cinq; enfin le nombre 1 écrit ſous 6, marque qu'elles n'en donnent qu'une priſes ſix à ſix; & comme 6 grandeurs ne peuvent être priſes que deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq & ſix à ſix; ajoutant enſemble tous ces nombres écrits ſous 6, c'eſt-à-dire 15, 20, 15, 6, 1, leur ſomme eſt 57; à laquelle ſi j'ajoute le premier nombre 6 qui marque que 6 choſes une à une ne peuvent être priſes que ſix fois, le total 63 marquera toutes les manieres, dont 6 grandeurs peuvent être priſes.

Et ſi l'on compare les nombres 6. 15. 20. 15. 6. 1 écrits les uns ſous les autres dans cette Table, avec les coefficiens de la ſixiéme puiſſance de la Table des puiſſances, on trouvera qu'ils ſont préciſément les mêmes; car la ſixiéme puiſſance eſt $a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+1b^6$, de ſorte qu'en négligeant le premier

terme a^6, les coefficiens 6. 15. 20. 15. 6. 1 des autres termes ſont les mêmes nombres que nous venons de trouver.

Soit de même le nombre des grandeurs 8 ; je prens dans la Table de la page 326 le nombre 8 au premier rang paralléle, & ce nombre me marque que ces huit grandeurs priſes une à une ne peuvent être priſes que huit fois ; & prenant enſuite tous les nombres écrits ſous 8, chacun de ces nombres me marque combien ces huit grandeurs peuvent être priſes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, & ainſi de ſuite juſqu'à huit à huit ; & comme on ne peut pas les prendre davantage, j'ajoute enſemble tous ces nombres 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1, & la ſomme totale 255 me fait voir que huit grandeurs priſes une à une, deux à deux, trois à trois, &c. juſqu'à huit à huit, c'eſt-à-dire, priſes de toutes les manieres qu'on peut les prendre, donnent 255 combinaiſons.

Et ſi je compare les nombres 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1 avec les coefficiens de la huitiéme puiſſance de la Table des puiſſances, en négligeant le premier terme de cette puiſſance, je trouve que les uns & les autres ſont les mêmes ; car la huitiéme puiſſance eſt $a^8 + 8a^7b + 28a^6bb + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28aab^6 + 8ab^7 + 1b^8$; & le premier terme étant négligé, les coefficiens des autres ſont 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1, qui ſont les mêmes nombres que la Table ci-deſſus nous indique.

D'où il ſuit que pour avoir tout d'un coup toutes les combinaiſons poſſibles de pluſieurs grandeurs, il faut prendre dans la Table des puiſſances la puiſſance dont l'expoſant répond au nombre des grandeurs, c'eſt-à-dire la ſixiéme puiſſance, ſi ce nombre eſt 6 ; la ſeptiéme, ſi ce nombre eſt 7, &c. & ajouter enſuite tous les coefficiens des termes de cette puiſſance, à l'exception de celui du premier terme.

Et ſi on n'avoit ni la Table que nous venons de donner, ni celle des puiſſances, voici comment on pourroit trouver le nombre total des combinaiſons d'un certain nombre de grandeurs.

Suppoſons que le nombre des grandeurs ſoit 6, nous avons trouvé que le nombre de toutes les combinaiſons poſſibles de ces 6 grandeurs eſt 63 : or ſi vous prenez le nombre 2, & que vous éleviez 2 à ſa ſixiéme puiſſance, parce que le nombre des grandeurs eſt 6, cette ſixiéme puiſſance ſera 64 ; de laquelle retranchant 1, vous aurez 63, qui eſt le nombre cherché de toutes les combinaiſons de 6 grandeurs.

De même ſuppoſant que le nombre des grandeurs eſt 8, nous

avons

avons trouvé que toutes leurs combinaisons possibles sont au nombre de 255 : or si vous prenez le même nombre 2, & que vous l'éleviez à sa huitiéme puissance, parce que le nombre des choses est 8, vous trouverez que cette puissance est 256 ; de laquelle retranchant 1, vous aurez 255, qui est le nombre cherché des combinaisons possibles de 8 grandeurs ; & comme la même chose arrive à l'égard de tout autre nombre de grandeurs qu'on peut combiner de toutes les façons, il s'ensuit que si on fait les puissances successives de 2, & que de chacune de ces puissances on retranche l'unité, les restes marqueront toutes les combinaisons de deux grandeurs de 3, de 4, de 5, de 6, &c.

nomb. des grand.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
puissances de 2	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512. 1024
nombr. des combinaiſ. possibles.	3.	7.	15.	31.	63.	127.	255.	511.	1024, &c.

Ainsi si je veux savoir toutes les combinaisons possibles de 9 grandeurs, je fais la neuviéme puissance de 2, qui est 512, & retranchant 1 de 512, le reste 511 est le nombre des combinaisons que je cherche ; & ainsi des autres.

PREMIERE QUESTION.

On demande combien de fois les sept Planettes peuvent se rencontrer ou se conjoindre deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. jusqu'à sept à sept ?

Je prens dans la Table précédente le nombre 7 du premier rang paralléle, & trouvant que les nombres écrits sous ce nombre 7 sont 21. 35. 35. 21. 7. 1, je dis que les sept Planettes peuvent se rencontrer deux à deux 21 fois ; trois à trois 35 fois ; quatre à quatre 35 fois aussi ; cinq à cinq 21 fois ; six à six 7 fois, & sept à sept 1 fois, ce qui fait en tout 120 conjonctions possibles ; & il faut prendre garde que je n'ajoute pas à ce nombre le nombre 7 du premier rang, parce que ce nombre marque combien de fois on peut prendre les choses une à une, & que dans la question présente cette maniere de prendre les choses est inutile, puisqu'il n'est pas possible qu'une seule chose puisse se rencontrer elle-même, & qu'il faut au moins deux Planettes ensemble pour faire une conjonction.

Ou bien je prens dans la Table des puissances la septiéme puis-

fance $a^7+7a^6b+21a^5bb+35a^4b^3+35a^3b^4+21aab^5+7ab^6+1b^7$; & négligeant le premier terme, ſelon la régle ordinaire, & le ſecond auſſi, à cauſe qu'il ne s'agit pas de prendre les Planettes une à une, j'ajoute les autres coefficiens 21. 35. 35. 21. 7. 1, & la ſomme totale eſt encore 120.

Ou bien encore, je prens la ſeptiéme puiſſance de 2 qui eſt 128, j'en retranche 1 ſelon la régle ordinaire, & enſuite ſept, parce qu'il ne faut pas prendre les Planettes une à une; & le reſte eſt encore 120.

SECONDE QUESTION.

Le nombre 30030 *a ſept diviſeurs ſimples tous inégaux* 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13: *on demande combien ce nombre peut avoir de diviſeurs?*

On a vû ci-deſſus qu'il faut prendre tous les produits des diviſeurs ſimples, pris deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. & qu'ajoutant enſuite au nombre de ces produits le nombre des diviſeurs ſimples, on aura le nombre total des diviſeurs: or comme l'unité ne multiplie point, je la mets à part, & il me reſte ſix diviſeurs ſimples, dont je dois prendre toutes les combinaiſons; c'eſt pourquoi je prens dans la Table ci-deſſus le nombre 6 du premier rang paralléle & les autres nombres 15.20.15.6.1 qui ſont écrits ſous lui; & ajoutant le nombre 6 qui marque les 6 diviſeurs ſimples aux autres 15. 20, &c. qui marquent leurs différens produits, la ſomme totale eſt 63; à laquelle ajoutant 1 pour l'unité que j'avois mis à part, le nombre 64 marque tous les diviſeurs du nombre propoſé.

Ou bien je prens dans la Table des puiſſances le ſixiéme rang paralléle $a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6$, & j'ajoute tous les coefficiens, en prenant même le coefficient 1 du premier terme, à cauſe de l'unité que j'avois miſe à part, & je trouve que leur ſomme eſt encore 64.

Ou bien enfin, je fais la ſixiéme puiſſance de 2 qui eſt 64, & je n'en retranche point l'unité, à cauſe du diviſeur 1 que j'avois mis à part, & 64 me marque le nombre des diviſeurs du nombre propoſé.

TROISIE'ME QUESTION.

Un homme s'eſt engagé avec douze ouvriers qu'il fait travailler, de leur donner autant de ſols par jour qu'on pourra trouver de différentes

manieres de prendre ces ouvriers un à un, deux à deux, trois à trois, &c. au bout de quinze jours il vient à compter avec eux, & l'on demande combien il doit leur donner ?

Je cherche d'abord combien il doit leur donner pour un jour, & pour cela je prens dans la Table ci-deſſus le nombre 12 dans le premier rang paralléle, & tous ceux qui ſont écrits ſous lui 66. 220. 495. 792, &c. & ajoutant le tout enſemble, la ſomme 4095 eſt le nombre de ſols que cet homme doit donner pour un jour.

Je trouverois le même nombre en prenant la douziéme puiſſance dans la Table des puiſſances, & ajoutant enſemble tous les coefficiens de ſes termes, à l'exception de celui du premier terme, ou bien en faiſant la douziéme puiſſance de 2 qui eſt 4096; & retranchant 1, ce qui feroit encore 4095.

Ce nombre trouvé, je le multiplie par le nombre 15 des jours que ces ouvriers ont travaillé, & le produit eſt 61425 ſols ou 3071 livres 5 ſols, ce qui ſans doute feroit ouvrir les yeux à un homme qui auroit fait un ſemblable marché, & lui apprendroit à ne pas s'engager ſi légérement ſous des apparences trompeuſes.

PROBLEME SECOND.

Trouver par ordre toutes les combinaiſons de pluſieurs choſes que les méthodes précédentes indiquent.

Ce que nous avons dit juſqu'ici, nous apprend ſeulement combien de combinaiſons pluſieurs choſes peuvent donner, ſelon qu'on veut les prendre; ainſi il nous reſte à trouver toutes & chacune de ces combinaiſons en particulier; & pour cela il y a deux manieres que nous allons enſeigner ſéparément.

Soient les cinq grandeurs *a. b. c. d. e*, pour les combiner ſelon la premiere maniere, je les prens d'abord deux à deux, en combinant *a* ſucceſſivement avec les quatre ſuivantes, puis *b* avec les trois ſuivantes, puis *c* avec les deux ſuivantes, puis la quatriéme *d* avec la cinquiéme *e*.

Enſuite je les prens trois à trois, en combinant les deux premieres *a. b* ſucceſſivement avec les trois ſuivantes, puis la premiere & la troiſiéme avec les deux ſuivantes, puis la premiere & la quatriéme avec la ſuivante; de même la ſeconde & la troiſiéme ſucceſſivement avec les deux ſuivantes; la ſeconde & la quatriéme avec la derniere, puis les trois dernieres.

Enſuite je les prens quatre à quatre, en combinant les trois pre-

mieres ſucceſſivement avec les deux ſuivantes, puis la premiere avec les trois dernieres, puis les quatre dernieres.

Enfin je les prens cinq à cinq, ce qui ne me donne qu'une ſeule combinaiſon.

a . b . c . d . e	5 grand. priſes 1 à 1.
ab . ac . ad . ae . bc . bd . be . cd . ce . de	10 combinaiſons 2 à 2.
abc , abd . abe . acd . ace . ade . bcd . bce . bde . cde	10 combinaiſons 3 à 3.
abcd . abce . abde . acde . bcde	5 combinaiſons 4 à 4.
abcde .	1 combinaiſon 5 à 5.

Cette méthode a cela de commode qu'elle diſtingue les différentes manieres de combiner deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. mais il eſt facile de s'y tromper, ſi l'on n'y donne beaucoup d'attention. Voici la ſeconde maniere.

a . b . c . d . e { *ab . ac . bc . abc* { *ad . bd . cd . abd . acd . bcd . abcd* { *ae . be . ce . de . abe . ace . bce . abce . ade . bde . cde . abde . acde . bcde . abcde .*

Pour combiner ces cinq grandeurs de la ſeconde maniere, je combine *a* avec *b*; puis *a* & *b*, & leur produit *ab* avec *c*; puis *a . b . c*, & tous les produits précédens avec *d*; enſuite *a . b . c . d*, & tous les produits précédens avec *c*; & je trouve le même nombre de combinaiſons que ci-deſſus.

Cette ſeconde maniere eſt plus facile à pratiquer que la précédente; & ſi elle confond les différentes eſpéces d'aſſemblages, il eſt facile de les démêler quand tout eſt fait.

Second cas des Combinaiſons ſimples.

V. Dans le ſecond cas, chaque grandeur peut ſe combiner avec elle-même; & de-là il ſuit qu'un petit nombre de grandeurs, n'y en eût-il que deux, peuvent former une infinité de combinaiſons, parce qu'en combinant chacune avec elle-même, on en augmente le nombre d'autant; ainſi il faut ſuppoſer que chaque grandeur en renferme un grand nombre de même eſpéce qu'elle, comme lorſqu'on veut faire un mélange de trois ou quatre ſortes de grains, chacune deſquelles contient pluſieurs grains de ſon eſpéce; ou bien que chaque grandeur peut en produire beaucoup d'autres en ſe multipliant, comme lorſqu'on fait les puiſſances d'un binome, d'un trinome, &c. où l'on voit que le nombre des termes augmente à

meſure que les puiſſances deviennent plus élevées, en quoi cependant il ſe trouve une différence ; car en faiſant les puiſſances, on ne rejette point les termes qui ſont les mêmes, au lieu que dans ces combinaiſons on n'admet point deux fois le même terme.

Pour bien connoître ces ſortes de combinaiſons, ſuppoſons d'abord deux grandeurs a & b, ces deux grandeurs priſes deux à deux donnent trois produits $aa . ab . bb$; trois à trois, elles en donnent quatre $a^3 . aab . abb . b^3$; quatre à quatre, elles en donnent cinq $a^4 . a^3b . aabb . ab^3 . b^4$; cinq à cinq, elles en donnent ſix $a^5 . a^4b . a^3bb . a^2b^3 . ab^4 . b^5$, & ainſi de ſuite ; & comme en les prenant une à une elles en donnent deux, on voit que les nombres qui expriment toutes les combinaiſons de ces deux grandeurs à l'infini, ſont les nombres du ſecond ordre 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8, &c. en commençant par le ſecond de ces nombres qui eſt 2.

Trois grandeurs $a . b . c$ priſes une à une, donnent trois produits ; priſes deux à deux, elles en donnent ſix $aa . ab . ac . bb . bc . cc$; trois à trois, elles en donnent dix $a^3 . aab . aac . abb . abc . acc . b^3 . bbc . bcc . c^3$, & ainſi des autres ; de ſorte que les nombres qui expriment toutes leurs combinaiſons poſſibles à l'infini, ſont les nombres du troiſiéme ordre 3 . 6 . 10 . 15 . 21, &c. à commencer par le ſecond de ces nombres qui eſt trois.

Et on trouvera de même que les nombres qui marquent toutes les combinaiſons poſſibles à l'infini de quatre grandeurs, une à une, deux à deux, trois à trois, &c. ſont les nombres du quatriéme ordre 4 . 10 . 20 . 35 . 56, &c. en commençant par le ſecond de ces nombres qui eſt 4.

De même, les nombres qui marquent toutes les combinaiſons poſſibles à l'infini de cinq grandeurs, ſont les nombres du cinquiéme ordre 5 . 15 . 35 . 70, &c. en commençant par le ſecond de ces nombres qui eſt 5 ; & ainſi des autres.

Si l'on prend la Table des puiſſances, & que l'on faſſe abſtraction des coefficiens des termes, & que la premiere puiſſance $a+b$ repréſente les deux grandeurs a & b, on trouvera que la ſeconde puiſſance contient préciſément les mêmes termes $aa . ab . bb$, qui ſont les combinaiſons des deux grandeurs a & b priſes deux à deux ; que la troiſiéme puiſſance contient les mêmes termes $a^3 . aab . abb . b^3$, qui ſont les combinaiſons des grandeurs a & b priſes trois à trois ; que la quatriéme puiſſance contient les mêmes termes $a^4 . a^3b . aabb . ab^3 . b^4$, qui ſont les combinaiſons de a & b priſes quatre à quatre ; & ainſi des autres puiſſances.

Et ſi l'on faiſoit les puiſſances ſucceſſives d'un trinome $a+b+c$; on trouveroit de même, en faiſant abſtraction des coefficiens des termes, que ſon quarré contiendroit les ſix mêmes termes qui ſont les combinaiſons des trois grandeurs a, b, c priſes deux à deux; que ſa troiſiéme puiſſance contiendroit les dix mêmes termes qui ſont les combinaiſons de a, b, c priſes trois à trois; de même de ſes autres puiſſances.

Et ſi on faiſoit de même les puiſſances ſucceſſives d'un quadrinome, on verroit que ſon quarré, ſon cube, &c. contiendroit chacun les mêmes termes qui ſont les combinaiſons de quatre grandeurs a, b, c, d priſes deux à deux, trois à trois, &c. & ainſi de même des puiſſances des autres multinomes.

Cette maniere de combiner peut donc être très-utile pour la formation des puiſſances des multinomes, & je crois qu'il vaut mieux s'en tenir là, que de citer pour exemple, comme font certains Auteurs, des mélanges de grains; car je ne crois pas que perſonne s'aviſe jamais d'aller prendre des grains deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. & cela pour en faire des mélanges où il y en auroit autant d'une eſpéce que de l'autre; car c'eſt ce qui arrive dans ces combinaiſons, comme s'il n'étoit pas plus naturel en ce cas d'en prendre tout d'un coup la même meſure des uns & des autres. Au lieu de ſe rendre intelligible, en donnant des exemples qui choquent le bon ſens, on ſe rend obſcur & incapable d'être entendu.

Pour ſavoir comment on peut faire ces combinaiſons par ordre, ſuppoſons les quatre grandeurs a, b, c, d, je les prens d'abord une à une; enſuite je les prens deux à deux en combinant la premiere a avec elle-même & avec les trois ſuivantes; puis b avec elle-même & avec les deux ſuivantes; puis c avec elle-même & avec d; enfin d avec elle-même.

Je les prens enſuite trois à trois, en combinant a avec tous les produits précédens; puis b avec tous les précédens où a ne ſe trouve point; puis c avec tous les précédens où a, b ne ſe trouvent point; enfin d avec les précédens qui ne contiennent ni a, ni b, ni c.

De même pour les prendre quatre à quatre, je combine a avec tous les produits immédiatement précédens, c'eſt-à-dire, avec tous ceux qui contiennent trois grandeurs; puis b avec tous les immédiatement précédens où a n'eſt point; puis c avec tous les immédiatemens précédent où a & b ne ſont point; & ainſi des autres.

une à une 4 $a.b.c.d$

deux à deux 10 $aa . ab . ac . ad . bb . bc . bd . cc . cd . dd$.

trois à trois 20 $a^3 . aab . aac . aad . abb . abc . abd . acc . acd . add .$
$b^3 . bbc . bbd . bcc . bcd . bdd . c^3 . ccd . cdd . d^3$.

quatre à quatre 35 $a^4 . a^3b . a^3c . a^3d . aabb . aabc . aabd . aacc . aacd .$
$aadd . ab^3 . abbc . abbd . abcc . abcd . abdd . ac^3 . accd .$
$acdd . ad^3 . b^4 . b^3c . b^3d . bbcc . bbcd . bbdd . bc^3 . bccd .$
$bcdd . bd^3 . c^4 . c^3d . ccdd . cd^3 . d^4$.

Et on pourroit de même continuer à les prendre cinq à cinq, six à six, sept à sept; & ainsi de suite à l'infini.

Troisiéme cas des Combinaisons simples.

VI. Dans ce dernier cas, ou les grandeurs sont toutes égales, ou il y en a d'égales & d'inégales.

Si les grandeurs sont toutes égales, comme les cinq $a . a . a . a . a$, tous leurs produits deux à deux ne sont qu'un seul & unique produit aa; de même, tous leurs produits trois à trois ne sont qu'un seul produit a^3, & tous leurs produits quatre & quatre ne sont que le seul produit a^4; & enfin tous leurs produits cinq à cinq ne sont que le produit a^5; de sorte que si on veut savoir tout d'un coup le nombre de leurs combinaisons deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. retranchant 1 de leur nombre, le reste 4 marque qu'elles peuvent former quatre combinaisons $aa . a^3 . a^4 . a^5$; & si on veut y ajouter la maniere de les prendre une à une, qui ne donne que la seule grandeur a, on aura $a . aa . a^3 . a^4 . a^5$, c'est-à-dire cinq combinaisons; & en ce cas, le nombre des grandeurs exprime le nombre des combinaisons.

Il faut prendre garde que dans ce troisiéme cas une même grandeur ne peut pas se multiplier à l'infini, mais qu'on ne peut l'élever tout au plus qu'à la puissance dont le degré est égal au nombre qui marque combien on a de fois cette grandeur; ainsi s'il y a cinq grandeurs $a . a . a . a . a$, la puissance la plus haute de a ne peut être que a^5.

Si les grandeurs sont en partie égales & en partie inégales; supposons d'abord les cinq grandeurs $a . a . b . b . b$, dont les deux premieres sont égales, & les trois autres aussi égales, les deux premieres ne peuvent donner que a, aa, & les trois dernieres ne peuvent donner que $b . bb . b^3$; multipliant donc les deux premieres par b, puis par bb, puis par b^3, j'ai déja six combinaisons, auxquelles ajou-

tant le produit *aa* & les produits $bb \cdot b^3$, j'ai en tout neuf combinaiſons de ces cinq grandeurs $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$; & ſi on vouloit y ajouter les deux ſimples *a* & *b*, on en auroit onze.

De même, ſoient les ſept grandeurs $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$; les deux premieres ne peuvent donner en tout que $a \cdot aa$; les trois autres ne peuvent donner que $b \cdot bb \cdot b^3$, & les deux dernieres ne peuvent donner que $c \cdot cc$; multipliant donc *a* & *aa* par *b*, puis par *bb*, puis par b^3, j'ai ſix produits, auſquels ajoutant les produits $aa \cdot bb \cdot b^3$, j'ai neuf produits; puis multipliant les deux ſimples *a* & *b*, & les neuf produits par *c*, j'ai onze autres produits, leſquels onze multipliés encore par *c*, donnent onze autres produits, auſquels ajoutant le produit *cc*, j'en ai douze, & les onze précédens ſont vingt-trois; & ces vingt-trois avec les neuf premiers, ſont trente-deux produits; & ſi on vouloit ajouter les trois ſimples $a \cdot b \cdot c$, on en auroit en tout trente-cinq.

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot a \left\{ aa \right. \\ b \left\{ ba \cdot baa \right. \\ b \left\{ bb \cdot bba \cdot bbaa \right. \\ b \left\{ b^3 \cdot b^3a \cdot b^3aa \right. \end{array}\right\} 8$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot a \left\{ aa \cdot \right. \\ b \left\{ ab \cdot baa \cdot \right. \\ b \left\{ bb \cdot abb \cdot bbaa \cdot \right. \\ b \left\{ b^3 \cdot ab^3 \cdot b^3aa \cdot \right. \end{array}\right\} 8$$

$$\left.\begin{array}{l} c \left\{ ac \cdot bc \cdot aac \cdot abc \cdot baac \cdot bbc \cdot \right. \\ \quad abbc \cdot bbaac \cdot b^3c \cdot ab^3c \cdot b^3aac \cdot \\ c \left\{ cc \cdot acc \cdot bcc \cdot aacc \cdot abcc \cdot baacc \cdot \right. \\ \quad bbcc \cdot abbcc \cdot bbaacc \cdot b^3cc \cdot ab^3cc \cdot \\ \quad b^3aacc \cdot \end{array}\right\} 23$$

La régle eſt donc, en n'ajoutant pas les ſimples, de prendre les produits que peuvent faire les premieres égales; & dans le cas préſent, il n'y en a qu'un qui eſt *aa*; enſuite de multiplier ces produits & la premiere ſimple, par la premiere des autres inégales qui ſont ici les trois $b \cdot b \cdot b$, & par les produits $bb \cdot b^3$ qu'elles peuvent former; ce qui dans le cas préſent donne ſix produits, auſquels il faut ajouter les deux multiplicateurs $bb \cdot b^3$, ce qui fait huit produits, & le premier *aa* font neuf; enſuite de multiplier les deux ſimples *a* & *b* & les neuf produits par la premiere des autres égales, s'il y en a encore; comme ici par la premiere *c* des égales $c \cdot c$, ce qui donne onze autres produits, & ces onze par la ſeconde *c* de ces mêmes égales, ce qui donne encore onze produits; auſquels il faut ajouter le produit *cc*, ce qui fait douze, & ces douze ajoutés aux onze font vingt-trois; & s'il y avoit une troiſiéme égale *c*, on multiplieroit les douze derniers produits par *c*, & l'on auroit douze autres produits, & ainſi des autres; après quoi ajoutant la ſomme de ces produits, on auroit la ſomme totale.

Soient, par exemple, les grandeurs $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d$,

$d.d$, je vois que les trois premieres ne peuvent donner que deux produits $aa.a^3$, & les deux ſuivantes ne peuvent donner qu'un ſeul produit bb; multipliant donc la ſimple a & les deux produits $aa.a^3$ par la ſimple b, puis par le produit bb, j'ai ſix produits; auſquels ajoutant les deux $aa.a^3$ & le produit bb, la ſomme eſt neuf, j'écris neuf à part; multipliant enſuite les deux ſimples a & b, & les neuf produits par la premiere des égales c, j'ai onze autres produits, & ces onze multipliés par la ſeconde des égales c, donnent onze autres produits, auſquels il faut ajouter le produit cc des deux égales, ce qui fait douze; & ces douze multipliés par la troiſiéme des égales c, donnent douze autres produits, & je n'ajoute point ici c^3, parce que c multipliant les douze précédens où cc ſe trouve, produit c^3; ainſi les produits par les trois égales c montent à trente-cinq, car 11. 12 & 12 font 35, j'écris 35 à part; & ces 35 ajoutés aux 9 que nous avons déja, font 44 produits.

Je multiplie les trois ſimples $a.b.c$, & les 44 produits par la premiere des égales d, & j'ai 47 autres produits; & ces 47 multipliés par la ſeconde des égales d, m'en donnent encore 47; auſquels ajoutant le produit dd des deux égales $d.d$, j'ai 48; & ces 48 multipliés par la troiſiéme des égales d, me donnent 48 autres produits; & ces 48 multipliés par la quatriéme des inégales, m'en donnent encore 48, & tous les produits, par les quatre $d.d.d.d$, montent à 191; car 47, 48, 48, & 48 font 191; & raſſemblant les ſommes 9 & 35 que j'avois miſes à part, & les ajoutant à la ſomme 191, le total 235 me fait voir que tous les produits poſſibles de ces grandeurs montent à 235.

Et pour abréger, il faut multiplier la premiere ſimple, & les deux produits $aa.a^3$ par 2, à cauſe qu'il y a deux égales $b.b$; & ajoutant 2 aux produits pour $aa.a^3$ & 1 pour bb, on aura 9 qu'on écrira à part; puis il faut ajouter 2 à 9 pour les deux ſimples a & b, & multiplier la ſomme 11 par les trois égales $c.c.c$, ce qui fera 33; à quoi on ajoutera 2 pour les deux produits $cc.c^3$, ce qui fera 35 qu'on écrira à part: or 35 & les 9 précédens font 44, & les trois ſimples font 47 qu'il faut multiplier par 4, à cauſe des quatre égales $d.d.d.d$, ce qui donne 188; à quoi il faut ajouter 3 pour les trois produits $dd.d^3.d^4$, & l'on aura 191; ajoutant donc 9, 35 & 191, on aura 235 qui eſt la ſomme totale de tous les produits poſſibles de ces grandeurs.

Et ſi l'on veut une méthode encore plus facile; comme parmi les grandeurs ci-deſſus, les trois premieres ſont égales, on écrira

4, c'eſt-à-dire un de plus ; enſuite, à cauſe des deux égales *b . b*, on multipliera 4 par 2, ce qui donnera 8 qu'on écrira auſſi à part : or les quatre premieres & ces 8 font 12 que l'on multipliera par 3, à cauſe des trois égales *c . c . c*, & le produit ſera 36 qu'on écrira auſſi à part ; enſuite ajoutant 4, 8 & 36, la ſomme ſera 48, que l'on multipliera par 4 à cauſe des quatre égales *d . d . d . d*, & le produit ſera 192 ; faiſant donc la ſomme totale de 4 . 8 . 36 & 92, le total ſera 240, duquel on retranchera autant d'unités qu'il y a de grandeurs différentes, plus un, c'eſt-à-dire, qu'on retranchera 4, à cauſe qu'il y a quatre grandeurs différentes *a . b . c . d* & une unité de plus, ce qui fera 5, & le reſte 235 ſera la ſomme cherchée.

4	2
8	7
36	35
192	191
240	235
5	
235	

Et l'on comprendra la raiſon de ceci, ſi l'on fait attention qu'en écrivant d'abord 4, c'eſt-à-dire un de plus que le nombre des trois premieres, on compte deux combinaiſons de plus, puiſque les trois premieres ne donnent que deux combinaiſons ; qu'enſuite en multipliant 4 par 2 & écrivant 8, on compte encore une combinaiſon de plus ; car la ſimple *a* & les deux *aa . a²* multipliés par *b* & *bb* n'en donnent que 6, à quoi ajoutant *bb*, on a 7 qui eſt moindre que 8 d'une unité ; de même, en multipliant la ſomme 12 de 4 & 8 par 3, on compte encore une combinaiſon de plus, puiſque les combinaiſons par les trois égales *c . c . c*, ne montent qu'à 35 ; enfin en multipliant la ſomme 48 de 48 & 36 par 4, on compte encore une combinaiſon de plus, puiſque le produit eſt 192, au lieu qu'il ne devroit être que 191, comme on a vû ci-deſſus : donc puiſqu'on a de plus 2 . 1 . 1 . 1 qui font 5, il faut retrancher 5 du total, & 5 eſt égal au nombre 4 des différentes grandeurs, plus un.

Suivant cela, ſi on veut ſavoir tous les produits poſſibles des grandeurs *a . a . a . a . a . b . b . b . c . c . d* ; comme les cinq premieres grandeurs ſont égales, j'écris un de plus, c'eſt-à-dire 6 ; puis je multiple 6 par 3, à cauſe des trois égales *b . b . b*, & le produit eſt 18 que j'écris ; j'ajoute 6 & 18, ce qui fait 24 que je multiplie par 2, ce qui fait 48 que j'écris ; je fais la ſomme 72 de 6, 18 & 48, & je prens cette ſomme une fois, à cauſe de la grandeur unique *d* ; puis faiſant la ſomme totale 144 de 6, 18, 48 & 72, j'en retran-

6	4
18	17
48	47
72	71
144	139
5	
139	

che 4+1, ou 5, à cauſe qu'il y a quatre grandeurs différentes *a*. *b*. *c*. *d*, & le reſte 139 marque tous les produits poſſibles des grandeurs propoſées.

J'ai mis à côté de ce calcul celui de la méthode précédente, afin qu'on comprenne mieux la raiſon de celui-ci.

QUESTION.

Trouver le nombre de tous les diviſeurs compoſés du nombre 882000 *dont les diviſeurs ſimples ſont* 1. 2. 2. 2. 2. 3. 3. 5. 5. 5. 7. 7.

Je néglige l'unité, parce qu'elle ne multiplie pas, & comme les quatre diviſeurs 2. 2. 2. 2 ſont égaux, j'écris 5, je multiplie 5 par 2, à cauſe des deux égaux 3. 3, & j'écris le produit 10; j'ajoute 5 à 10, ce qui fait 15 que je multiplie par 3, à cauſe des trois égaux 5. 5. 5, & j'écris le produit 45; je fais la ſomme 60 de 5. 10 & 45, & je la multiplie par 2, à cauſe des deux égaux 7. 7, & j'écris le produit 120; je fais la ſomme 180. de 5. 10. 45 & 120; & retranchant de cette ſomme 4+1, ou 5, à cauſe qu'il y a quatre differens diviſeurs ſimples 2. 3. 5 & 7, le reſte 175 eſt le nombre de tous les diviſeurs compoſés de 882000.

5	3
10	9
45	44
120	119
180	175
5	
175	

Mais ſi l'on demandoit la ſomme de tous les diviſeurs, ſoit ſimples, ſoit compoſés, on ne retrancheroit rien de la ſomme 180, à cauſe des cinq diviſeurs ſimples 1. 2. 3. 5. 7.

Et ſi l'on emploïoit la méthode précédente, dont j'ai mis le calcul à côté de celui-ci, on ajouteroit 5 à la ſomme 175.

Des permutations ou changemens d'ordres.

VII. Les permutations, de même que les combinaiſons, ont trois différens cas; le premier, où chaque grandeur ne peut pas ſe combiner avec elle-même, ni ſe trouver répétée dans les aſſemblages qu'elle forme avec les autres; le ſecond, où chaque grandeur peut ſe combiner avec elle-même autant de fois qu'il y a de différentes eſpéces d'aſſemblages; & le troiſiéme, où il ſe trouve des grandeurs inégales & des grandeurs égales.

Premier cas des permutations.

VIII. Nous ſuivrons ici le même ordre que nous avons ſuivi en parlant des combinaiſons, c'eſt-à-dire, que nous examinerons

combien de permutations peuvent donner 2.3.4.5.6 grandeurs, &c. priſes deux à deux ; puis combien elles en peuvent donner priſes trois à trois, puis priſes quatre à quatre, &c. & de-là nous en tirerons une régle pour ſavoir combien elles en peuvent donner priſes de toutes les façons.

Premierement donc, deux grandeurs *a* & *b* donnent deux permutations *ab . ba* ; trois grandeurs *a . b . c*, priſes deux à deux, en donnent ſix *ab . ac . bc . ba . ca . cb* ; quatre grandeurs *a . b . c . d*, priſes deux à deux, en donnent douze *ab . ac . ad . bc . bd . cd . ba . ca . da . cb . db . dc* ; cinq grandeurs *a . b . c . d . e*, priſes deux à deux, en donnent vingt *ab . ac . ad . ae . bc . bd . be . cd . ce . de . ba . ca . da . ea . cb . db . eb . dc . ec . cd*, & ainſi des autres ; de ſorte qu'en continuant de même, on trouvera que les nombres qui expriment les permutations de 2.3.4.5.6 grandeurs, &c. priſes deux à deux, ſont 2.6.12.30, &c. leſquels comparés avec les nombres 1.3.6.10, &c. qui marquent combien donnent des combinaiſons, 2.3.4.5.6. grandeurs, &c. priſes deux à deux, ſe trouvent doubles de ceux-ci ; ainſi on doit dire que 2.3.4.5.6 grandeurs, &c. priſes deux à deux, donnent deux fois autant de permutations que de combinaiſons.

En ſecond lieu, trois grandeurs *a . b . c*, priſes trois à trois, donnent ſix permutations *abc . acb . bac . bca . cab . cba* ; quatre grandeurs *a . b . c . d*, priſes trois à trois, donnent vingt-quatre permutations *abc . abd . acd . bcd . acb . bac . bca . cba . cab . adb . bad . bda . dab . dba . adc . cad . cda . dac . dca . bdc . cbd . cdb . dbc . dcb* ; & continuant de même, on trouvera que les nombres qui expriment combien de permutations peuvent donner 3.4.5.6 grandeurs, &c. ſont les nombres 6.24.60.120, &c. leſquels comparés avec les nombres 1.4.10.20.35, &c. qui marquent les combinaiſons que peuvent donner 3.4.5.6 grandeurs, &c. priſes trois à trois, ſe trouvent préciſément chacun ſix fois plus grands que chacun de ceux-ci : donc 3.4.5.6 grandeurs, &c. priſes trois à trois, donnent ſix fois autant de permutations que de combinaiſons.

Et on trouvera, de la même façon, que 4.5.6 grandeurs, &c. priſes quatre à quatre, donnent 24 fois autant de permutations que de combinaiſons.

Que 5.6.7 grandeurs, &c. priſes cinq à cinq, donnent 120 fois autant de permutations que de combinaiſons.

Que 6.7.8 grandeurs, &c. priſes ſix à ſix, donnent 720 fois autant de permutations que de combinaiſons, &c.

Donc, ſi l'on écrit de ſuite les nombres du ſecond ordre 1.2.3.4.5.6.7.8, &c. pour marquer les différens nombres des choſes que l'on peut permuter; & qu'après avoir multiplié les nombres du troiſiéme ordre par 2, on écrive les produits 2.6.12.20, &c. en avançant d'un degré à droite, comme on voit ici, chacun de ces produits marquera les nombres de permutations deux à deux que peuvent donner les choſes dont le nombre eſt exprimé par celui du ſecond ordre qui lui répond; ainſi 30, qui eſt écrit ſous 6, marquera que 6 choſes, priſes deux à deux, donnent 30 permutations.

De même, ſi après avoir multiplié les nombres du quatriéme ordre par 6, on écrit les produits 6.24.60.120, &c. ſous les précédens, en avançant d'un degré vers la droite, chacun de ces produits marquera le nombre de permutations que peuvent donner, trois à trois, les grandeurs dont le nombre eſt exprimé par le nombre du ſecond ordre qui lui répond; 210 qui eſt écrit ſous 7, marquera que 7 choſes, priſes trois à trois, donnent 210 permutations; & de même des autres.

Multipliant de même les nombres du cinquiéme ordre par 120, & écrivant les produits ſous les précédens, on aura les divers nombres de permutations que peuvent donner pluſieurs grandeurs priſes quatre à quatre; & ainſi des autres.

nomb. des choſ. priſes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
priſes 1 à 1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
priſes 2 à 2	2	6	12	20	30	42	56	72	90	
priſes 3 à 3	6	24	60	120	210	336	504	720		
priſes 4 à 4	24	120	360	840	1680	3024	5040			
priſes 5 à 5	120	720	2520	6720	15120	30240				
priſes 6 à 6	720	5040	20160	60480	151200					
priſes 7 à 7	5040	40320	181440	604800						
priſes 8 à 8	40320	362880	1814400							
priſes 9 à 9	362880	3628800								
priſes 10 à 10	3628800									

Et pour faire cette Table plus commodément & d'une maniere plus aiſée, écrivez d'abord les nombres 1.2.3.4.5.6, &c. qui marquent les différentes choſes que l'on peut permuter; enſuite multipliez le ſecond 2 par 1, le troiſiéme 3 par 2, le quatriéme

4 par 3, le cinquiéme 5 par 4, & ainſi de ſuite ; & les produits mis deſſous vous marquent les nombres de permutations que 2.3.4.5.6 grandeurs, &c. peuvent donner priſes deux à deux.

De même, après avoir écrit les produits 2.6.12.20.30, &c. dont nous venons de parler, multipliez le ſecond 6 par 1, le troiſiéme 12 par 2, le quatriéme 20 par 3, le cinquiéme 30 par 4, & ainſi de ſuite ; & les produits 24.120.360.840, &c. marqueront les permutations que 3.4.5.6 grandeurs, &c. peuvent donner priſes trois à trois.

Multipliez de même ces produits 24.120.360, &c. par 1.2.3.4, &c. en commençant par le ſecond 120, & les nouveaux produits 120.720.2520, &c. marqueront les permutations que peuvent donner 4.5.6 grandeurs, &c. priſes quatre à quatre ; & continuant à multiplier de la même façon, on pourra pouſſer cette Table auſſi loin que l'on voudra.

PROBLEME PREMIER.

Trouver le nombre de toutes les permutations poſſibles de pluſieurs grandeurs.

Suppoſons que ces grandeurs ſoient au nombre de quatre ; je prens dans la Table le nombre 4 du premier rang paralléle ; & je lui ajoute les nombres 12.24, & 24 qui ſont écrits ſous lui ; & la ſomme 64 marque que ces quatre grandeurs priſes une à une, deux à deux, trois à trois & quatre à quatre, donnent 64 permutations.

Ou bien je prens les coefficiens du quatriéme rang de la Table des puiſſances, à l'exception du premier, & comme ce rang eſt $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$, ſes coefficiens, ſans compter le premier, ſont 4.6.4.1 ; & je multiplie le premier 4 par 1, le ſecond 6 par 2, ce qui fait 12 ; le troiſiéme 4 par 6, ce qui fait 24, & le dernier par 24 ; & raſſemblant tous ces produits 4.12.24.24, la ſomme eſt encore 64.

Pour comprendre ceci, il faut faire attention que s'il ne s'agiſſoit que de ſavoir le nombre des combinaiſons poſſibles de ces quatre choſes, les coefficiens 4.6.4.1 ajoutés enſemble, marqueroient ce nombre ; ainſi 4 marqueroit les quatre choſes priſes une à une ; & comme ces quatre choſes priſes une à une, donnent également 4 dans les permutations, auſſi n'ai-je multiplié 4 que par 1 ; le ſecond coefficient 6 marqueroit les combinaiſons des quatre grandeurs priſes deux à deux, & comme ces quatre grandeurs ainſi priſes, donnent deux fois autant de permutations que de com-

binaiſons, auſſi ai-je multiplié 6 par 2 ; de même le troiſiéme coefficient 4 marque les combinaiſons de quatre grandeurs priſes trois à trois, & comme ces grandeurs ainſi priſes, donnent 6 fois autant de permutations que de combinaiſons, auſſi ai-je multiplié 4 par 6 ; enfin, le dernier coefficient 1 marque les combinaiſons de quatre grandeurs priſes quatre à quatre, & comme ces quatre grandeurs ainſi priſes, donnent 24 fois plus de permutations que de combinaiſons, auſſi ai-je multiplié 1 par 24.

Ou bien je multiplie le nombre 4 des grandeurs par le nombre trois, qui eſt moindre d'une unité que 4, & le produit 12 donne les permutations deux à deux ; je multiplie 12 par le nombre 2, qui eſt moindre d'une unité que 3, & le produit 24 eſt le nombre des permutations trois à trois ; enfin je multiplie le produit 24 par 1, qui eſt moindre d'une unité que 2, & le produit 24 marque le nombre des permutations quatre à quatre ; & comme je ne puis plus abaiſſer le multiplicateur 1 de même que j'ai abaiſſé les autres d'une unité, j'ajoute enſemble les produits 12 . 24 . 24, & j'y ajoute le nombre 4 des grandeurs, & le total eſt encore 64.

Cette troiſiéme maniere, qui eſt la plus commode, eſt une ſuite de ce que nous avons dit ci-deſſus pour la formation de la Table ; car on voit bien que pour avoir les nombres du ſecond rang paralléle, nous avons multiplié chacun des premiers par un nombre moindre que lui d'une unité ; qu'enſuite pour avoir ceux du troiſiéme rang, nous avons multiplié ceux du ſecond rang par 1 . 2 . 3 . 4, &c. en commençant par le ſecond nombre de ce ſecond rang ; de ſorte que ſi nous comparons chacun de ces multiplicateurs avec les nombres qui leur répondent dans le premier rang, nous verrons qu'ils ſont moindres que chacun d'eux de deux unités, & qu'ils ſont par conſéquent moindres d'une unité que chacun des multiplicateurs qui ont multiplié le premier rang ; & comme nous avons fait la même choſe à l'égard des autres rangs, on verra de même que chacun des multiplicateurs du troiſiéme rang eſt moindre d'une unité que chacun des multiplicateurs du ſecond ; & de même des autres. Ainſi ſi l'on prend, par exemple, dans le premier rang le nombre 5, & les autres 20 . 60 . 120 . 120 qui ſont écrits ſous lui, on verra que 5 a été multiplié par 4 pour produire 20 ; que 20 a été multiplié par 3 pour produire 60 ; que 60 a été multiplié par 2 pour produire 120 ; & enfin que 120 a été multiplié par 1 pour produire 120 ; & que les quatre multiplicateurs 4 . 3 . 2 . vont en diminuant toujours d'une unité, en commençant par le premier 4, qui eſt moindre que le nombre 5 des grandeurs d'une unité.

Et il en ſeroit de même de tout autre nombre de grandeurs ; ainſi pour ſavoir combien de permutations différentes pourroient donner huit grandeurs, je multiplie 8 par 7, & le produit 56 marque les permutations des huit grandeurs priſes deux à deux ; je multiplie 56 par 6, & le produit 336 marque leurs permutations trois à trois ; je multiplie 336 par 5, & le produit 1680 marque leurs permutations quatre à quatre ; & je continuë de même juſqu'à ce que le multiplicateur un ne puiſſe plus diminuer ; & raſſemblant tous les produits, & y ajoutant huit pour les huit grãdeurs priſes une à une, le total 109600 marque toutes les permutations poſſibles.

8	1 à 1
7	
56	2 à 2
6	
336	3 à 3
5	
1680	4 à 4
4	
6720	5 à 5
3	
20160	6 à 6
2	
40320	7 à 7
1	
40320	8 à 8

8
56
336
1680
6720
20160
40320
40320
109600

QUESTION.

On demande combien de nombres différens on pourroit faire avec les neuf premiers chiffres, en ſuppoſant qu'aucun de ces neuf caractéres ne puiſſe ſe trouver deux fois dans un même produit.

Je multiplie 9 par 8, & le produit par 7, & le ſecond produit par 6, & le troiſiéme produit par 5, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que le multiplicateur devienne 1 ; après quoi faiſant la ſomme de tous ces produits, & y ajoutant 9 pour les neuf premiers caractéres, j'ai 986409, qui marque qu'on pourroit faire neuf cens quatre-vingt-ſix mille quatre cens neuf nombres différés avec les neuf

9	1 à 1
8	
72	2 à 2
7	
504	3 à 3
6	
3024	4 à 4
5	
15120	5 à 5
4	
60480	6 à 6
3	
181440	7 à 7
2	
362880	8 à 8
1	
362880	9 à 9

9
72
504
3024
15120
60480
181440
362880
362880
986409 total.

neuf premiers caractéres, ſans qu'aucun de ces caractéres ſe trouvât deux fois dans le même produit.

PROBLEME SECOND.

Trouver le nombre des permutations que donneroient 2 . 3 . 4 . 5 . 6 grandeurs, &c. priſes ſeulement une à une & deux à deux.

J'ajoute les deux premiers rangs paralléles de la Table précédence, c'eſt-à-dire, chaque terme avec chaque terme, & j'ai les ſommes ſuivantes : 4 . 9 . 16 . 25 , &c.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	, &c.
2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132		
4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144		

Où, en examinant ces ſommes, il eſt facile de voir que chacune d'elles eſt le quarré du nombre des choſes à permuter qui leur répond ; ainſi le quarré d'un nombre de grandeurs, quel que ſoit ce nombre, marque le nombre de permutations que donneroient ces grandeurs priſes une à une & deux à deux.

PROBLEME TROISIE'ME.

Trouver toutes les permutations poſſibles de 2 . 3 . 4 . 5 . 6 grandeurs, &c. en y ajoutant le nombre de ces grandeurs priſes une à une.

Je prens dans la Table précédente les nombres 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6, &c. du premier rang paralléle, & j'ajoute à chacun d'eux tous les nombres qui ſe trouvent écrits ſous lui, & j'ai les ſommes ſuivantes, qui donnent la réſolution du problême.

nombre des choſ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
permut.	1	4	15	64	325	1956	13699	109600	986409	9864100

Et ſi l'on veut continuer cette ſuite de nombres, on obſervera que ſi on ajoute 1 au premier 1, & qu'on le multiplie par 2, le produit 4 eſt le ſecond nombre ; de même ſi on ajoute 1 au ſecond nombre 4, & qu'on multiplie la ſomme 5 par 3, le produit 15 eſt le troiſiéme nombre ; & ſi on ajoute 1 à ce troiſiéme nombre 15, & qu'on multiplie la ſomme 16 par 4, le produit 64 eſt le quatriéme nom-

bre, & ainſi de ſuite; en ſorte que le multiplicateur devienne toujours plus grand d'une unité, ou, ce qui eſt la même choſe, que ce multiplicateur ſoit toujours égal au nombre des grandeurs dont on cherche à connoître les permutations; ainſi ſi on vouloit continuer cette ſuite, on ajouteroit 1 au dernier nombre 9864100, & on multiplieroit la ſomme 9864101 par 11, qui eſt le nombre des grandeurs qui vient après le nombre 10, & le produit donneroit toutes les permutations poſſibles de 11 grandeurs, y compris les 11 grandeurs priſes une à une; & ainſi des autres.

Et ſi on vouloit ſimplement ſavoir les nombres des permutations de 2.3.4.5.6.7 grandeurs, &c. priſes toutes enſemble, on prendroit le premier rang paralléle de la Table, puis chaque dernier nombre qui ſe trouve écrit ſous chaque nombre de ce premier rang.

nombre des choſ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Ainſi voulant ſavoir, par exemple, combien un nom compoſé de ſix lettres différentes pourroit ſouffrir de permutations, en prenant toujours les lettres ſix à ſix, le nombre 720 qui eſt écrit ſous 6 me fait voir que ce nom ſouffriroit 720 permutations.

De même, ſi on vouloit ſavoir en combien de manieres différentes dix perſonnes pourroient ſe ranger à table, le nombre 362880 qui eſt ſous le nombre 10, marqueroit que ces dix perſonnes pourroient ſe ranger en trois cens ſoixante-deux mille huit cens quatre-vingt manieres différentes.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Trouver par ordre les permutations différentes, dont les régles ci-deſſus nous indiquent les nombres.

Soient les quatre grandeurs *a.b.c.d*, j'écris *a* devant *b*, puis *b* devant *a*; de même *a* devant *c*, puis *c* devant *a*; enſuite *a* devant *d*, puis *d* devant *a*; j'écris de même *b* devant *c*, puis *c* devant *b*; enſuite *b* devant *d*, puis *d* devant *b*; enfin *c* devant *d* & *d* devant *c*; & j'ai douze permutations des quatre grandeurs priſes deux à deux.

ab . ba . ac . ca . ad . da
bc . cb . bd . db . cd . dc

Enſuite comme ces douze produits commencent par *ab*, *ba* où *c*

ne ſe trouve point, je mets *c* après chacun d'eux, puis entre les deux lettres dont ils ſont compoſés, puis devant chacun d'eux ; & je fais la même choſe à l'égard de tous les autres de ces douze produits où *c* ne ſe trouve point.

abc . acb . cab . bac . bca . cba
adc . acd . cad . dac . dca . cda
bdc . bcd . cbd . dbc . dcb . cdb
abd . adb . dab . bad . bda . dba

Puis prenant toujours parmi ces douze produits, ceux où *c* & *d* ne ſe trouvent point, je mets *d* après chacun d'eux, puis entre les deux lettres dont ils ſont compoſés, puis devant chacun d'eux ; & j'ai 24 permutations des quatre grandeurs priſes trois à trois.

abcd . abdc . adbc . dabc . acbd
acdb . adcb . dacb . cabd . cadb
cdab . dcab . bacd . badc . bdac
dbac . bcad . bcda . bdca . dbca
cbad . cbda . cdba . dcba

Enſuite, comme ces 24 commencent par *abc . acb*, &c. où *d* ne ſe trouve point, je prens tous les produits où *d* ne ſe trouve point, & je mets *d* après chacun d'eux, puis entre les deux dernieres lettres dont ils ſont compoſés, puis entre les deux premieres, puis enfin devant chacun d'eux ; & j'ai 24 permutations des quatre grandeurs priſes quatre à quatre.

Second cas des permutations.

IX. Dans ce ſecond cas, chaque grandeur peut ſe combiner avec elle-même autant de fois que l'eſpéce de permutation change, c'eſt-à-dire, que quand on prend les grandeurs deux à deux, la grandeur *a*, par exemple, donne *aa*, quand on les prend trois à trois, la grandeur *a* donne a^3 ; & ainſi des autres.

Ces permutations ſont très-aiſées à faire ; car s'il y a, par exemple, trois grandeurs *a . b . c*, je combine *a* avec elle-même & avec les deux autres ; de même *b* avec elle-même & avec les deux autres ; *c* avec elle-même & avec les deux autres ; & j'ai neuf permutations de ces grandeurs priſes deux à deux.

aa . ab . ac
ba . bb . bc
ca . cb . cc

a^3 *. aab . aac . aba . abb . abc . aca . acb . acc*
baa . bab . bac . bba . b^3 *. bbc . bca . bcb . bcc*
caa . cab . cac . cba . cbb . cbc . cca . ccb . c^3

Enſuite je mets la premiere *a* devant chacune de ces permutations, puis *b* de la même maniere, puis *c* ; & j'ai 27 permutations de ces trois grandeurs priſes trois à trois.

Or en obſervant ces permutations, je vois que le nombre 9 qui marque les grandeurs priſes deux à deux, eſt le quarré du nombre 3 de ces grandeurs, & que 27 qui marque ces grandeurs priſes trois à trois, eſt le cube du même nombre.

Et j'obſerve que ſi j'avois quatre grandeurs, la même choſe arriveroit; car ces grandeurs priſes deux à deux donneroient 16 permutations, & 16 eſt le quarré de 4; qu'en les prenant trois à trois elles en donneroient 64, qui eſt le cube de 4; & qu'en les prenant quatre à quatre elles en donneroient 256, qui eſt la quatriéme puiſſance de 4.

De ſorte que les puiſſances ſucceſſives du nombre des grandeurs qu'on veut permuter, marquent les différentes permutations de ces grandeurs priſes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c.

Ainſi pour ſavoir, par exemple, combien les neuf premiers chiffres peuvent exprimer de nombres différens, en les permutant de cette ſeconde maniere, je multiplie 9 par 9, & le produit 81 marque tous les nombres que peuvent donner ces neuf chiffres étant permutés deux à deux; je multiplie 81 par 9, & le produit 729 marque les nombres qu'ils peuvent donner étant permutés trois à trois; je multiplie 729 par 9, & le produit 6561 marque les nombres qu'ils peuvent donner étant permutés quatre à quatre; & je continuë de même juſqu'à ce que je trouve les nombres qu'ils peuvent donner étant permutés 9 à 9; & faiſant enſuite la ſomme de tous ces produits, & y ajoutant 9 pour les 9 caractéres pris 1 à 1, je trouve qu'ils peuvét former quatre cens trente-cinq millions huit cens quarante-huit mille quarante-neuf nombres différens.

9	1 à 1	
9		
81	2 à 2	
9		
729	3 à 3	
9		
6561	4 à 4	
9		
59049	5 à 5	
9		
531441	6 à 6	
9		
4782969	7 à 7	
9		
43046721	8 à 8	
9		
387420489	9 à 9	

9
81
729
6561
59049
531441
4782969
43046721
387420489
435848049

Et il en ſeroit de même de toute autre queſtion qu'on pourroit propoſer.

Troiſiéme cas des permutations.

X. Ce troiſiéme cas eſt relatif au troiſiéme cas des combinaiſons où il y a des grandeurs égales & des grandeurs inégales.

L'unique régle qu'on peut donner pour ce cas-ci, eſt de prendre toutes les combinaiſons que ces grandeurs égales & inégales peuvent donner, & enſuite de faire ſur chacune de ces combinaiſons les permutations dont elles ſont ſuſceptibles.

Soient donc les quatre grandeurs *a . a . b . b*, dont les deux premieres ſont égales & les deux dernieres le ſont auſſi; je prens les ſix combinaiſons *aa . ab . aab . bb . abb . aabb* qu'elles peuvent donner, ſelon les régles ci-deſſus.

$$\begin{array}{r} a \left\{ \begin{array}{l} aa \end{array} \right\} 1 \\ b \left\{ \begin{array}{l} ab \cdot aab \end{array} \right\} 2 \\ b \left\{ \begin{array}{l} bb \cdot abb \cdot aabb \end{array} \right\} 3 \end{array}$$

Enſuite je prens la premiere *aa* qui ne peut donner que *aa*; puis la ſeconde *ab* qui donne *ab . ba*; puis la troiſiéme *aab* qui donne *aab . aba . baa*; & faiſant la même choſe à l'égard des autres, je trouve que ces quatre grandeurs donnent ſeize permutations; & on feroit de même pour tout autre nombre de grandeurs.

aa . ab . ba . aab . aba . baa . bb
abb . bab . bba . aabb . abab . abba
baab . baba . bbaa.

Mais ſi on veut ſavoir ſimplement le nombre de permutations qu'un certain nombre de grandeurs, dont les unes ſont inégales & les autres égales, peuvent donner étant priſes toutes enſemble, c'eſt-à-dire, priſes quatre à quatre, s'il y en a quatre; cinq à cinq, s'il y en a cinq, &c. comme on fait dans les Anagrammes, où il s'agit de trouver combien d'arrangemens différens on peut donner aux lettres d'un nom, parmi leſquelles il s'en trouve d'égales: voici la régle qu'on peut ſuivre.

Soient les quatre grandeurs *a . a . b . b*, dont les deux premieres ſont égales & les deux autres auſſi, je prens le nombre 2 des permutations que les deux premieres donneroient ſi elles étoient inégales; je prens de même le nombre 2 des permutations que les deux autres donneroient ſi elles étoient auſſi inégales; je multiplie 2 par 2, ce qui donne 4; enſuite je prens le nombre 24 des permutations que ces quatre grandeurs donneroient, étant priſes quatre à quatre, ſi elles étoient différentes; & diviſant 24 par le produit 4, le quotient 6 marque toutes les permutations poſſibles de ces quatre grandeurs priſes quatre à quatre.

Et pour rendre raiſon de ceci, ſuppoſons que les quatre grandeurs ſoient toutes inégales, & appellons-les *m . n . x . z*, ces quatre grandeurs priſes quatre à quatre, donnent 24 permutations : or parmi ces 24, il y en a 4 où les deux premieres *m . n* reſtent toujours premieres, & les deux dernieres reſtent toujours dernieres, & ces quatre ſont *mnxz . nmxz . mnzx . nmzx* ; de même il y en a 4 où les deux premieres deviennent, l'une premiere & l'autre troiſiéme, & ces quatre ſont *mxnz . mznx . nxmz . nzmx* ; on trouvera de même qu'il y en a quatre où les deux premieres reſtent, l'une premiere & l'autre derniere ; quatre autres où les deux premieres ſont, l'une ſeconde & l'autre troiſiéme ; quatre autres où les deux premieres reſtent l'une ſeconde & l'autre derniere, &c. & comme les deux premieres enſemble ne peuvent s'arranger à l'égard des autres, qu'en ſix façons différentes, qui ſont 1°. De reſter premieres toutes les deux. 2°. D'être l'une premiere & l'autre troiſiéme. 3°. D'être l'une premiere & l'autre derniere. 4°. D'être l'une ſeconde & l'autre troiſiéme. 5°. D'être l'une ſeconde & l'autre derniere. 6°. Enfin, d'être toutes les deux dernieres, & que chacune de ces façons ſouffre quatre permutations ; auſſi ces quatre grandeurs ont-elles 24 permutations priſes quatre à quatre ; car 6 par 4 fait 24 : mais ſi on ſuppoſe que les deux premieres ſoient égales & les deux dernieres auſſi, alors chacune des ſix façons, dont les deux premieres peuvent être diſpoſées à l'égard des autres, ne peut donner qu'une permutation au lieu de quatre ; car *aabb* ne peut donner que *aabb*, en laiſſant les deux *aa* premiers ; & *abab* ne peut donner que *abab*, en laiſſant *a* à la premiere & troiſiéme place, & ainſi des autres : donc au lieu de 4 fois 6, ou de 24 permutations, nous n'en aurons que 6 ; & l'on voit aiſément que 6 eſt le quotient de 24 diviſé par 4.

De même, ſoient les cinq grandeurs *a . a . b . b . b*, je prens le nombre 2 des permutations que donneroient les deux premieres ſi elles étoient inégales ; puis le nombre 6, que les trois dernieres donneroient, étant priſes trois à trois, ſi elles étoient inégales ; je multiplie 2 par 6, ce qui fait 12 ; enſuite je prens le nombre 120 des permutations que toutes les cinq donneroient, étant priſes cinq à cinq, ſi elles étoient inégales ; & diviſant 120 par 12, le quotient 10 me marque le nombre de permutations que peuvent donner les cinq grandeurs *a . a . b . b . b* priſes cinq à cinq.

Car ſi nous les ſuppoſons toutes inégales, & que nous les appellions *m . n . x . y . z*, il n'y a que dix différentes façons d'arranger

les deux premieres à l'égard des autres, qui ſont, 1°. De les laiſſer premieres. 2°. De rendre l'une premiere & l'autre troiſiéme. 3°. De rendre l'une premiere & l'autre quatriéme. 4°. De rendre l'une premiere & l'autre cinquiéme. 5°. De rendre l'une ſeconde & l'autre troiſiéme. 6°. De rendre l'une ſeconde & l'autre quatriéme. 7°. De rendre l'une ſeconde & l'autre cinquiéme. 8°. De rendre l'une troiſiéme & l'autre quatriéme. 9°. De rendre l'une troiſiéme & l'autre cinquiéme. 10°. Enfin, de les rendre toutes deux dernieres : or dans chacune de ces façons, les deux premieres ſouffrent deux permutations, qui ſont *mn* & *nm* ; & comme les trois autres ſouffrent ſix permutations entr'elles, il y aura donc ſix permutations avec *mn*, & ſix avec *nm*, ce qui fera douze permutations dans chacune des 10 façons d'arranger les deux premieres à l'égard des autres, & par conſéquent il y aura en tout 10 fois 12 ou 120 permutations de ces cinq grandeurs priſes cinq à cinq ; mais ſuppoſons que les deux premieres ſont égales & les trois dernieres auſſi, alors chaque façon d'arranger les deux premieres à l'égard des autres, ne pourra avoir qu'une permutation au lieu de dix ; car *aabbb* ne peut donner que *aabbb*, en ſuppoſant que les deux premieres reſtent premieres ; de même *ababb* ne peut donner que *ababb*, en ſuppoſant que les deux premieres ſoient l'une premiere & l'autre troiſiéme, & ainſi des autres ; de ſorte qu'au lieu de 10 fois 12, on n'aura que 10 permutations de ces cinq grandeurs ; & il eſt évident que 10 eſt le quotient de 120 diviſé par 12.

Et ſi parmi les grandeurs à permuter il s'en trouvoit d'égales, & une ou pluſieurs inégales, chacune de leur eſpéce, comme dans les cinq grandeurs *a . a . b . b . c* où *c* eſt ſeul de ſon eſpéce, on prendroit de même le nombre 2 des permutations que les deux premieres donneroient ſi elles étoient inégales ; & le nombre 2 des permutations que la troiſiéme & la quatriéme donneroient, ſi elles étoient inégales ; & multipliant 2 par 2, on auroit 4, après quoi on prendroit le nombre 120 des permutations que les cinq donneroient, étant priſes cinq à cinq, ſi elles étoient inégales ; & diviſant 120 par le produit 4, le quotient 30 marqueroit les permutations des cinq grandeurs priſes cinq à cinq ; car les quatre premieres *a . a . b . b*, comme nous avons vû ci-deſſus, ne donnent que ſix permutations, étant priſes quatre à quatre ; & comme dans chacune de ces permutations, la cinquiéme *c* peut être premiere, ſeconde, troiſiéme, quatriéme ou cinquiéme ; chacune de ces ſix permutations en peut donc ſouffrir cinq, ce qui fait 30 ; & par con-

ſéquent la régle que nous venons de donner eſt la même pour tous les cas.

Et en effet, ſi au lieu des cinq grandeurs *a . a . b . b . c* on avoit eu les ſix *a . a . b . b . c . d*, dont les deux dernieres ſont ſeules de leur eſpéce, après avoir fait le produit 4 comme ci-deſſus, on auroit pris le nombre 720 que ces ſix grandeurs donneroient, étant priſes ſix à ſix, ſi elles étoient égales; & diviſant 720 par 4, le quotient 180 marqueroit le nombre des permutations des ſix grandeurs *a . a . b . b . c . d*; car les cinq premieres, comme on vient de voir, en donneroient 30 priſes cinq à cinq; & comme dans chacune de ces 30, la ſixiéme *d* pourroit être premiere, ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme ou ſixiéme, chacune de ces 30 ſouffriroit donc ſix permutations; & par conſéquent on auroit ſix fois 30 ou 180 permutations de ces ſix grandeurs, priſes ſix à ſix.

Cela étant, ſi on demandoit combien de nombres différens on pourroit exprimer avec les ſept chiffres 3 . 3 . 5 . 5 . 5 . 4 . 4, pris ſept à ſept, je prendrois le nombre 2 des permutations que les deux premiers 3 . 3 donneroient s'ils étoient inégaux; puis le nombre ſix que les trois 5 . 5 . 5 donneroient étant pris trois à trois, s'ils étoient inégaux; puis encore le nombre 2 que les deux derniers 4. 4 donneroient, s'ils étoient inégaux; & multipliant enſemble 2. 6 & 2, le produit ſeroit 24; enſuite on prendroit le nombre 5040 des permutations que les ſept chiffres donneroient, étant pris ſept à ſept, s'ils étoient tous inégaux; & diviſant 5040 par le produit 24, le quotient 210 marqueroit le nombre des permutations de ces ſept chiffres pris ſept à ſept: donc ces ſept chiffres, pris ſept à ſept, peuvent former 210 nombres différens; & on réſoudroit de même toutes les queſtions ſemblables.

Des nombres Polygones.

XI. Les nombres *polygones* ſe forment en prenant le premier terme d'une progreſſion Arithmétique, qui commence par l'unité, puis la ſomme des deux premiers termes, puis la ſomme des trois premiers, puis celle des quatre premiers; & ainſi de ſuite.

Le mot de *polygone* ſignifie qui a pluſieurs côtés, & l'on a donné ce nom aux nombres dont il s'agit ici, parce que leurs unités peuvent être rangées de façon à former des figures de pluſieurs côtés, tous égaux entr'eux.

Comme la différence d'une progreſſion Arithmétique peut être

1, ou

1 ou 2, ou 3, ou 4, &c. de-là vient qu'il peut y avoir une infinité de nombres polygones de différentes eſpéces.

Lorſque la différence de la progreſſion eſt 1, les termes ſont les nombres naturels ou du ſecond ordre 1.2.3.4.5.6, &c. les nombres polygones que l'on forme en prenant le premier, puis la ſomme des deux premiers, puis celle des trois premiers, &c. ſont 1.3.6.10.15.21, &c. qui ſont les mêmes que ceux du troiſiéme ordre, & que l'on appelle nombres triangulaires, parce que leurs unités peuvent être rangées en forme de triangle, comme on voit ici, [fig. 1, 2, 3, planche 2.]

Quand la différence de la progreſſion eſt 2, les termes de la progreſſion ſont 1.3.5.7.9.11.13, &c. qui ſont la ſuite des nombres impairs; & les polygones qu'on forme par l'addition continuelle de ces termes, ſont les nombres quarrés 1.4.9.16.25.49, &c. dont on peut ranger les unités en forme de quarrés, [fig. 4, 5 & 6.]

Quand la différence eſt 3, les termes de la progreſſion ſont 1.4.7.10.13, &c. & les polygones qui en ſont formés ſont les nombres pentagones, ou de cinq côtés 1.5.12.22.35.51, &c. [fig. 7, 8 & 9.]

Quand la différence eſt 4, la progreſſion eſt 1.5.9.13.17.21, &c. & les polygones qui en ſont formés ſont les nombres héxagones 1.6.15.28.45.66, &c. [fig. 10, 11 & 12.]

Et à meſure que la différence augmente d'une unité, les polygones formés par la progreſſion ſont, des eptagones, des octagones, des enneagones, des décagones, des ondécagones, des dodécagones; après quoi les polygones s'appellent ſimplement nombres de 13 côtés, de 14, de 15, &c.

Il y a deux choſes principales à obſerver dans les nombres polygones, ſur leſquelles ſeront fondés les problêmes ſuivans; la premiere eſt, que ſi l'on range les unités d'un polygone ſelon la figure qui leur convient, le nombre d'unités que ſon côté comprend eſt égal au nombre des termes de la progreſſion qui a formé le polygone; ainſi le nombre triangulaire 6 comprend trois unités à ſon côté, & la progreſſion 1.2.3 qui l'a formé comprend trois termes; de même le côté du nombre quarré 16 comprend 4 unités, & la progreſſion 1.3.5.7 qui l'a formé comprend 4 termes; & il en eſt de même des autres polygones.

La ſeconde eſt, que le nombre des angles d'un polygone, ou le nombre de ſes côtés (ce qui eſt la même choſe, chaque polygo-

ne aïant autant de côtés que d'angles,) ſurpaſſe toujours de deux unités la différence de la progreſſion qui l'a formé ; ainſi les nombres triangulaires ont trois côtés ou trois angles, & la différence de la progreſſion qui les forme eſt 1, qui eſt moindre que trois de deux unités ; de même les pentagones ont cinq angles, & la différence de la progreſſion dont ils ſont formés eſt 3, qui eſt moindre que 5 de deux unités ; & ainſi des autres.

PROBLEME PREMIER.

Le nombre des angles d'un polygone & ſon côté étant connus, connoître le polygone.

J'appelle n le côté connu du polygone, & b le nombre de ſes angles ; ce que je cherche eſt la valeur du polygone, & je ſais déja que ce polygone eſt la ſomme d'une progreſſion Arithmétique, dont le premier terme eſt 1, que j'appellerai a ; le nombre des termes eſt égal au côté n du polygone, & la différence eſt égale au nombre b, moins deux unités ; ainſi cette différence eſt $b-2$, & la queſtion ſe réduit à chercher la ſomme d'une progreſſion, dont le premier terme eſt a, la différence eſt $b-2$ & le nombre des termes eſt n.

C'eſt pourquoi je multiplie $b-2$ par $n-1$, c'eſt-à-dire, la différence par le nombre des termes, moins un ; & j'ajoute au produit le premier terme a, ce qui me donne le dernier terme, ainſi que nous avons vû en parlant des progreſſions Arithmétiques ; j'ajoute le premier terme au dernier, & j'ai la ſomme des extrêmes ; je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}n$, c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre des termes, & j'ai $an+\frac{1}{2}nnb-nn-\frac{1}{2}bn+n$ qui eſt la ſomme de la progreſſion, & comme $a=1$, j'efface a ; car an eſt la même choſe que n ; & corrigeant enſuite l'expreſſion, j'ai $2n+\frac{1}{2}nnb-nn-\frac{1}{2}bn$; & cette expreſſion marque la ſomme de la progreſſion qui a formé le polygone, & par conſéquent le

$b-2$
$n-1$
$nb-2n-b+2$
a
$a+nb-2n-b+2$ dernier terme.
a
$2a+nb-2n-b+2$ ſomme des extrêmes.
$\frac{1}{2}n$
$an+\frac{1}{2}nnb-nn-\frac{1}{2}bn+n$
$2n+\frac{1}{2}nnb-nn-\frac{1}{2}bn$ ſomme de la progr.

polygone lui-même : voilà donc une formule générale pour toutes sortes de polygones, dont on connoît le côté & le nombre des angles.

Que si on veut en tirer des formules pour chaque espéce de polygones, on mettra dans cette formule 3 au lieu de *b* pour les nombres triangulaires ; 4 pour les quarrés ; 5 pour les pentagones ; 6 pour les héxagones, &c. & l'on aura les formules suivantes, en corrigeant les expressions.

pour les triangles, quarrés, pentagones, héxagones, eptagones.

$$\frac{nn+n}{2} \qquad \frac{2nn+0n}{2} \qquad \frac{3nn-1n}{2} \qquad \frac{4nn-2n}{2} \qquad \frac{5nn-3n}{2}$$

On sera sans doute surpris, qu'au lieu de mettre simplement nn, j'aïe mis $\frac{2nn+0n}{2}$, qui certainement n'est pas une expression corrigée ; mais je l'ai fait afin de montrer aux Commençans comment après avoir deux ou trois de ces formules, on peut les continuer à l'infini sans avoir recours à la formule générale ; car si l'on y fait attention, il y a dans ces formules deux progressions par le moïen desquelles on peut les pousser si loin qu'on voudra ; la premiere de ces progressions est celle des coefficiens du premier terme de chaque formule, c'est-à-dire, du quarré nn, & cette progression commence aux triangles par 1, & va en augmentant toujours d'une unité, ensorte qu'elle forme la suite des nombres naturels 1.2.3.4.5, &c. la seconde est celle du second terme de chaque formule, c'est-à-dire du terme n, & cette progression commence aux triangles par 1, & va en diminuant toujours d'une unité, de sorte qu'elle forme cette suite 1.0.—1.—2.—3.—4, &c. quant au dénominateur 2, il se trouve le même par tout.

De-là il suit, 1°. Que dans chaque formule le coefficient du quarré nn est toujours moindre de deux unités que le nombre des angles du polygone, à cause que la progression 1.2.3.4, &c. commence aux triangles qui ont trois côtés. 2°. Que dans chaque formule, à l'exception de celle des triangles, le coefficient négatif du second terme est toujours moindre de quatre unités que le nombre des angles du polygone : tout cela est évident par les formules mêmes.

Cela posé, si je veux, par exemple, la formule d'un polygone de douze côtés, je prens 10 pour le coefficient du premier terme & —8 pour celui du second, & j'ai $\frac{10nn-8n}{2}$ pour la formule du polygone de douze côtés ; & ainsi des autres.

Pour appliquer ces formules à des exemples, ſoit 4 le côté d'un polygone inconnu, & 3 le nombre de ſes angles; je prens la formule des triangles $\frac{nn+n}{2}$; & comme n repréſente le côté, je mets ſa valeur dans cette formule, & j'ai $\frac{16+4}{2}=\frac{20}{2}=10$, & c'eſt la valeur du polygone; de même ſoit 6 le côté d'un polygone inconnu, dont le nombre des angles eſt 5; je prens la formule des pentagones $\frac{3nn-n}{2}$, & mettant 5 au lieu de n, j'ai $\frac{3\times25-5}{2}=\frac{75-5}{2}=\frac{70}{2}=35$, valeur du polygone; & ainſi des autres.

PROBLEME SECOND.

Un polygone & le nombre de ſes angles étant connus, trouver ſon côté.

J'appelle f le polygone connu, & b le nombre de ſes angles; je ſais que ce polygone eſt la ſomme d'une progreſſion Arithmétique, dont le premier terme eſt 1 que j'appelle a, & le nombre des termes eſt le côté inconnu du polygone; ainſi je connois le premier terme, la ſomme de la progreſſion & la différence qui eſt $b-2$, & il s'agit de trouver le nombre des termes, car le côté du polygone eſt égal au nombre des termes; c'eſt pourquoi j'appelle x le nombre des termes, puis je multiplie $b-2$ par $x-1$, c'eſt-à-dire, par le nombre des termes moins un; & ajoutant le premier terme a au produit, j'ai l'expreſſion du dernier terme; & ajoutant le premier terme a au dernier terme, j'ai la ſomme des extrêmes; & comme $a=1$, j'efface a du terme $2a$; & corrigeant l'expreſſion, j'ai $4+bx-2x-b$, ſomme des extrêmes; je multiplie cette ſomme par la moitié du nombre des termes, & j'ai $2x+\frac{1}{2}bx-xx-\frac{1}{2}bxx$ qui eſt la ſomme de la progreſſion.

$b-2$
$x-1$
$bx-2x-b+2$
a
$a+bx-2x-b+2$ dernier terme.
a
$2a+bx-2x-b+2$
$4+bx-2x-b$ ſomme des extrêmes.
$\frac{1}{2}x$
$2x+\frac{1}{2}bxx-xx-\frac{1}{2}bx$

Or cette ſomme eſt égale au polygone donné f, ainſi j'ai une

équation telle qu'on voit ici ; je multiplie cette équation par 2 ; je l'ordonne enſuite, c'eſt-à-dire, je mets à la tête du premier membre les termes où ſe trouve xx ; enſuite je diviſe de part & d'autre par $b-2$, & j'ai $xx+\frac{4x-bx}{b-2}=\frac{2f}{b-2}$ qui eſt une équation du ſecond degré ; & pour la réſoudre, je prens $\frac{4-b}{2b-4}$ qui eſt la moitié du coefficient $\frac{4-b}{b-2}$ du ſecõd terme, j'en fais le quarré $\frac{16-8b+bb}{4bb-16b+16}$; & j'ajoute ce quarré de part & d'autre, en réduiſant tout ce qui eſt dans le ſecond membre au même dénominateur, ce que je fais en multipliant d'abord le numérateur & le dénominateur de $\frac{2f}{b-2}$ par 2, puis par $2b-4$; je tire la racine quarrée, puis je retranche de part & d'autre $\frac{4-b}{2b-4}$; enfin je tire hors du ſigne radical le diviſeur $4bb-16b+16$, & j'ai la valeur de x exprimée comme on la voit ici, & cette valeur me ſert de formule générale pour toutes ſortes de polygones.

$$2x+\tfrac{1}{2}bxx-xx-\tfrac{1}{2}bx=f$$
$$4x+bxx-2xx-bx=2f$$
$$bxx-2xx+4x-bx=2f$$
$$xx+4x-bx=2f$$
$$\frac{}{b-2}\qquad\frac{}{b-2}$$

$$xx+\frac{4x-bx}{b-2}+\frac{16-8b+bb}{4bb-16b+16}=\frac{2f}{b-2}+\frac{16-8b+bb}{4bb-16b+16}$$

$$xx+\frac{4x-bx}{b-2}+\frac{16-8b+bb}{4bb-16b+16}=\frac{4f}{2b-4}+\frac{16-8b+bb}{4bb-16b+16}$$

$$xx+\frac{4x-bx}{b-2}+\frac{16-8b+bb}{4bb-16b+16}=\frac{8fb-16f+16-8b+bb}{4bb-16b+16}$$

$$x+\frac{4-b}{2b-4}=\sqrt{\frac{8fb-16f+16-8b+bb}{4bb-16b+16}}$$

$$x=\frac{-4+b}{2b-4}+\sqrt{\frac{8fb-16f+16-8b+bb}{4bb-16b+16}}$$

$$x=\frac{-4+b+\sqrt{8fb-16f+16-8b+bb}}{2b-4}$$

Et pour en tirer des formulès pour chaque eſpéce de polygone, je mets 3 au lieu de b pour les triangles ; 4 pour les quarrés ; 5 pour les pentagones, &c. & après avoir corrigé les expreſſions, je trouve les formules ſuivantes :

côté des triang.	des quarrés,	des pentagon.	des héxagon.	des eptagon.
$\frac{-1+\sqrt{8f+1}}{2}$	$\frac{0+\sqrt{16f+0}}{4}$	$\frac{+1+\sqrt{24f+1}}{6}$	$\frac{2+\sqrt{32f+4}}{8}$	$\frac{3+\sqrt{40f+9}}{10}$

Si l'on fait attention à ces formules, on trouvera aiſément le moïen de les pouſſer, ſi l'on veut, à l'infini, ſans le ſecours de la formule générale; car on y trouvera quatre différentes progreſſions. 1°. La progreſſion des dénominateurs, dont le premier terme eſt 2 & la différence eſt 2, en ſorte que la progreſſion eſt 2.4.6.8.10, &c. 2°. La progreſſion du terme des numérateurs qui eſt hors du ſigne; le premier terme de cette progreſſion eſt —1 & la différence eſt 1, en ſorte que la progreſſion eſt —1+0+1+2+3, &c. 3°. La progreſſion du coefficient du premier terme qui eſt ſous le ſigne; ſon premier terme eſt 8 & ſa différence eſt 8, ainſi la progreſſion eſt 8.16.24.32, &c. 4°. Enfin, la progreſſion du ſecond terme qui eſt ſous le ſigne, & cette progreſſion contient les quarrés 1.0.1.4.9, &c. des termes —1+0.+1+2.+3,&c. qui ſont hors du ſigne.

Si donc je veux trouver, par exemple, la formule du côté d'un polygone de 12 angles; comme la progreſſion poſitive +1+2+3+4, &c. des termes qui ſont hors du ſigne ne commence qu'au pentagone, je retranche 4 de 12 & j'écris 8 pour ce terme, car du pentagone au dodécagone il n'y a que 8 formules; de même comme la progreſſion 8.16.24.32, &c. commence au triangle, & que du triangle au dodécagone il y a 10 formules, je prens le dixiéme terme de la progreſſion Arithmétique 8.16.24.32, &c. ce dixiéme terme eſt 90, c'eſt pourquoi j'écris $\sqrt{90f}$, à quoi j'ajoute le quarré 64 du terme 8 qui eſt hors le ſigne, & j'ai $8+\sqrt{90f+64}$ qui eſt le numérateur de la formule que je cherche; & pour avoir le dénominateur, comme la progreſſion 2.4.6.8, &c. commence au triangle, je prens le dixiéme terme de cette progreſſion qui eſt 20, & j'ai enfin $\frac{8+\sqrt{90f+64}}{20}$ qui eſt la formule du côté d'un polygone de douze angles; & ainſi des autres.

Pour appliquer ces formules à des exemples, ſoit le polygone donné 21 & le nombre de ſes angles 3, je prens la formule du côté des triangles qui eſt $\frac{-1+\sqrt{8f+1}}{2}$; & mettant 21 au lieu de f qui repréſente le polygone, j'ai $\frac{-1+\sqrt{8\times 21+1}}{2} = \frac{-1+\sqrt{168+1}}{2} = \frac{-1+\sqrt{169}}{2} = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6$; ainſi 6 eſt le côté de ce triangle.

De même, ſoit le polygone donné 35 & le nombre de ſes angles

5., je prens la formule $\frac{+1+\sqrt{24f+1}}{6}$ des pentagones ; & mettant 35 au lieu de f, j'ai $\frac{1+\sqrt{24\times35+1}}{6}=\frac{1+\sqrt{840+1}}{6}=\frac{1+\sqrt{841}}{6}=\frac{1+29}{6}=\frac{30}{6}=5$, ainsi 5 eſt le côté de ce pentagone ; & ainſi des autres.

Au reſte, il faut obſerver que dans les ſuites des différens polygones que nous avons données ci-deſſus, l'unité doit toujours être comptée pour le premier polygone ; & qu'ainſi dans la ſuite des triangles 1 . 3 . 6 . 10, &c. nous comptons l'unité pour le premier triangle ; & de même dans la ſuite des pentagones 1 . 5 . 12 . 22 . 35, &c. l'unité eſt le premier pentagone, & ainſi des autres ; & la raiſon en eſt que toutes les propriétés des polygones conviennent en quelque façon à l'unité ; car les formules précédentes ſe trouvent également vraïes ſi on met 1 au lieu de f, & les formules du problême précédent ſe trouveront auſſi vraïes ſi on met 1 au lieu de n.

Comme il y a certains nombres dont les unités peuvent former différens polygones, comme, par exemple, le nombre 15 qui peut former ou un triangle, ou un héxagone, il peut ſe faire auſſi qu'en propoſant de trouver le côté d'un polygone, la queſtion ſoit indéterminée, ce qui arrive lorſqu'on ne dit point quel eſt le nombre des angles du polygone propoſé ; & alors les formules de ce problême, peuvent ſervir à déterminer la queſtion ; car ſoit le polygone 15, dont on nous cache le nombre des angles & dont on nous demande le côté, je prens la formule $\frac{-1+\sqrt{8f+1}}{2}$, & mettant 15 au lieu de f, j'ai $\frac{-1+\sqrt{121}}{2}$, & comme 121 eſt un quarré parfait dont on peut extraire la racine qui eſt 11, je juge par-là que ce nombre eſt triangulaire, & que ſon côté eſt $\frac{-1+11}{2}=\frac{10}{2}=5$; je prens de même la formule $\frac{0+\sqrt{16f+0}}{4}$, & mettant 15 au lieu de f, j'ai $\frac{0+\sqrt{240+0}}{4}$; mais comme 240 n'eſt pas un quarré dont on puiſſe extraire la racine, je juge de-là que 15 n'eſt pas un quarré.

Je trouve de même que la formule des pentagones ne donne point un quarré parfait, ſous le ſigne dont on puiſſe extraire la racine ;

ainſi je prens la formule $\frac{2+\sqrt{32f+4}}{8}$, & mettant 15 au lieu de f, j'ai $\frac{2+\sqrt{480+4}}{8}=\frac{2+\sqrt{484}}{8}$; & comme 484 eſt un quarré dont la racine eſt 22, je juge de-là que 15 eſt un nombre héxagone dont le côté eſt $\frac{2+22}{8}=\frac{24}{8}=3$.

Je fais de même à l'égard des formules de polygones ſupérieurs, & je n'en trouve aucune qui donne ſous le ſigne radical un nombre quarré dont on puiſſe extraire la racine, ce qui me fait juger que 15 ne peut être qu'un triangle ou un héxagone; & ainſi des autres.

Des Polygones centraux.

XII. Si l'on prend la ſuite 1.3.6.10.15.21, &c. des nombres triangulaires ſimples, & qu'on la faſſe commencer par zero, enſorte que la ſuite ſoit 0.1.3.6.10.15.21, &c. & qu'après avoir multiplié chaque terme de cette ſuite par le nombre 3 des angles d'un triangle, on ajoute l'unité à chaque produit, on aura une nouvelle ſuite 1.4.10.19.31.46.64, &c. qu'on appelle ſuite des nombres *triangulaires centraux*, [fig. 13, 14, 15 & 16, planche 2.]

De même, ſi on multiplie la même ſuite 0.1.3.6.10.15.21, &c. par le nombre 4 des angles d'un quarré, & qu'à chaque produit on ajoute l'unité, on aura une nouvelle ſuite 1.5.13.25.41.61.85, &c. qu'on appelle *quarrés centraux*, [fig. 17, 18, 19 & 20.]

Et ſi on multiplie 0.1.3.6.10.15.21, &c. par le nombre 5 des angles d'un pentagone, & qu'à chaque produit on ajoute l'unité, on aura une nouvelle ſuite 1.6.16.31.76.106, &c. qu'on appelle *pentagones centraux*, [fig. 21, 22 & 23.]

Et ſi on multiplie la même ſuite 0.1.3.6.10.15.21, &c. par le nombre 6 des angles d'un héxagone, & qu'à chaque produit on ajoute l'unité, on aura une nouvelle ſuite 1.7.19.37.61.91.127, &c. qu'on appelle *héxagones centraux*.

Et on aura de la même façon la ſuite des *eptagones centraux*, des *octogones centraux*, &c. [fig. 24, 25 & 26.]

Ce qu'il y a à obſerver dans ces polygones, eſt que le côté d'un polygone central excéde toujours d'une unité le côté du triangle qui l'a formé; ainſi le triangle central 10 a pour ſon côté 3, & le triangle 3 qui l'a formé n'a pour ſon côté que 2; de même le côté de

de l'héxagone central 37 eſt 4, & le côté du triangle 6 qui l'a formé eſt 3; & ainſi des autres.

PROBLEME PREMIER.

Un polygone central & ſon côté étant connus, connoître le nombre de ſes angles.

J'appelle n le côté du polygone central connu, f le polygone, x le nombre des angles; par conſéquent le côté du triangle qui l'a formé ſera $n-1$: or la progreſſion qui a formé le triangle a pour premier terme 1, que j'appellerai a, & pour différence 1, que j'appellerai d; ainſi je connois le premier terme de cette progreſſion, la différence, le nombre des termes qui eſt $n-1$, & il s'agit d'en trouver la ſomme qui eſt le triangle; car ce triangle étant connu, je retrancherai 1 du polygone f, & le reſte $f-1$ ſera égal au triangle multiplié par le nombre des angles que je cherche; ainſi diviſant $f-1$ par le triangle trouvé, le quotient ſera le nombre x des angles.

Pour cela donc je multiplie la différence d par le nombre des termes, moins 1, c'eſt-à-dire par $n-2$; car le nombre des termes eſt $n-1$, & le produit eſt $dn-2d$, auquel j'ajoute le premier terme a, & j'ai $a+dn-2d$, dernier terme; j'ajoute le premier terme a à ce dernier terme, & j'ai $2a+dn-2d$, ſomme des extrêmes; & mettant au lieu de a & de d leur valeur 1, j'ai n, ſomme des extrêmes; je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre des termes, & j'ai $\frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n$, ſomme de la progreſſion & valeur du triangle.

$$\begin{array}{ll} d & \\ n-2 & \\ \hline dn-2d & \\ a & \\ \hline a+dn-2d & \text{dernier terme.} \\ a & \\ \hline 2a+dn-2d & \\ n & \text{ſomme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}n-\frac{1}{2} & \\ \hline \frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n & \text{ſomme la progreſſion.} \end{array}$$

$$\frac{f-1}{\frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n}=x$$

$$\frac{2f-2}{nn-n}=x$$

Je retranche 1 du polygone central f, & je diviſe le reſte $f-1$ par le triangle trouvé $\frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n$, & j'ai $\frac{f-1}{\frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n}=\frac{2f-2}{nn-n}$ qui eſt la formule générale, par le nombre de[illegible]gles d'un polygone central, quel qu'il ſoit.

Ainſi ſi $n=4$ & $f=31$, mettant ces valeurs dans la formule, on aura $\frac{62-2}{16-4}=\frac{60}{12}=5$; & par conſéquent 5 ſera le nombre des angles du polygone central 31, c'eſt-à-dire, que ce polygone ſera un pentagone; & ainſi des autres.

PROBLEME SECOND.

Un polygone central & le nombre de ſes angles étant connus, connoître ſon côté.

J'appelle le polygone f, ſon côté inconnu x, & b le nombre de ſes angles: donc le côté du triangle qui l'a formé ſera $x-1$ & la progreſſion de ce triangle aura pour premier terme $1=a$, & pour différence $1=d$; & il s'agit de connoître la ſomme de cette progreſſion qui eſt égale au triangle; car cette ſomme une fois connuë, je la multiplierai par le nombre b des angles; & ajoutant 1 au produit, j'aurai une ſomme égale au polygone f, de laquelle je tirerai une valeur de x.

Pour cela, je multiplie la différence d par $x-2$, c'eſt-à-dire, par le nombre des termes, moins un; & ajoutant au produit le premier terme a, j'ai $a+dx-2d$, dernier terme; j'ajoute le premier terme a à ce dernier terme, & j'ai $2a+dx-2d$, ſomme des extrêmes.

$$\begin{array}{l} d \\ x-2 \\ \hline dx-2d \\ a \\ \hline a+dx-2d \quad \text{dernier terme.} \\ a \\ \hline 2a+dx-2d \\ x \quad \text{ſomme des extrêmes.} \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}x \quad \text{triangle.} \\ b \\ \hline \frac{1}{2}bxx-\frac{1}{2}bx \\ 1 \\ \hline \frac{1}{2}bxx-\frac{1}{2}bx+1=f \\ bxx-bx+2=2f \\ bxx-bx=2f-2 \\ xx-x=\frac{2f-2}{b} \\ xx-x+\frac{1}{4}=\frac{2f-2}{b}+\frac{1}{4} \\ xx-x+\frac{1}{4}=\frac{8f-8+b}{4b} \\ x-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{8f-8+b}{4b}} \\ x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{8f-8+b}{4b}} \end{array}$$

me des extrêmes ; mais comme a & d ſont chacun égaux à 1, je mets cette valeur, & j'ai x, ſomme des extrêmes ; je multiplie par la moitié $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ du nombre des termes, & j'ai $\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}x$, valeur du triangle ; je multiplie cette valeur par le nombre des angles b ; & ajoutant 1 au produit, j'ai $\frac{1}{2}bxx-\frac{1}{2}bx+1$, qui eſt la valeur du polygone, ainſi j'ai $\frac{1}{2}bxx-\frac{1}{2}bx+1=ſ$; & multipliant par 2, j'ai $bxx-bx+2=2ſ$; je retranche 2 de part & d'autre, puis je diviſe par b, & j'ai $xx-x=\frac{2ſ-2}{b}$, qui eſt une équation du ſecond degré ; j'ajoute de part & d'autre le quarré $\frac{1}{4}$ de la moitié du coefficient du ſecond terme x ; & réduiſant les fractions du ſecond membre au même dénominateur, puis tirant la racine quarrée, j'ai $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{8ſ-8+b}}{4b}$; & ajoutant $\frac{1}{2}$ de part & d'autre, j'ai $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ+8+b}}{4b}$, qui eſt une formule générale pour trouver le côté d'un polygone central, quel qu'il ſoit.

Et pour en tirer des formules pour chaque eſpéce de polygone, je mets 3 au lieu de b pour les triangles ; 4 pour les quarrés ; 5 pour les pentagones, &c. & j'ai les formules ſuivantes :

côté des triang.	des quarrés,	des pentagon.	des héxagon.	des eptagon.
$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ-9}}{12}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ-4}}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ-3}}{20}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ-2}}{24}$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ-1}}{28}$

On pourroit continuer ces formules à l'infini, ſans avoir le ſecours de la formule générale, ainſi que nous avons fait pour les formules des polygones ſimples ; ce que je laiſſe à chercher aux Commençans pour les exercer.

A préſent, ſoit le polygone propoſé 37 & le nombre de ſes angles 6 ; je prens la formule des héxagones $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8ſ-2}}{24}$, & mettant 37 au lieu de $ſ$, j'ai $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8\times 37-2}}{24}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{296-2}}{24}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{294}{24}}=\frac{7}{2}+\sqrt{12\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=4$, ainſi le côté de ce polygone eſt 4 ; & il en ſeroit de même de tout autre polygone propoſé.

PROBLEME TROISIE'ME.

Le côté d'un polygone central, & le nombre de ſes angles étant connus, connoître le polygone.

J'appelle le côté n, le nombre des angles b & le polygone inconnu x : donc le côté du triangle qui l'a formé eſt $n-1$; ainſi le premier terme de la progreſſion de ce triangle eſt $1=a$, la difference $1=d$, le nombre des termes eſt $n-1$, & il s'agit d'en trouver la ſomme ; car cette ſomme étant égale au triangle, je la multiplierai par le nombre des angles b ; & ajoutant 1 à la ſomme, j'aurai la valeur du polygone x, qui par-là deviendra connu.

Je multiplie donc la difference d par $n-2$; j'ajoute le premier terme a au produit, & j'ai le dernier terme $a+dn-2d$; j'ajoute encore le premier terme au dernier terme, & mettant les valeurs de a & de d, j'ai n, ſomme des extrêmes ; je multiplie cette ſomme par $\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$, & j'ai $\frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n$, valeur du triangle ; je multiplie cette valeur par b, & ajoutant 1 au produit, j'ai $\frac{1}{2}bnn-\frac{1}{2}bn+1$, valeur du polygone, ou bien réduiſant 1 en fraction $\frac{bnn-bn+2}{2}$, qui eſt une formule générale pour toutes ſortes de polygones centraux.

d
$n-2$
$dn-2d$
a
$a+dn-2d$ dernier terme.
a
$2a+dn-2d$
n
$\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$ ſomme des extrêmes.
$\frac{1}{2}nn-\frac{1}{2}n$ triangle.
b
$\frac{1}{2}bnn-\frac{1}{2}bn$
1
$\frac{1}{2}bnn-\frac{1}{2}bn+1=x$
$\frac{bnn-bn+2}{2}$ formule générale.

Et pour en tirer des formules pour chaque eſpéce de polygones centraux, je mets 3 au lieu de b pour les les triangles ; 4 pour les quarrés ; 5 pour les pentagones, &c. & j'ai les formules ſuivantes :

triangles.	quarrés.	pentagones.	héxagones.
$\frac{3nn-3n+2}{2}$	$\frac{4nn-4n+2}{2}$	$\frac{5nn-5n+2}{2}$	$\frac{6nn-6n+2}{2}$, &c.

Et pour appliquer ces formules à des exemples, ſoit le côté d'un polygone central 3, & le nombre des angles 5; je prens la formule du côté du pentagone $\frac{5nn-5n+2}{2}$, je ſubſtituë 3 à la place de n, & j'ai $\frac{5\times 9-5\times 3+2}{2}=\frac{45-15+2}{2}=\frac{32}{2}=16$; ainſi 16 eſt le polygone propoſé.

De même ſoit le côté 4, le nombre des angles 6; je prens la formule du côté de l'héxagone $\frac{6nn-6n+2}{2}$, & mettant 4 au lieu de n, j'ai $\frac{6\times 16-6\times 4+2}{2}=\frac{96-24+2}{2}=\frac{74}{2}=37$; ainſi 37 eſt le polygone cherché; & de même des autres.

Que ſi on propoſoit un polygone, ſans faire connoître ni le côté, ni le nombre des angles, la queſtion pourroit être indéterminée, mais on la détermineroit en appliquant ſucceſſivement les formules du problême ſecond; car ſuppoſons le polygone central 31, dont on ne connoît ni le côté, ni le nombre des angles; je prens la formule des triangles $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8f-5}}{12}$, & ſuſtituant 31 au lieu de f, j'ai $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8\times 31-5}}{12}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{248-5}}{12}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{243}{12}}$; & comme $\frac{243}{12}$ ou $20\frac{1}{4}$ eſt un nombre quarré, dont la racine eſt $4\frac{1}{2}$, je juge de-là que 31 eſt un triangle, dont le côté eſt $\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}=5$.

Je prens de même la formule des quarrés; mais comme en ſubſtituant 31 au lieu de f, je trouve que ce qui eſt ſous le ſigne radical n'eſt pas un quarré dont on puiſſe extraire la racine; je vois par-là que 31 n'eſt pas un quarré.

Je prens de même la formule des pentagones $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8f-3}}{20}$; & mettant 31 au lieu de f, j'ai $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{248-3}}{20}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{245}{20}}=\frac{1}{2}+\sqrt{12\frac{1}{4}}$; & comme $12\frac{1}{4}$ eſt un quarré dont la racine eſt $3\frac{1}{2}$, je juge de-là que 31 eſt un pentagone dont le côté eſt $\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=4$.

Et faiſant la même choſe à l'égard des formules plus élevées, je n'en trouve aucune qui donne un quarré parfait ſous le ſigne radical, c'eſt pourquoi je dis: que 31 ne peut être qu'un triangle ou un pentagone; & ainſi des autres.

De l'Arithmétique des infinis.

XIII. On ſuppoſe dans l'Arithmétique des infinis, d'une part une progreſſion Arithmétique infinie, dont le premier terme eſt zero & la différence eſt 1, enſorte que la progreſſion ſoit 0.1.2.3.4.5.6, &c. à l'infini; & de l'autre une ſuite dont le nombre des termes ſoit égal à celui de la progreſſion, & dont chaque terme ſoit égal au dernier & plus grand de cette progreſſion; par-là on a deux ſuites, l'une dont les termes vont toujours en augmentant, & l'autre dont les termes ſont tous égaux; & l'on demande quel eſt le rapport de la ſomme des termes croiſſans à la ſomme des termes égaux; ou bien quel eſt le rapport de la ſomme des quarrés, des cubes, des quatriémes puiſſances, &c. des termes croiſſans à la ſomme des quarrés, des cubes, des quatriémes puiſſances, &c. des termes égaux; ou enfin quel eſt le rapport des racines ſecondes, troiſiémes, quatriémes, &c. des termes croiſſans aux racines ſecondes, troiſiémes, quatriémes, &c. des termes égaux; & celui des racines des puiſſances des termes croiſſans à celui des racines des puiſſances des termes égaux.

Pour ſatisfaire à ces queſtions, appellons le premier terme de la progreſſion zero, la différence d, & le dernier terme z ou zd; car l'un & l'autre eſt la même choſe, attendu que d ne vaut que 1: donc le nombre des termes ſera $z+1$; car à cauſe que le premier terme eſt zero, le dernier terme ſera moindre d'une unité que le nombre des termes; faiſant donc la ſomme des extrêmes $0+zd$, qui n'eſt autre choſe que zd, & multipliant cette ſomme par $\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}$ moïtié du nombre des termes, nous aurons $\frac{zzd+zd}{2}$, ſomme de la progreſſion.

D'autre part, prenant le plus grand terme zd, & le multipliant par le nombre des termes $z+1$, nous aurons $zzd+zd$, qui ſera la ſomme des termes égaux; & comparant cette ſomme avec celle de la progreſſion $\frac{zzd+zd}{2}$, nous trouverons que la ſomme des termes égaux eſt double de la ſomme des termes croiſſans: voilà donc déja une des queſtions ci-deſſus réſoluë.

Pour ſavoir le rapport de la ſomme des quarrés de la progreſſion à la ſomme des quarrés des termes égaux, faiſons la ſomme des quarrés de la progreſſion par la méthode que nous avons enſeignée, en parlant des progreſſions Arithmétiques, c'eſt-à-dire, prenons le terme qui viendroit immédiatement après le dernier ter-

me zd, s'il étoit poſſible de continuer la progreſſion ; ce terme, que nous appellerons l'*excédent*, eſt $zd+d$; faiſons-en le cube $z^3d^3+3zzd^3+3zd^3+d^3$, à cauſe que nous cherchons la ſomme des quarrés ; enſuite prenant pour guide le troiſiéme rang $a^3+3aab+3abb+b^3$ de la Table des puiſſances ; retranchons du cube de l'excédent, 1°. Le cube du premier terme zero. 2°. Le cube de la différence d multiplié par le nombre des termes $z+1$, ce qui fait zd^3+d^3. 3°. La ſomme de la progreſſion multipliée par 3, ce qui fait $\frac{3zzd+3zd}{2}$. 4°. Diviſons le reſte par le triple de la différence d, c'eſt-à-dire par $3d$, & le quotient ſera la ſomme des quarrés de la progreſſion.

Or en retranchant zd^3+d^3, le reſte eſt $z^3d^3+3zzd^3+2zd^3$; & en retranchant $\frac{3zzd+3zd}{2}$, où nous pouvons conſidérer d comme s'il y avoit d^3, attendu que d n'étât que 1, d^3 ou d ſont la même choſe, le reſte eſt $z^3d^3+\frac{3zzd^3}{2}+\frac{zd^3}{2}$; & comme le ſecond terme contient un entier & demi, il peut ſe réduire à $zzd^3+\frac{zzd^3}{2}$, & par conſéquent le reſte eſt $z^3d^3+zzd^3+\frac{zzd^3+zd^3}{2}$; & diviſant le reſte par $3d$, nous avons $\frac{z^3d^3}{3d}+\frac{zzd^3}{6d}+\frac{zzd^3}{6d}+\frac{zd^3}{6d}$, ou bien en retranchât d des numérateurs & des dénominateurs $\frac{z^3dd+zzdd}{3}+\frac{zzdd}{6}+\frac{zzdd}{6}+\frac{zdd}{6}$.

$zd+d$
$zd+d$
$zzdd+2zdd+dd$
$zd+d$
$z^3d^3+2zzd^3+zd^3$
$+zzd^3+2zd^3+d^3$
$z^3d^3+3zzd^3+3zd^3+d^3$ cube de l'excéd.
zd^3+d^3 cube de la différence multipliée par le nomb. des termes.
$z^3d^3+3zzd^3+2zd^3$
$\frac{3zzd+3zd}{2}$ ſomme de la progreſſion multipliée par 3.
$z^3d^3+\frac{3zzd^3}{2}+\frac{zd^3}{2}$ reſte qui ſe réduit à l'expreſſion ſuivante.
$z^3d^3+zzd^3+\frac{zzd^3+zd^3}{2}$
$\frac{z^3d^3+zzd^3}{3d}+\frac{zzd^3+zd^3}{6d}$ quotient de la diviſion.
$\frac{z^3dd+zzdd}{3}+\frac{zzdd+zdd}{6}$
$\frac{z^3dd+zzdd}{3}+\frac{z^3dd+zzdd}{6z}$ ſom. des quarrés de la prog.
zd
zd
$zzdd$ quarré du plus grand terme.
$z+1$
$z^3dd+zzdd$ ſomme des quarrés égaux.

$\frac{zzdd+zdd}{6}$; & afin que le numérateur de la ſeconde fraction ſoit le même que celui de la premiere, multipliant le numérateur & le dénominateur de la ſeconde par z, nous avons $\frac{z^3dd+zzdd}{3}+\frac{z^3dd+}{6z}$ $zzdd$ qui eſt la ſomme des quarrés de la progreſſion.

D'autre part, prenant le quarré $zzdd$ du plus grand terme zd, & le multipliant par le nombre des termes $z+1$, le produit $z^3dd+zzdd$ eſt la ſomme des quarrés égaux ; & pour connoître le rapport de ces quarrés aux quarrés de la progreſſion, nous n'avons qu'à diviſer de part & d'autre par $z^3dd+zzdd$, & le quotient des quarrés égaux ſera 1, & celui des quarrés de la progreſſion ſera $\frac{1}{3}+\frac{1}{6z}$: or ce dernier quotient contient deux fractions ; la premiere qui eſt $\frac{1}{3}$ & la ſeconde qui eſt $\frac{1}{6z}$; & cette derniere fraction peut être conſidérée comme égale à zero, à cauſe de ſon infinie petiteſſe ; car z étant égal au dernier terme de la progreſſion qui eſt infini, le dénominateur $6z$ eſt donc infiniment grand ; & comme le quotient d'une diviſion devient d'autant plus petit, que le dividende eſt petit & le diviſeur eſt grand, il s'enſuit que le quotient de $\frac{1}{6z}$ ſera infiniment petit, attendu que le diviſeur eſt infiniment grand & le dividende eſt le plus petit nombre entier qu'il puiſſe être : donc $\frac{1}{6z}$ peut être conſidéré comme zero, & par conſéquent $\frac{1}{3}+\frac{1}{6z}$ ne vaudra qu'un tiers : donc puiſque les quarrés égaux, & ceux de la progreſſion aïant été diviſés par le même diviſeur $z^3dd+zzdd$ ſont entr'eux en même raiſon qu'avant leur diviſion, il s'enſuit qu'ils ſont entr'eux comme 1 eſt à $\frac{1}{3}$, ou comme 3 eſt à 1, c'eſt-à-dire, que la ſomme des quarrés égaux eſt triple de celle des quarrés de la progreſſion.

Pour trouver le rapport de la ſomme des cubes égaux à la ſomme des cubes de la progreſſion, élevons le terme excédent à la quatriéme puiſſance, à cauſe que nous cherchons la ſomme des cubes ; puis prenant pour guide le quatriéme rang $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$ de la Table des puiſſances, retranchons de la quatriéme puiſſance de l'excédent, 1°. La quatriéme puiſſance du premier terme zero de la progreſſion.

2°. La quatriéme puiſſance de la différence d, multipliée par le nombre

nombre des termes $z+1$, ce qui fait zd^4+d^4, le reſte ſera $z^4d^4+4z^3d^4+6zzd^4+3zd^4$.

$z^4d^4+4z^3d^4+6z^2d^4+4zd^4+d^4$ quatriéme puiſſance de l'excédent.
zd^4+d^4 quatriéme puiſſance de la différence, multip. par le nomb. des termes.

$z^4d^4+4z^3d^4+6z^2d^4+3zd^4$
$\frac{4z^2d^4+4zd^4}{2}$

$\frac{zzd+zd}{2}$
$4d^3$
$\frac{4zzd^4+4zd^4}{2}$
ſomme des termes, multipliée par $4d^3$.

$z^4d^4+4z^3d^4+4zzd^4+zd^4$
$\frac{6z^3d^4+6zzd^4}{3}$
$z^4d^4+2z^3d^4+2zzd^4+zd^4$
$\frac{6zzd^4+6zd^4}{6}$

$\frac{z^3dd+zzdd}{3}$ $+\frac{z^3dd+zzdd}{6z}$
ou $\frac{zzdd+zdd}{6}$
$6dd$
$\frac{6z^3d^4+6zzd^4}{3}$ $+\frac{6zzd^4+6zd^4}{6}$
ſomme des quarrés, multipliée par $6dd$.

$z^4d^4+2z^3d^4+zzd^4$
ou $z^4d^4+z^3d^4+z^3d^4+zzd^4$
ou $z^4d^4+z^3d^4+\frac{z^4d^4+z^3d^4}{z}$ reſte.

$\frac{z^4d^4+z^3d^4}{4d}+\frac{z^4d^4+z^3d^4}{4dz}$
ou $\frac{z^4d^3+z^3d^3}{4}+\frac{z^4d^3+z^3d^3}{4z}$ ſomme des cubes de la progreſſion.

z^3d^3 cube du plus grand terme.
$z+1$
$z^4d^3+z^3d^3$ ſomme des cubes égaux.

3°. Retranchons-en la ſomme des termes multipliée par quatre cubes de la différence, & le reſte ſera $z^4d^4+4z^3d^4+4zzd^4+zd^4$.

4°. Otons-en la ſomme des quarrés, multipliée par $6dd$, cette ſomme, comme on a vû ci-deſſus, eſt $\frac{z^3dd+zzdd}{3}+\frac{z^3dd+zzdd}{6z}$, ou

en multipliant la ſeconde fraction par z, $\frac{z^3dd+zzdd+z^2dd+zdd}{3}$; & le produit de cette ſomme par $6dd$, c'eſt-à-dire, par ſix quarrés de la différence, eſt $\frac{6z^3d^4+6zzd^4+6zzd^4+6zd^4}{3}$; & retranchant d'abord du dernier reſte, la premiere de ces fractions, puis la ſeconde, le reſte eſt $z^4d^4+2z^3d^4+z^2d^4$, ou bien, en partageant le ſecond terme en deux $z^4d^4+z^3d^4+z^3d^4+z^2d^4$, ou enfin en réduiſant les deux derniers en une fraction, dont le dénominateur ſoit z, le reſte $z^4d^4+z^3d+\frac{z^3d+z^2d}{z}$; & diviſant ce reſte par $4d$, c'eſt-à-dire par quatre fois la différence, le quotient eſt $\frac{z^4d^4+z^3d^4}{4d}+\frac{z^3d^4+z^3d^4}{4zd}$, qui ſe réduit, en corrigeant l'expreſſion, à $\frac{z^4d^3+z^3d^3}{4}+\frac{z^4d^3+z^3d^3}{4z}$; & ce quotient eſt la ſomme des cubes de la progreſſion.

D'autre part, prenant le cube z^3d^3 du plus grand terme, & le multipliant par le nombre des termes $z+1$, le produit $z^4d^3+z^3d^3$ eſt la ſomme des cubes égaux; & pour connoître le rapport de cette ſomme à celle des cubes de la progreſſion, nous n'avons qu'à diviſer les deux ſommes par z^4d+z^3d, & le quotient de la ſomme des égaux ſera 1, & celui des cubes de la progreſſion ſera $\frac{1}{4}+\frac{1}{4z}$; & comme la fraction $\frac{1}{4z}$ eſt infiniment petite & peut être regardée comme zero, ce dernier quotient ſera $\frac{1}{4}$: donc la ſomme des cubes égaux eſt à celle des cubes de la progreſſion, comme 1 eſt à $\frac{1}{4}$ ou comme 4 eſt à 1, c'eſt-à-dire, que la ſomme des cubes égaux eſt quadruple de la ſomme des cubes de la progreſſion.

Les deux calculs que nous venons de faire pour trouver la ſomme des quarrés & celle des cubes de la progreſſion, paroîtront un peu ſurprenans aux Commençans, à cauſe des différens changemens que nous avons faits pendant les calculs, changemens qui ſemblent d'abord auſſi inutiles qu'embarraſſans; cependant il faut qu'ils prennent garde que comme nous cherchions le rapport des quarrés de la progreſſion à la ſomme des quarrés égaux, & celui des cubes de la progreſſion à la ſomme des cubes égaux, il a fallu néceſſairement réduire l'expreſſion des quarrés & des cubes de la progreſſion, de façon que les numérateurs de cette expreſſion fuſſent compoſés des mêmes termes que la ſomme des quarrés ou des cubes égaux; attendu qu'en agiſſant ainſi, il ne nous eſt plus reſté

qu'à diviſer de part & d'autre par la ſomme des quarrés ou des cubes, & les quotiens nous ont donné les rapports que nous cherchions, ce qu'il ne nous auroit pas été facile de trouver ſi nous avions pris une autre voïe; & ceci doit faire voir ce que nous avons déja dit ailleurs, que la découverte des problêmes dans l'Analyſe dépend preſque toujours, ou du moins en partie, des expreſſions dont on ſe ſert, & de l'adreſſe de les trouver de pluſieurs façons différentes pour venir à ſon but; & c'eſt ce qu'on obſervera dans les expreſſions ſuivantes pour la ſomme des quatriémes & cinquiémes puiſſances, dont je mettrai le calcul au long ſans m'arrêter à l'expliquer comme j'ai fait ci-deſſus.

Pour trouver donc le rapport des quatriémes puiſſances des termes de la progreſſion à la ſomme des quatriémes puiſſances des termes égaux, je prens la cinquiéme puiſſance du terme excédent, & prenant enſuite pour guide le cinquiéme rang $a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$ de la Table des puiſſances, je retranche de la cinquiéme puiſſance de l'excédent ce que ce rang m'indique; & diviſant enſuite par $5d$, j'ai la ſomme des quatriémes puiſſances de la progreſſion, telle qu'on voit ci-deſſous.

$z^5d^5+5z^4d^5+10z^3d^5+10zzd^5+5zd^5+d^5$ 5e puiſſance de l'excédent.
zd^5+d^5 5e puiſſance de la différence multip. par le nomb. des term.

$z^5d^5+5z^4d^5+10z^3d^5+10zzd^5+4zd^5$
$\frac{5zzd^5+5zd^5}{2}$

$\frac{zzd+zd}{2}$
$5d^4$

$\frac{5zzd^5+5zd^5}{2}$
ſomme des termes multipliée par $5d^4$.

$z^5d^5+5z^4d^5+10z^3d^5+\frac{15zzd^5}{2}+\frac{3zd^5}{2}$
$\frac{10z^3d^5+10z^2d^5}{3}$

$z^5d^5+5z^4d^5+\frac{20z^3d^5}{3}+\frac{25zzd^5}{6}+\frac{3zd^5}{2}$
$\frac{10z^2d^5+10zd^5}{6}$

$\frac{z^3dd+z^2dd+z^3dd+z^2dd}{6z}$
ou $\frac{z^2dd+zdd}{6}$

$10d^3$

$\frac{10z^3d^5+10z^2d^5+10z^2d^5+10zd}{6}$
ſom. des quarr. multipl. par $10d^3$

$$z^5d^5+5z^4d^5+\frac{20z^3d^5}{3}+\frac{15z^2d^5}{6}-\frac{zd^5}{6}$$
$$\frac{10z^4d^5}{4}+\frac{10z^3d^5}{4}$$

$$z^5d^5+\frac{5z^4d^5}{2}+\frac{25z^3d^5}{6}+\frac{15z^2d}{6}-\frac{zd^5}{6}$$
$$\frac{10z^3d^5}{4}+\frac{10z^2d^5}{4}$$

$$\frac{z^4d^5}{4}+\frac{z^3d^5}{4z}+\frac{z^4d^5}{4}+\frac{z^3d^5}{4}$$
ou $\frac{z^3d^5}{4}+\frac{z^3d^5}{4}$

10dd

$$\frac{10z^4d^5}{4}+\frac{10z^3d^5}{4}+\frac{10z^3d^5}{4}\frac{10z^2d^5}{4}$$

som. des cubes multip. par 10dd.

$$z^5d^5+\frac{5z^4d^5}{2}+\frac{10z^3d^5}{6}-\frac{zd^5}{6}$$

ou $$z^5d^5+z^4d^5+\frac{3z^4d^5}{2}+\frac{3z^3d^5}{2}+\frac{z^3d^5}{6}-\frac{zd^5}{6}$$

Et ajoutant $\frac{z^2d^5}{6}-\frac{z^2d^5}{6}$, ce qui n'augmentera ni ne diminuera rien, nous aurons :

$$z^5d^5+z^4d^5+\frac{3z^4d^5}{2}+\frac{3z^3d^5}{2}+\frac{z^3d^5}{6}+\frac{z^2d^5}{6}-\frac{z^2d^5}{6}-\frac{zd^5}{6}$$

Et divisant par $5d$, ainsi que le rang que nous avons pris nous l'indique.

$$\frac{z^5d^5+z^4d^5}{5d}+\frac{3z^4d^5+3z^3d^5}{10d}+\frac{z^3d^5+z^2d^5}{30d}-\frac{z^2d^5-zd^5}{30d}$$

ou $$\frac{z^5d^4+z^4d^4}{5}+\frac{3z^5d^4+3z^4d^4}{10z}+\frac{z^3d^4+z^4d^4}{30zz}-\frac{z^3d^4-z^4d^4}{30zzz}$$

somme des quatriémes puissances de la progression.

D'autre part, prenant la quatriéme puissance z^4d^4 du plus grand terme, & la multipliant par le nombre des termes $z+1$, le produit $z^5d^4+z^4d^4$ est la somme des quatriémes puissances des termes égaux ; & pour savoir le rapport de cette somme à celle des quatriémes puissances de la progression, nous diviserons les deux sommes par $z^5d^4+z^4d^4$, & le quotient sera d'une part 1, & de l'autre $\frac{1}{5}+\frac{3}{10z}+\frac{1}{30zz}-\frac{1}{30zzz}$; & comme les trois dernieres fractions de ce quotient peuvent être regardées comme zero à cause de leur infinie petitesse, ce quotient est donc $\frac{1}{5}$; ainsi la somme des quatriémes puissances égales, est à celle des quatriémes puissances de la progression, comme 1 est à $\frac{1}{5}$, comme 5 est à 1, c'est-à-dire, qu'elle est cinq fois plus grande.

Et pour trouver le rapport des cinquiémes puiſſances de la progreſſion à la ſomme des cinquiémes puiſſances des termes égaux, j'éleve l'excédent à la ſixiéme puiſſance ; & prenant pour guide le ſixiéme rang de la Table des puiſſances, j'acheve le reſte comme on voit ici :

$z^6d^6+6z^5d^6+15z^4d^6+20z^3d^6+15z^2d^6+6zd^6+d^6$ 6e puiſſance de la différence multipl. par le nomb. des termes.
zd^6+d^6

$z^6d^6+6z^5d^6+15z^4d^6+20z^3d^6+15z^2d^6+5zd^6$
$\frac{6zzd^6+6zd^6}{2}$

$\frac{zzd+zd}{2}$
$6d^5$
$\frac{6zzd^6+6zd^6}{2}$
somme des term. multipliée par $6d^5$.

$z^6d^6+6z^5d^6+15z^4d^6+20z^3d^6+12z^2d^6+2zd^6$
$\frac{15z^3d^6+15z^2d^6}{3}$ $\frac{}{3}$

$\frac{z^3dd+zzdd}{3}+\frac{z^3dd+zzdd}{6z}$
ou $\frac{z^2dd+zdd}{6}$

$z^6d^6+6z^5d^6+15z^4d^6+15z^3d^6+7z^2d^6+2zd^6$
$\frac{15z^2d^6+15zd^6}{6}$ $\frac{}{6}$

$15d^4$
$\frac{15z^3d^6+15zzd^6+15z^2d^6+15zd^6}{3}$ $\frac{}{6}$
somme des quarrés multip. par $15d^4$.

$z^6d^6+6z^5d^6+15z^4d^6+15z^3d^6+\frac{27z^2d^6}{6}-\frac{3zd^6}{6}$
$\frac{20z^4d^6+20z^3d^6}{4}$ $\frac{}{4}$

$\frac{z^4d^3+z^3d^3+z^2d^3+z^3d^3}{4}$ $\frac{}{4z}$
ou $\frac{z^3d^3+zzd^3}{4}$

$20d^3$
$z^6d^6+6z^5d^6+10z^4d^6+10z^3d^7+\frac{27z^2d^6}{6}-\frac{3zd^6}{6}$
$\frac{20z^3d^6+20z^2d^6}{4}$ $\frac{}{4}$

$\frac{20z^4d^6+20z^3d^6+20z^3d^6+20zzd^6}{4}$ $\frac{}{4}$
somme des cubes multipl. par $20d$.

$z^6d^6 + 6z^5d^6 + 10z^4d^6 + 5z^3d^6 - 3z^2d^6 - 3zd^6$
$\frac{6}{6}$

$\frac{15z^5d^6 + 15z^4d^6}{5}$ $\frac{5}{5}$

$z^6d^6 + 3z^5d^6 + 7z^4d^6 + 5z^3d^6 - 3z^2d^6 - 3zd^6$
$\frac{6}{6}$

$\frac{45z^4d^6 + 45z^3d^6}{10}$ $\frac{10}{10}$

$z^6d^6 + 3z^5d^6 + \frac{25z^4d^6}{10} + 5z^3d^6 - \frac{3z^2d^6}{6} - \frac{3zd^6}{6}$

$\frac{15z^3d^6 + 15z^2d^6}{30}$ $\frac{30}{30}$

$z^6d^6 + 3z^5d^6 + \frac{25z^4d^6}{10} - z^2d^6 - \frac{3zd^6}{6}$

$- \frac{15z^2d^6 - 15zd^6}{30}$ $\frac{30}{30}$

$z^5d^4 + z^4d^4 + \frac{3z^3d^4}{10} + \frac{3z^2d^4}{10}$

ou $\frac{3z^4d + 3z^3d^4}{10}$

$15dd$

$\frac{15z^5d^6 + 15z^4d^6}{5} + \frac{45z^4d^6 + 45z^3d^6}{10}$ $\frac{10}{10}$

les deux premiers termes de la somme des quatriémes puiſſances, multipliés par $15dd$.

$z^5d^4 + z^4d^4 - z^3d^4 - z^2d^4$

$\frac{30zz}{z^3d^4 + z^2d^4}$ $\frac{30zzz}{-z^2d^4 - zd^4}$

$\frac{30}{30}$ $\frac{30}{30}$

$15dd$

$\frac{15z^3d^6 + 15z^2d^6}{30} - \frac{15z^2d^6 - 15zd^6}{30}$ $\frac{30}{30}$

les deux derniers termes de la somme des quatriémes puiſſances, multipliés par $15dd$.

$z^6d^6 + 3z^5d^6 + \frac{25z^4d^6}{10} - \frac{z^2d^6}{2}$

ou $z^6d^6 + z^5d^6 + \frac{20z^5d^6}{10} + \frac{20z^4d^6}{10} + \frac{5z^4d^6}{10} - \frac{z^2d^6}{2}$

Et ajoutant $\frac{5z^3d^6}{10} - \frac{z^3d^6}{2}$, ce qui n'augmentera ni ne diminuëra rien, attendu que ces deux fractions ſont égales, & qu'elles ſe détruiſent par leurs ſignes contraires, nous aurons :

$z^6d^6 + z^5d^6 + \frac{20z^5d^6 + 20z^4d^6}{10} + \frac{5z^4d^6 + 5z^3d^6}{10} - \frac{z^3d^6 - z^2d^6}{2}$,

Et diviſant ce reſte par $6d$, ainſi que l'indique le rang de la Table des puiſſances, nous aurons :

$\frac{z^6d^6 + z^5d^6}{6d} + \frac{20z^5d^6 + 20z^4d^6}{60d} + \frac{5z^4d^6 + 5z^3d^6}{60d} - \frac{z^3d^6 - z^2d^6}{12d}$,

Ou bien $\frac{z^5d^5 + z^5d^5}{6} + \frac{z^5d^5 + z^5d^5}{3z} + \frac{z^5d^5 + z^5d^5}{12zz} - \frac{z^5d^5 - z^5d^5}{12zzz}$.

Et c'eſt la ſomme des cinquiémes puiſſances de la progreſſion.

D'autre part, prenant la cinquiéme puiſſance z^5d^5 du plus grand terme, & le multipliant par le nombre des termes $z+1$, le produit $z^6d^5 + z^5d^5$ eſt la ſomme des cinquiémes puiſſances des termes

égaux ; & pour savoir le rapport de cette somme à celle des cinquiémes puissances de la progression, nous diviserons l'une & l'autre somme par $z^6d^5+z^5d^5$, & le quotient sera d'une part 1, & de l'autre $\frac{1}{6}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{12zz}-\frac{1}{12zzz}$; & comme les trois dernieres fractions de ce quotient peuvent être regardées comme zero à cause de leur infinie petitesse, ce quotient est donc $\frac{1}{6}$; & la somme des cinquiémes puissances des termes égaux est à celle des cinquiémes puissances de la progression, comme 1 est à $\frac{1}{6}$, ou comme 6 est à 1, c'est-à-dire, qu'elle en est sextuple.

On trouveroit, en suivant la même route, que la somme des sixiémes puissances des termes égaux est à celle des sixiémes puissances de la progression, comme 7 est à 1, c'est-à-dire, qu'elle en est septuple, & ainsi des autres à l'infini ; de sorte que le nombre qui marque le rapport des puissances des termes égaux à celles des termes inégaux, excéde toujours d'une unité l'exposant de la puissance ; car pour les quarrés dont l'exposant est 2, le nombre qui marque le rapport est 3 ; pour les cubes dont l'exposant est 3, ce nombre est 4 ; & ainsi des autres.

COROLLAIRES.

Les termes de la progression sont donc à la somme des termes égaux, comme 1 à 2 ; les quarrés de la progression sont aux quarrés des égaux, comme 1 à 3 ; les cubes, comme 1 à 4 ; les quatriémes puissances, comme 1 à 5 ; les cinquiémes puissances, comme 1 à 6, &c. donc ces différens rapports sont entr'eux une progression Arithmétique 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7, &c. d'où il suit qu'il suffit de connoître l'un de ces rapports pour connoître aisément tous les autres ; car si je sais, par exemple, que les cinquiémes puissances de la progression sont aux cinquiémes puissances des termes égaux, comme 1 est à 6, je cherche entre 1 & 6 autant de moiens proportionnels Arithmétiques qu'il y a de degrés à monter depuis l'unité jusqu'à la cinquiéme puissance, c'est-à-dire 4 ; car de l'unité on monte à la racine, de la racine au quarré, du quarré au cube, du cube à la quatriéme puissance, & de la quatriéme puissance à la cinquiéme ; ce qui fait, comme on voit, quatre degrés entre 1 & la cinquiéme puissance ; & ces quatre moiens sont 2 . 3 . 4 . 5, dont le premier me marque le rapport de la somme des termes égaux à la somme des inégaux ; le second le rapport des cubes égaux à la somme des inégaux, & ainsi des autres : il faut faire attention à ce corollaire.

Comme on pourroit être embarrassé à trouver autant de moiens

proportionnels Arithmétiques qu'il en ſera néceſſaire entre deux termes, je vais donner ici en paſſant un problême qui apprendra à réſoudre cette difficulté.

PROBLEME.

Trouver entre deux nombres, autant de moïens proportionnels Arithmétiques qu'on voudra.

J'appelle le premier nombre a, le ſecond b, le nombre des moïens proportionnels qu'on demande n; ſi on ajoute 2 à ce nombre, on aura $n+2$ qui ſera le nombre des termes de la progreſſion Arithmétique que ces moïens formeront avec les deux nombres donnés a & b; & ſi du dernier terme b l'on retranche le premier terme a, & que l'on diviſe le reſte $b-a$ par $n+1$, c'eſt-à-dire, par le nombre des termes moins un, le quotient $\frac{b-a}{n+1}$ marquera la différence de la progreſſion; & comme cette différence une fois trouvée, tous les autres termes ſe trouveront aiſément, il s'enſuit que pour trouver la différence de la progreſſion, il faut retrancher le premier nombre donné du ſecond, & diviſer le reſte par le nombre des moïens proportionnels plus un, & le quotient ſera la différence.

Soient donc les deux nombres donnés 1.4, & le nombre des moïens proportionnels qu'on demande 5; je retranche 1 de 4, le reſte eſt 3; & diviſant ce reſte par $5+1=6$, le quotient $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$ eſt la différence qui régnera dans la progreſſion: donc les termes ſeront $1.1\frac{1}{2}.2.2\frac{1}{2}.3.3\frac{1}{2}.4$.

De même, ſoient les nombres propoſés 1.5, & le nombre des moïens Arithmétiques qu'on demande 10, je retranche 1 de 5, le reſte eſt 4; & diviſant 4 par $10+1$ ou par 11, le quotient $\frac{4}{11}$ eſt la différence; ainſi la progreſſion ſera $1.1\frac{4}{11}.1\frac{8}{11}.2\frac{1}{11}.2\frac{5}{11}.2\frac{9}{11}.3\frac{2}{11}.3\frac{6}{11}.3\frac{10}{11}.4\frac{3}{11}.4\frac{7}{11}.5$; & ainſi des autres.

Pour revenir préſentement à l'Arithmétique des infinis, ſi l'on ſuppoſe d'une part une ſuite infinie de quarrés qui ſoient en proportion Arithmétique, comme les termes $0.1.2.3.4.5.6$, &c. & de l'autre une ſuite infinie de quarrés tous égaux au dernier terme de la progreſſion, la ſomme des premiers ſera à celle des derniers, comme 1 à 2, ainſi qu'on a vû ci-deſſus; & ſi on veut connoître le rapport des racines des premiers aux racines des derniers, comme il n'y a qu'un degré à monter de l'unité au quarré, qui eſt le degré des racines, auſſi n'y aura-t-il qu'un moïen proportionnel entre 1 & 2, & ce moïen proportionnel étant $\frac{1}{2}$, il s'enſuit que le rapport des racines de la progreſſion aux racines des termes égaux, eſt comme 1 à $\frac{1}{2}$.

De

De même, ſi l'on ſuppoſe une ſuite infinie de cubes, qui ſoient en proportion Arithmétique, comme 0.1.2.3.4.5, &c. & de l'autre une ſuite infinie de cubes tous égaux au plus grand cube de la progreſſion; la ſomme des cubes de la progreſſion ſera à la ſomme des cubes égaux encore, comme 1 eſt à 2; & ſi on veut connoître le rapport des racines de la progreſſion ou des quarrés de ces racines, aux racines des cubes égaux ou aux quarrés de ces racines; comme entre 1 & le cube il y a deux degrés à monter, qui ſont le degré des racines & celui des quarrés des racines, on prendra deux moïens Arithmétiques $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ entre 1 & 2, & le premier marquera que la ſomme des racines des cubes de la progreſſion eſt à celle des racines des cubes égaux, comme 1 eſt à $\frac{4}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ eſt à $\frac{4}{3}$, ou comme 3 eſt à 4; & le ſecond marquera que la ſomme des quarrés des racines des premiers eſt à celle des quarrés des racines des ſeconds, comme 1 eſt à $\frac{5}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou comme 3 à 5; & ainſi des autres puiſſances.

C'eſt de cette ſorte qu'on a calculé la Table ſuivante.

	Racines 2cs.	3cs.	4cs.	5cs.	6cs.	7cs.	8cs.
Rapport des termes.	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$
des quarrés.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{10}$
des cubes.	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{11}$
des 4e puiſſances.	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{8}{12}$
des 5e puiſſances.	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{13}$
des 6e puiſſances.	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{8}{14}$
des 7e puiſſances.	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{8}{15}$
des 8e puiſſances.	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{8}{16}$
des 9e puiſſances.	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{17}$

Le premier rang parallèle d'enhaut marque à la premiere cellule $\frac{1}{1}$, le rapport de la ſomme de la progreſſion à la ſomme des termes égaux, & les cellules ſuivantes marquent les rapports des racines ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, ſixiéme, &c. des termes de la progreſſion, aux racines ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, &c. des termes égaux; ainſi la cellule $\frac{4}{1}$ marque que les quatriémes racines des termes de la progreſſion ſont aux quatriémes racines des termes égaux, comme 4 eſt à 5; & ainſi des autres.

Le ſecond rang parallèle marque à ſa premiere cellule $\frac{1}{1}$, le rapport des quarrés de la progreſſion à la ſomme des quarrés égaux; & les autres cellules, le rapport des racines ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, &c. des quarrés de la progreſſion, à la ſomme des racines ſeconde, troiſiéme, quatriéme, cinquiéme, &c. des quarrés égaux; ainſi la cellule $\frac{3}{1}$ marque que les racines troiſiémes des quarrés de la progreſſion ſont aux racines troiſiémes de la ſomme des quarrés égaux, comme 3 eſt à 5; & ainſi des autres.

Et il en eſt de même des autres rangs paralléles inférieurs; & pour peu qu'on faſſe attention à la diſpoſition de cette Table, on trouvera facilement le moïen de la continuer à l'infini.

Que ſi l'on multiplie, par exemple, d'une part la ſuite des quarrés de la progreſſion par la ſuite des cubes de la progreſſion, & de l'autre la ſuite des quarrés égaux par la ſuite des cubes égaux, on trouvera encore aiſément le rapport d'un produit à l'autre; car les quarrés aïant 2 pour leurs expoſans & les cubes 3, le produit des quarrés de la progreſſion par les cubes aura donc pour expoſant $2+3$, c'eſt-à-dire 5, ainſi qu'on a vû dans le calcul des expoſans; deſorte que la ſuite formée par ce produit ſera la ſuite des cinquiémes puiſſances de la progreſſion, & par la même raiſon les quarrés égaux, multipliés par les cubes égaux, donneront la ſuite des cinquiémes puiſſances égales: or par la Table précédente la ſomme des cinquiémes puiſſances de la progreſſion eſt à celle des cinquiémes puiſſances des égaux, comme 1 eſt à 5; donc la ſomme des termes du premier produit ſera à celle des termes du ſecond, comme 1 eſt à 5; & il en ſeroit de même de toute autre multiplication.

De même, ſi l'on diviſe les cinquiémes puiſſances de la progreſſion par les troiſiémes puiſſances de la progreſſion, & d'une autre part les cinquiémes puiſſances des termes égaux par leurs troiſiémes puiſſances, les termes des quotiens auront pour expoſans $5-3$, c'eſt-à-dire 2, ainſi qu'on a vû dans le calcul des expoſans; &

par conſéquent ces quotiens formeront d'un côté la ſuite des quarrés de la progreſſion, & de l'autre la ſuite des quarrés égaux, & le rapport des premiers aux ſeconds ſera comme 1 eſt à 3 par la Table précédente.

Et ſi l'on diviſe les quarrés de la progreſſion par les cubes de la progreſſion; & d'autre part les quarrés des termes égaux par leurs cubes, l'expoſant des quotiens ſera $2-3$ ou -1, ainſi que nous avons dit ailleurs; & par conſéquent la ſuite de la progreſſion ſera $0.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.\frac{1}{7}$, &c. car on ſait que l'expoſant étant en moins ſignifie une fraction, que a^{-1}, par exemple, en ſuppoſant $a=3$ vaut $\frac{1}{3}$, que a^{-2} vaut $\frac{1}{9}$, &c. mais la ſuite des quotiens égaux ſera compoſée de termes infiniment petits; car ſi nous appellons le plus grand terme qui eſt infini ∞, chacun des quarrés égaux ſera ∞^2, & chacun des cubes égaux ſera ∞^3: or diviſant ∞^2 par ∞^3, le quotient ſera ∞^{-1} ou $\frac{1}{\infty}$, & par conſéquent chaque quarré diviſé par chaque cube ſera $\frac{1}{\infty}$, c'eſt-à-dire 1 diviſé par l'infini: donc la ſuite des quarrés égaux diviſés par les cubes égaux ſera $\frac{1}{\infty}.\frac{1}{\infty}.\frac{1}{\infty}$, &c. & par conſéquent elle ſera une ſuite d'infiniment petits; car 1 diviſé par l'infini eſt infiniment petit: donc le rapport de cette ſuite à celle des quarrés de la progreſſion diviſés par les cubes, ne pourra s'exprimer, & il en ſera de même toutes les fois que les puiſſances qui diviſeront ſeront plus grandes que les puiſſances diviſées, attendu que l'expoſant du quotient ſera toujours en-deſſus de l'unité & négatif.

Mais ſi l'on diviſe, par exemple, les quarrés de la progreſſion par les racines troiſiémes des termes de la progreſſion; & d'autre part les quarrés égaux par les racines troiſiémes des termes égaux, les quotiens auront pour expoſant $2-\frac{1}{3}$; car l'expoſant des quarrés eſt 2 & celui des racines troiſiémes des termes eſt $\frac{1}{3}$, & comme $2-\frac{1}{3}$ eſt égal à $\frac{5}{3}$, l'expoſant ſera $\frac{5}{3}$, qui ſignifie racine troiſiéme de la cinquiéme puiſſance; & par conſéquent la ſuite formée par la premiere diviſion ſera la ſuite des racines troiſiémes des cinquiémes puiſſances de la progreſſion, & celle qui ſera formée par la ſeconde diviſion ſera la ſuite des racines troiſiémes des cinquiémes puiſſances égales; & pour ſavoir le rapport des ſommes de ces deux ſuites, on prendra dans la Table ci-deſſus le rang paralléle qui commence par le rapport $\frac{1}{6}$ des cinquiémes puiſſances, & enſuite la cellule $\frac{1}{8}$ écrite ſous racine troiſiéme, & cette cellule $\frac{1}{8}$ marquera

que les racines troiſiémes des cinquiémes puiſſances de la progreſſion, ſont à la ſomme des racines troiſiémes des cinquiémes puiſſances égales, comme 3 à 8.

De même, ſi on diviſe les cubes de la progreſſion, qui ont pour expoſant 3, par les racines quarrées des termes de la progreſſion dont l'expoſant eſt $\frac{1}{2}$, & que d'autre part on diviſe les cubes égaux par les racines des termes égaux, les quotiens auront pour expoſant $3-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, qui ſignifie racine quarrée de la cinquiéme puiſſance; ainſi la ſuite formée par les premiers quotiens ſera la ſuite des racines quarrées des cinquiémes puiſſances de la progreſſion; & celle qui ſera formée par la ſeconde diviſion ſera la ſuite des racines quarrées des cinquiémes puiſſances égales; & pour connoître le rapport des ſommes de ces deux ſuites, on prendra dans la Table le rang paralléle qui commence par le rapport $\frac{1}{6}$ des cinquiémes puiſſances, & enſuite la cellule $\frac{2}{7}$ écrite ſous racine 2, & cette cellule marquera que la premiere ſomme eſt à la ſeconde, comme 2 eſt à 7; & ainſi des autres diviſions ou multiplications qu'on pourroit faire, ſoit des puiſſances par d'autres puiſſances, ſoit des puiſſances par des racines, ou des racines par des racines.

Ce que nous venons d'enſeigner touchant l'Arithmétique des infinis, eſt d'une grande utilité dans les Mathématiques, comme j'eſpére le faire voir dans la Géométrie pratique & théorique que je compte mettre au jour, ſi le Public honore cet Ouvrage préliminaire de ſon approbation.

Des Logarithmes.

XIV. Si l'on prend une progreſſion Géométrique aſcendante, dont le premier terme ſoit 1, le ſecond terme ſera l'expoſant de la progreſſion, & les autres termes ſeront les puiſſances ſucceſſives de l'expoſant; ſoit, par exemple, la progreſſion 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32, &c. le ſecond terme 2 eſt l'expoſant de la progreſſion, attendu que la raiſon 1 . 2 des deux premiers termes ne ſauroit être réduite à des moindres termes; & les autres termes 4 . 8 . 16, &c. ſont les puiſſances ſucceſſives de 2, puiſque le ſecond terme 2 étant l'expoſant, il faut néceſſairement le multiplier par lui-même, & faire par conſéquent ſon quarré 4 pour avoir le troiſiéme terme; & de même, il faut multiplier le troiſiéme terme 4 par 2, & faire par conſéquent le cube de 2 pour avoir le quatriéme; & ainſi des autres.

Et ſi aïant une progreſſion Géométrique aſcendante, dont le premier terme eſt 1, telle qu'eſt la progreſſion 1.2.4.8, &c. on appelle le ſecond terme a, les autres ſeront a^2. a^3. a^4. a^5, &c. & ſi l'on diviſe a par lui-même, on aura $a^0=1$, ainſi que nous avons dit en parlant du calcul des expoſans; deſorte que les expoſans des termes de cette progreſſion feront une progreſſion Arithmétique 0.1.2.3.4.5, &c. dont chaque terme répondra à chaque terme de la progreſſion Géométrique: or par le même calcul des expoſans, nous avons vû que pour multiplier une puiſſance par une autre, comme, par exemple, la puiſſance a^2 par la puiſſance a^4, il ſuffiſoit d'ajouter enſemble les expoſans 2 & 4, & que la ſomme 6 étoit l'expoſant du produit a^6; de même que pour diviſer une puiſſance par une autre, comme, par exemple, la puiſſance a^7 par la puiſſance a^3, il ſuffiroit de retrancher l'expoſant 3 de l'expoſant 7, & le reſte 4 étoit l'expoſant du quotient a^4; de façon que par le moïen de ces expoſans on fait par l'addition & par la ſouſtraction, ce qu'il faudroit faire par la multiplication & par la diviſion; nous avons encore vû que pour élever une puiſſance à un degré plus élevé, comme, par exemple, pour élever a^2 à ſa troiſiéme puiſſance, il falloit prendre l'expoſant 2 autant de fois qu'il y a d'unités dans l'expoſant du degré auquel on veut élever la puiſſance, c'eſt-à-dire multiplier 2 par 3, à cauſe que l'expoſant du cube eſt 3; & de même que pour tirer la racine d'une puiſſance, comme, par exemple, pour tirer la racine troiſiéme de la puiſſance a^{12}, il falloit diviſer 12 par l'expoſant 3 de la racine; deſorte que par le moïen des expoſans, on fait par une ſimple multiplication, ce qu'il faudroit faire par une multiplication ſucceſſive d'une même puiſſance; & par une ſimple diviſion, ce qu'il faudroit faire par l'extraction des racines; & comme l'addition & la ſouſtraction ſont beaucoup plus faciles à faire que la multiplication & la diviſion; de même que la multiplication ſimple & la diviſion, ſont plus faciles qu'une multiplication ſucceſſive d'un même nombre & qu'une extraction de racines, il s'enſuit que les expoſans ſont d'une très-grande commodité, ſur tout lorſque les nombres qu'il faudroit multiplier ou diviſer, ou qu'il faudroit élever à d'autres puiſſances, ou dont on voudroit extraire les racines, ſe trouvent un peu grands.

1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 120, &c.
a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7 .

C'eſt ce qui a donné lieu à l'invention des *logarithmes*, qui ne

ſont autre choſe que les expoſans d'une progreſſion Géométrique littérale que l'on écrit ſous les termes de la progreſſion, exprimés en nombre, comme on voit ici; & par le moïen de ces logarithmes, on épargne bien des difficultés dans le calcul; car, par exemple, ſi l'on veut multiplier le terme 4 de la progreſſion Géométrique par le terme 32, on prend leurs logarithmes 2 & 5, & faiſant leur ſomme 7, on cherche au-deſſus du logarithme 7 le nombre 120, & ce nombre eſt le produit de 4 par 32; de même, ſi on veut diviſer le terme 120 par le terme 16, on retranche du logarithme 7 de 120, le logarithme 4 de 16, & le reſte 3 eſt le logarithme du quotient 8 qui ſe trouve écrit au-deſſus de ce reſte 3. Et pour l'extraction des racines, ou pour élever un nombre à une puiſſance, on en agit ainſi que nous venons de dire ci-deſſus.

1	2	4	8	16	32	6	120	
0	1	2	3	4	5	7	7	

Mais comme entre les termes d'une progreſſion, il ſe trouve beaucoup d'autres nombres qui ne ſont pas en progreſſion comme eux, & à l'égard deſquels on ne ſauroit faire uſage de ce que nous venons de dire; l'utilité qu'on tire des logarithmes ſeroit extrêmement reſſerée, ſi on ne s'étoit aviſé de trouver les logarithmes de tous les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. Pluſieurs Auteurs nous en ont donné des Tables, dont les unes s'étendent depuis le logarithme de 1 juſqu'à celui de 10000, & les autres vont plus haut; mais les plus commodes ſont celles que Monſieur Ozanam nous a donné dans ſon petit Traité de Trigonométrie, qui ſe vend chez Jombert, ruë ſaint Jacques, à Paris.

Pour conſtruire ces Tables, on s'eſt ſervi de la progreſſion Géométrique 1. 10. 100. 1000, &c. dont l'expoſant eſt 10, & les logarithmes 0. 1. 2. 3, &c. & pour éviter les fractions qu'on ne manqueroit pas de trouver, puiſque les logarithmes des nombres qui ſont entre 1 & 10, entre 10 & 100, &c. ne peuvent être que des fractions, on ajoute aux termes de la progreſſion & aux logarithmes, un certain nombre de zeros, comme, par exemple ſept, ainſi la progreſſion devient 1.0000000 . 10.0000000 . 10.0000000, &c. & les logarithmes 0.0000000 . 1.0000000 . 2.0000000, &c. on met un point devant les zeros qu'on ajoute, afin de diſtinguer les nombres d'avec les zeros ajoutés. On peut augmenter les logarithmes d'un zero de plus, ce qui les rendra encore plus juſtes.

Cela fait, pour trouver les logarithmes des nombres entre 1 & 10, comme, par exemple, du nombre 9. ou 9.0000000, on a pris une

Nomb.	proportion.	Logarithmes.	Nomb.	proportion.	Logarithmes.
A	1.0000000	0.00000000	Q	9.00213.88	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	M	8.9970796	0.95410156
B	10.0000000	1.00000000	O	9.00213.88	0.95434570
D	5.6234132	0.75000000	Q	9.0008737	0.95428467
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
E	7.4989421	0.87500000	R	9.0002412	0.95425415
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
E	7.4989421	0.87500000	P	8.9996088	8.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
G	9.3057204	0.96875000	T	9.0000831	0.95424652
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	T	9.0000831	0.95424652
H	8.9768713	0.95312500	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96975000	V	9.0000041	0.95424271
I	9.1398170	0.96093750	X	8.9999650	0.95424080
H	8.9768713	0.95312500	S	8.9999250	0.95423889
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9.0579777	0.95703125	Y	8.9999845	0.95424217
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	Z	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	&	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
N	9.0027008	0.95458984	AA	9.0000016	0.95424259
M	8.9970796	0.95410156	&	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	AA	9.0000016	0.95424259
O	9.0021388	0.95434570	BB	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	&	8.9999992	0.95424247

Nomb. proportion.		Logarithmes.	Nomb. proportion.		Logarithmes.
BB	9.0000004	0.95424253	BB	9.0000004	0.95424253
CC	8.9999998	0.95424250	DD	9.0000000	0.95424251
&	8.9999992	0.95424247	CC	0.9999998	0.95424247

une moïenne proportionnelle C entre 1.0000000 & 10.0000000, qui ſont les deux premiers termes de la progreſſion Géométrique ; & pour avoir le logarithme de cette moïenne proportionnelle, on a ajouté enſemble les logarithmes de ces deux termes, & la moitié 0.50000000 a été le logarithme cherché ; mais comme la moïenne proportionnelle C eſt moindre que 9.0000000 que l'on cherche, on a pris une autre moïenne proportionnelle D, entre C & le ſecond terme B qui ſurpaſſe 9.0000000 ; & on a pris le logarithme de D, de la même maniere que nous venons de prendre celui de C.

La moïenne D ſe trouvant plus grande que C, mais en-deſſous de 9.0000000, on a pris une autre moïenne proportionnelle E, entre D & B, & ſon logarithme de même.

Et comme E eſt plus grand que D, mais moindre que 9.0000000, on a pris une autre moïenne F, entre E & B, & ainſi de ſuite ; & quand on a trouvé une moïenne proportionnelle plus grande que 9.000000, comme, par exemple G ; on a pris une moïenne proportionnelle entre G & la plus prochaine en-deſſus de 9.0000000 qui eſt F, & l'on a continué de prendre des moïennes proportionnelles entre les nombres les plus proches de 9.0000000, l'un en-deſſous, l'autre en-deſſus, juſqu'à ce qu'on aïe trouvé une moïenne proportionnelle égale à 90000000, laquelle eſt ici la vingt-ſixiéme ; & comme à meſure qu'on prenoit des moïennes proportionnelles, on prenoit auſſi leurs logarithmes, on a trouvé par ce moïen le logarithme de 9.0000000 ou de 9 ; & l'on a fait la même choſe pour trouver les logarithmes des autres nombres, entre 1 & 9, ce qui eſt un travail immenſe & extrêmement pénible : donc on doit avoir obligation à ceux qui l'ont entrepris.

Ceci fait voir qu'on aggrandit les nombres de cette multitude de zeros, non-ſeulement pour éviter les fractions des logarithmes, en négligeant les fractions reſtantes lorſqu'on prend la moitié de la ſomme de deux d'entr'eux, mais encore pour pouvoir extraire facilement les racines qu'il faut extraire en prenant les moïennes proportionnelles ; car les produits dont on extrait les racines n'étant pas tous des nombres quarrés, on néglige les reſtes de l'extraction,

tion, ce qui ne ſauroit faire d'erreur attendu la grandeur des nombres.

Les logarithmes des neuf premiers nombres étant trouvés, on peut par leur moïen en trouver beaucoup d'autres; car comme 2, par exemple, multiplié par 6, fait 12, ajoutant les logarithmes de 2 & de 12, leur ſomme donne le logarithme de 12; de même, comme 3 multiplié par 5 fait 15, la ſomme des logarithmes de 3 & de 5 donne le logarithme de 15; de même encore, comme 4 multiplié par 4 fait 16, doublant le logarithme de 4, on a celui de 16, & ainſi des autres nombres qui ne ſont pas premiers; mais quant aux nombres premiers, comme 17. 19. 25. 29, &c. il faut néceſſairement chercher les logarithmes de la même maniere que ci-deſſus, ſi on veut les avoir dans leurs juſtes préciſions, ce qui n'empêche pas qu'on ne puiſſe en approcher de bien près, ainſi que nous dirons plus bas.

Après avoir trouvé les logarithmes des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5, &c. on en a fait des Tables qui contiennent pluſieurs colomnes, deux à deux; dans la premiere des deux ſont écrits les nombres naturels ſelon leur ordre, & dans la ſeconde leurs logarithmes, comme on voit ici.

Nomb.	Logarithmes	Nomb.	Logarithmes	Nomb.	Logarithmes
1	0.0000000	8	0.9030900	15	1.1760913
2	0.3010300	9	0.9542425	16	1.2041200
3	0.4771212	10	1.0000000	17	1.2304489
4	0.6020600	11	1.0413927	18	1.2552725
5	0.6989700	12	1.0791812	19	1.3010300
6	0.7781512	13	1.1139433	Et ainſi de ſuite.	
7	0.8450980	14	1.1461280		

PROBLEME PREMIER.

Multiplier enſemble deux nombres.

Soient les nombres à multiplier 87 & 99, je prens le logarithme 1.9395192 de 87, & le logarithme 1.9956352 de 99, je les ajoute enſemble, & leur ſomme 3.9351544 eſt le logarithme du produit des deux nombres; ainſi je cherche ce logarithme dans les Tables, & le nombre 8613 écrit à côté eſt le produit demandé.

1.9395192
1.9956352
3.9351544

De même, pour multiplier un nombre entier 25 par une frac-

tion $\frac{3}{5}$, je prens le logarithme 1.3979400, du nombre entier 25, & le logarithme 0.4771212 du numérateur 3 de la fraction, j'en fais la ſomme 1.8750612; & retranchant de cette ſomme le logarithme 0.6989700 du dénominateur 5, le reſte 1.1760912 eſt le logarithme du produit; cherchant donc ce logarithme dans les Tables, je trouve qu'il appartient au nombre 15; & en effet, les $\frac{3}{5}$ de 25 ſont 15.

1.3979400
0.4771212
1.8750612
0.6989700
1.1760912

Pour multiplier 23 par $\frac{2}{3}$, j'ajoute enſemble le logarithme 1.3617278 du nombre entier 23 & le logarithme 0.3010300 du numérateur 2; & retranchant de leur ſomme le logarithme 0.4771212, du dénominateur 3, le reſte 1.1856366 eſt le logarithme du produit; mais comme ce logarithme ne ſe trouve pas dans les Tables, & que celui qui en approche le plus eſt 1.1760913, qui eſt un peu moindre, & qui appartient à 15, je vois par-là que ce produit eſt compoſé d'un nombre entier 15 & d'une fraction: nous dirons plus bas comment on peut trouver cette fraction, & en général comment on peut ſavoir à quel nombre appartient un logarithme qui ne ſe trouve pas dans les Tables.

1.3617278
0.3010300
1.6627578
0.4771212
1.1856366

Pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, j'ajoute enſemble les logarithmes 0.3010300 & 0.4771212 des numérateurs 2 & 3; j'ajoute de même les logarithmes 0.4771212 & 0.6020600 des dénominateurs 3 & 4; & retranchant la ſomme de ceux-ci, de la ſomme des deux précédens, le reſte eſt un logarithme négatif —0.3010300 qui marque une fraction, & qui eſt le logarithme du produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$: nous dirons plus bas comment on peut trouver les fractions à qui appartiennent ces logarithmes négatifs. En attendant j'avertis ici, que lorſqu'il s'agit de ſouſtraire un nombre d'un autre qui eſt moindre, il faut ſouſtraire le petit nombre du grand, & rendre le reſte négatif en y mettant le ſigne moins; car on voit bien, par exemple, que pour ſouſtraire 4 de 3, il s'en faut d'une unité que 4 ne puiſſe être ôté de 3; & qu'ainſi ſi on veut ôter quatre écus à quelqu'un qui n'en a que trois, ce quelqu'un non-ſeulement n'aura plus ſes trois écus, mais il faudra même qu'il en emprunte un afin qu'on puiſſe lui en ôter

0.3010300
0.4771212
0.7781512
0.4771212
0.6020600
1.0791812
1.0791812
0.7781512
—0.3010300

quatre ; & par conſéquent, après cette ſouſtraction, il ſe trouvera chargé d'une dette qui eſt —1 : or comme 1 eſt la différence de 3 à 4, il n'y a donc qu'à prendre cette différence en retranchant 3 de 4, c'eſt-à-dire, le petit nombre du grand, & écrire le reſte 1 avec le ſigne moins ; & par conſéquent écrire —1.

Pour multiplier un nombre entier par 10, on peut abréger, en ajoutant au premier caractére à gauche de ſon logarithme une unité ; car le logarithme de 10 n'eſt compoſé que d'une unité & de ſept zeros ; de même pour multiplier un nombre par 100, qui eſt la ſeconde puiſſance de 10, on abrégera en ajoutant au premier caractére à gauche de ſon logarithme deux unités ; parce que le logarithme n'eſt compoſé que d'un premier nombre 2 ſuivi de ſept zeros ; & ſi on multiplioit ce nombre par 1000, qui eſt la troiſiéme puiſſance de 10, on ajouteroit trois unités au premier caractére à gauche de ſon logarithme, parce que le logarithme de 1000 n'eſt compoſé que du nombre 3 ſuivi de ſept unités ; & ainſi des autres puiſſances. Ceci eſt une ſuite de la formation de la Table.

Le premier caractére à gauche d'un logarithme s'appelle le *caractériſtique* de ce logarithme ; & ce caractériſtique, depuis le nombre 1 juſqu'à 10 eſt 0, depuis 10 juſqu'à 100 il eſt 1, depuis 100 juſqu'à 1000 il eſt 2, & ainſi de même à l'égard des autres puiſſances de dix ; ce qui eſt bien évident, puiſque la progreſſion dont on s'eſt ſervi pour former les Tables eſt 1. 10. 100. 1000, &c. qui contient les puiſſances de 10 ; & que les logarithmes de ces termes ſont 0. 1. 2. 3. 4, &c. augmentés chacun de ſept zeros.

PROBLEME SECOND.

Diviſer un nombre par un autre.

Pour diviſer le nombre 6545 par 85, je retranche du logarithme 3.8159096 du nombre 6545, le logarithme 1.9294189 de 85, & le reſte 1.8864907 eſt le logarithme du quotient ; & cherchant ce logarithme dans les Tables, je trouve qu'il appartient au nombre 77, qui par conſéquent eſt le quotient de 6545 diviſé par 85.

3.8159096	
1.9294189	
1.8864907	

Pour diviſer le nombre 96 par la fraction $\frac{3}{4}$, comme il faut multiplier 96 par le dénominateur 4, & diviſer le produit par le numérateur 3, ainſi que nous avons enſeigné dans notre Arithmétique, en parlant des fractions ; j'ajoute le logarithme 1.9822712 de

96 au logarithme 0.6020600 du dénominateur 4; & retranchant de leur ſomme le logarithme 0.4771212 du numérateur 3, le reſte 2.1072100 eſt le logarithme du quotient; & cherchant ce logarithme dans les Tables, je trouve qu'il appartient au nombre 128, qui par conſéquent eſt le quotient de 96 diviſé par $\frac{3}{4}$.

	1.9822712
	0.6020600
	2.5843312
	0.4771212
	2.1072100

De même, pour diviſer $\frac{6}{7}$ par le nombre entier 36, comme il faut multiplier le dénominateur 7 par le diviſeur 36, ainſi qu'on a vû dans l'Arithmétique; j'ajoute le logarithme 1556302 5 du diviſeur 36 au logarithme 0.8450980 du dénominateur 7, & retranchant leur ſomme du logarithme 0.7781512 du numérateur 6, c'eſt-à-dire, prenant la différence de la ſomme des deux premiers & de celui-ci, & l'écrivant en moins, j'ai le reſte négatif —1.6232490, qui marque que le quotient eſt une fraction qu'on trouvera, ainſi que nous dirons plus bas.

	1.5563025
	0.8450980
	2.4014005
	0.7781515
	—1.6232490

De même, pour diviſer la fraction $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, comme il faut multiplier le numérateur de la premiere par le dénominateur de la ſeconde, & le numérateur de la ſeconde par le dénominateur de la premiere, & enſuite diviſer le premier produit par le ſecond, j'ajoute le logarithme du numérateur 3 au logarithme du dénominateur 3, & le logarithme du numérateur 2 à celui du dénominateur 4; & retranchant enſuite la ſeconde ſomme de la premiere, le reſte eſt le logarithme du quotient; & ainſi des autres.

PROBLEME TROISIE'ME.

Elever un nombre à telle puiſſance qu'on voudra.

Je double le logarithme du nombre propoſé, ſi on demande ſa ſeconde puiſſance, & le double du logarithme eſt le logarithme du quarré; de même, le triple du logarithme eſt le logarithme de la troiſiéme puiſſance; le quadruple, eſt le logarithme de la quatriéme puiſſance, &c.

Soit, par exemple, le nombre propoſé 6 dont on demande la cinquiéme puiſſance, je prens ſon logarithme 0.7781512, je le multiplie par 5, & le produit 3.8907560 eſt le logarithme de la cinquiéme puiſſance de 6; je cherche donc ce logarithme dans la

	0.7781512
	5
	3.8907560

Table, & je trouve qu'il appartient au nombre 7776, qui par conſéquent eſt la cinquiéme puiſſance de 6.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Extraire telle racine que l'on voudra d'un nombre donné.

Je diviſe ſon logarithme par 2, ſi l'on demande la racine quarrée; par 3, ſi l'on demande la racine cubique; par 4, ſi l'on demande la quatriéme racine, &c. & les quotiens ſont les logarithmes des puiſſances demandées.

Soit, par exemple, le nombre 1296, dont on demande la quatriéme racine; je diviſe ſon logarithme 3.1126050 par 4, & le quotient 0.7781512 eſt le logarithme de la quatriéme racine de 1296; cherchant donc ce logarithme dans la Table, je trouve qu'il appartient à 6, qui par conſéquent eſt la racine cherchée.

4	
3.1126050	0.7781512

Que ſi le logarithme de la racine cherchée ne ſe trouvoit pas dans les Tables, quoiqu'il s'en trouvât d'autres en-deſſous & en-deſſus de lui, ce ſeroit une marque que le nombre n'eſt pas une puiſſance parfaite dont on puiſſe extraire la racine; & l'on ne pourroit avoir cette racine que par approximation, comme on verra plus bas.

PROBLEME CINQUIE'ME.

Trouver un quatriéme proportionnel Géométrique à trois nombres donnés.

Soient les trois nombres propoſés 32. 192. 45, comme il faut multiplier le ſecond & le troiſiéme enſemble, & diviſer le produit par 32, ainſi qu'il a été dit ailleurs, j'ajoute enſemble les logarithmes 2.2833012 & 1.6532125 de 192 & 45; & retranchant de leur ſomme le logarithme 1.5051500 de 32, le reſte eſt le logarithme du quatriéme proportionnel demandé; ainſi cherchant ce logarithme dans les Tables, je trouve qu'il appartient à 270, qui par conſéquent eſt le quatriéme proportionnel aux trois nombres propoſés.

	2.2833012
	1.6532125
	3.9365137
	1.5051500
	2.4313637

PROBLEME SIXIE'ME.

Entre deux nombres donnés, trouver autant de moïens proportionnels Géométriques qu'on voudra.

Soient les deux nombres donnés 12 & 192, entre lesquels on demande trois moïens proportionnels Géométriques ; ces trois moïens, avec les deux nombres donnés, formeront une progression Géométrique de cinq termes ; & si nous appellons le premier terme $12=a$, & l'exposant de la progression q, le second terme sera aq, & toute la progression sera $a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4$, ainsi que nous l'avons fait voir en parlant des progressions Géométriques ; ainsi le dernier terme aq^4 sera le premier terme a multiplié par une puissance q^4 de l'exposant, moindre d'une unité que le nombre des termes 5 : donc divisant le terme $aq^4=192$ par le premier terme $a=12$, le quotient q^4 sera la quatriéme puissance de l'exposant, & par conséquent tirant la quatriéme racine de ce quotient, je trouverai l'exposant ; & multipliant le premier terme 12 par l'exposant, le produit sera le second terme ; de même, multipliant le second terme par l'exposant, j'aurai le troisiéme ; & ainsi des autres.

Or en opérant par les logarithmes, la multiplication & la division se changent en addition & soustraction, & l'extraction des racines en division : donc si je retranche le logarithme 1.0791812 du premier terme 12 du logarithme 2.2833012 du dernier terme 192, le reste sera le logarithme de la quatriéme puissance de l'exposant ; & prenant le $\frac{1}{4}$ de ce reste, ce quart qui est 03010300 sera le logarithme de l'exposant ; & ajoutant à ce logarithme le logarithme du premier terme, la somme 1.3802112 est le logarithme du second terme ; & ce second terme, en consultant les Tables, est 24 ; de même, ajoutant au logarithme de ce second terme le logarithme de l'exposant, la somme 1.6812412 est le logarithme du troisiéme terme, lequel selon la Table, est 48 ; enfin, ajoutant au logarithme de 48 celui de l'exposant, la somme 1.9822712 est le logarithme du quatriéme terme, lequel selon la Table, est 96 ; ainsi les trois moïens proportionnels sont 24, 48 & 96, & toute la progression est 12 . 24 . 48 . 96 . 192.

2.2833012	
1.0791812	
1.2041200	
0.3010300	
1.0791812	
1.3802112	
0.3010300	
1.6812412	
0.3010300	
1.9822712	

Si en cherchant ainsi les moïens proportionnels demandés, on trouvoit que leurs logarithmes ne sont pas dans la Table, quoiqu'il s'en trouvât d'autres plus grands & moindres qu'eux, ce seroit une marque que ces moïens proportionnels ne pourroient s'exprimer en nombres, & qu'on ne pourroit avoir leur valeur que par approximation.

Ce problême, & quelques-uns des précédens, ſont très-utiles dans l'Arithmétique, lorſqu'il s'agit de calculer le compte qu'un Tuteur doit rendre à ſon Pupille pour avoir adminiſtré ſon bien, en comptant les intérêts, & les intérêts des intérêts ; ainſi qu'on verra dans les deux ou trois queſtions que nous propoſerons plus bas.

PROBLEME SEPTIE'ME.

Trouver le logarithme d'un nombre compoſé d'entiers & fractions.

Soit le nombre propoſé $231\frac{4}{5}$, je réduis ce nombre en fractions, ce qui fait $\frac{1159}{5}$; puis je retranche le logarithme 0.6989700 du dénominateur 5, du logarithme 2.0640834 de 1159, & le reſte 2.3651134 eſt le logarithme de la fraction $\frac{1159}{5}$.

231
5

1155
4

1159

2.0640834
0.6989700

2.3651134

PROBLEME HUITIE'ME.

Trouver le logarithme d'un nombre propoſé plus grand, que ceux qui ſont compris dans les Tables.

J'ai déja dit que les Tables de Monſieur Ozanam ſont les plus commodes dont on puiſſe aujourd'hui ſe ſervir ; & comme le plus grand nombre dans ces Tables eſt 10000, on pourra toujours trouver, avec leurs ſecours, le logarithme de tout nombre au-deſſous de 10000, & la difficulté ne conſiſte plus qu'à trouver les logarithmes des nombres qui ſont au-deſſus.

Or les nombres au-deſſus de 10000, peuvent être ou ſimples, ou compoſés ; s'ils ſont compoſés, c'eſt-à-dire, s'ils peuvent être diviſés par quelque nombre autre que l'unité, on trouvera toujours leurs logarithmes avec la derniere exactitude, en ſe ſervant de la méthode que voici.

Soit le nombre propoſé 19974 qui eſt plus grand que 10000 ; j'examine ſi je puis le diviſer par quelqu'un des nombres ſimples ou premiers 2.3.5.7, &c. enſorte que le quotient ſe trouve dans les Tables, & je vois qu'en le diviſant par 2, le quotient ſera 9987 qui eſt moindre que 10000, par conſéquent le nombre propoſé 19974

eſt la même choſe que le quotient 9987 multiplié par le diviſeur 2; ajoutant donc enſemble le logarithme du quotient 9987, qui eſt 3.9994350, avec le logarithme du diviſeur 2, qui eſt 0.3010300, leur ſomme 4.3004650 ſera le logarithme de deux fois 9987 ou du nombre propoſé 19974.

3.9994350
0.3010300
4.3004650

2	2	2	
53496	26748	13374	6687

De même, ſoit le nombre propoſé 53496; je le diviſe d'abord par 2, & le quotient eſt 26748; mais comme ce quotient eſt plus grand que 10000, & que je ne puis pas trouver ſon logarithme dans les Tables, je le diviſe encore par 2, & le ſecond quotient eſt 13374; celui-ci étant encore trop grand, je le diviſe de nouveau par 2, & le troiſiéme quotient eſt 6687, qui eſt moindre que 10000; ainſi le nombre propoſé 53496 eſt la même choſe que le quotient 6687 multiplié ſucceſſivement par les diviſeurs 2, 2, 2, ou tout d'un coup par leur produit 8; ajoutant donc enſemble le logarithme 3.8252313 du quotient 6687, & le logarithme 0.9030900, du produit 8 des diviſeurs, leur ſomme eſt 4.7283213.

3.8252313
0.9030900
4.7283213

De même encore, ſoit le nombre propoſé 1241310; je diviſe ce nombre par 2, & le quotient 620655 étant encore trop grand, je le diviſe par 3; & le ſecond quotient 206885 étant encore plus grand qu'il ne faut, je le diviſe par 5; & comme le quotient 41377 ſurpaſſe encore 10000, je le diviſe par 7, & j'ai enfin le quotient 5911 moindre que 10000: or le nombre propoſé eſt égal à ce dernier quotient 5911, multiplié ſucceſſivement par les diviſeurs 2, 3, 5, 7, ou tout d'un coup ſi l'on veut, par le produit 210 de ces quatre diviſeurs multipliés enſemble; c'eſt pourquoi ajoutant enſemble le logarithme 3.7716610 du quotient 5911, & les logarithmes des quatre diviſeurs, ou le logarithme 2.3222193 de leur produit 210, la ſomme 6.0938803 eſt le logarithme du nombre propoſé.

2	3	5	7	
1241310	620655	206885	41377	5911

3.7716610
2.3222193
6.0938803

Que

Que ſi cette méthode, qui eſt de la derniere exactitude, paroît trop embarraſſante, on ſe ſervira de celle qui ſuit, & qu'on peut emploïer pour les nombres ſimples & pour les compoſés, pourvû qu'ils n'excédent pas 10000000; car autrement il pourroit y avoir de l'erreur, attendu que cette méthode n'eſt pas dans la rigueur Géométrique, comme nous dirons bientôt; à moins qu'on ne ſe ſervît de Tables plus amples, telles que les Tables d'*Henri Brigs*, qui s'étendent juſqu'à 100000.

Soit donc le nombre propoſé 1241310 qui eſt le même du dernier exemple précédent, j'en retranche à droite autant de caractéres qu'il le faut pour que les autres caractéres ſe trouvent dans la Table; ainſi j'en retranche 310, car le reſte 1241 étant au-deſſous de 10000 eſt certainement dans la Table: or en retranchant 310 de 1241, le reſte eſt 1241000 que je diviſe par 100 pour avoir 1241; je prens dans la Table le logarithme 3.0937718 de 1241, & j'y ajoute le logarithme 3.0000000 de 1000, ce qui ſe fait en ajoutant 3 à ſon caractériſtique 3, comme on a vû ci-deſſus, & la ſomme 6.0937718 eſt le logarithme de 1241000; ce logarithme eſt plus petit que celui du nombre propoſé 1241310, & pour le trouver, je prens le logarithme 3.0941216 du nombre 1242, qui ſurpaſſe 1241 d'une unité; & ajoutant à ce logarithme celui de 1000, la ſomme 6.0941216 eſt le logarithme du nombre 1242000, qui ſurpaſſe 1241000 de 1000.

Je prens la différence 3498 des logarithmes de ces deux nombres; & comme le nombre propoſé 1241310 eſt entre les deux nombres 1241000 & 1242000, je dis: Si la différence 1000 qui eſt entre les deux nombres 1241000 & 1242000 donne 3498 pour la différence de leur logarithme, combien donnera la différence 310 des nombres 1241000 & 1241310? & faiſant la régle de trois, je trouve 1085. Ajoutant donc cette différence au logarithme 6.0937718 du nombre 1241000, la ſomme 6.0938803 ſera le logarithme du nombre propoſé 1241310; & en effet, nous avons trouvé ce même logarithme par la méthode précédente.

6.0941216	
6.0937718	
3498	différence des logarithmes.
6.0937718	
1085	
6.0938803	

Soit encore le nombre propoſé 53496, qui eſt le même du ſecond exemple de la méthode précédente, je n'en retranche que le dernier caractére 6, parce que les autres 5349 ſe trouvent dans la Table; & comme en retranchant 6 le reſte eſt 53490, je diviſe par 10,

& j'ai 5349; je prens dans la Table le logarithme 3.7282726 du nombre 5349, & le logarithme 3.7283538 du nombre 5350, qui ne ſurpaſſe le précédent que d'une unité; j'ajoute à chacun de ces logarithmes le logarithme de 10, ce qui ſe fait en ajoutant 1 à leur caractériſtique 3, & j'ai 4.7282726 & 4.7283538, qui ſont les logarithmes de 53490 & de 53500; car en ajoutant le logarithme de 10 aux logarithmes, c'eſt la même choſe que ſi on multiplioit par 10 les nombres à qui ils appartiennent.

Je prens donc la différence 10 des nombres 53490 & 53500, & la différence 812 de leurs logarithmes; & comme le nombre propoſé 53496 eſt entre les deux nombres 53490 & 53500, je dis: La différence 10 des nombres 53490 & 53500 donne 812 pour la différence de leurs logarithmes, que donnera la différence 6 des nombres 53490 & 53496? & faiſant la régle de trois, je trouve 487; ajoutant donc cette différence au logarithme 4.7282726 du nombre 53490, la ſomme 4.7283213 eſt le logarithme du nombre propoſé 53496; & en effet, c'eſt le même que nous avons trouvé ci-deſſus; & ainſi des autres.

4.7283538		
4.7282726		
	812	différence des logarithmes.
	4.7282726	
	487	
	4.7283213	

Il faut obſerver qu'en faiſant la régle de trois, ſi la diviſion donne un reſte qui ſurpaſſe 50, il faut ajouter 1 au quotient pour ce reſte; & s'il eſt au-deſſous de 50, on peut le négliger.

Cette méthode ſuppoſe que les différences des logarithmes ſont entr'elles comme celles de leurs nombres, ce qui n'eſt point vrai, puiſque les nombres écrits dans les Tables ſont en progreſſion Arithmétique, & les logarithmes ne le ſont pas: cependant l'erreur ne ſauroit être ſenſible lorſque les nombres ſurpaſſent 1000; car les logarithmes croiſſent alors plus lentement, & c'eſt pourquoi nous avons dit qu'il ne falloit retrancher des caractéres du nombre propoſé, qu'autant qu'il en faut pour que le reſte ſe trouvât dans la Table; & plus ce reſte ſe trouvera près de la fin, moins auſſi pourra-t-il y avoir d'erreur: c'eſt par la même raiſon qu'il faut ſe ſervir de Tables plus amples pour trouver les logarithmes des nombres qui ſont au-deſſus de 10000000; car ceux qui ſont dans les Tables ordinaires étant trop éloignés de ceux qui ſont au-deſſus de 10000000, leurs logarithmes ne pourroient donner au juſte les logarithmes de nombres ſi grands.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Trouver à quel nombre appartient un logarithme qui ne se trouve point dans les Tables.

Ou ce logarithme eſt au-deſſous de 4.0000000, qui eſt le plus grand qui ſe puiſſe trouver dans les Tables ordinaires, ou il eſt au-deſſus: ce qui fait deux cas que nous allons réſoudre ſéparément.

PREMIER CAS.

Soit le logarithme propoſé 3.8755423; je prens dans la Table les deux logarithmes les plus approchans de celui-ci, l'un en-deſſous, l'autre en-deſſus; ces logarithmes ſont 3.8755821 qui eſt excédant, & 3.8755243 qui eſt défaillant, & ces logarithmes appartiennent aux nombres 7509 & 7508, qui ne different entr'eux que de l'unité, par conſéquent le nombre à qui appartient le logarithme propoſé eſt entre 7509 & 7508: donc ce nõbre eſt compoſé d'un entier 7508 & d'une fractiõ; & pour trouver cette fraction, je lui donne un grãd dénominateur, comme, par exemple 100, afin de l'avoir plus juſte, ainſi l'unité ſera $\frac{100}{100}$; je prens donc la différence 578 du logarithme excédant au logarithme défaillant, & la différence 180 du logarithme propoſé au logarithme défaillant, & je dis: Si la différence de deux logarithmes étant 578, celle de leurs nombres eſt 1 ou $\frac{100}{100}$, la différence des logarithmes étant 180, quelle ſera celle de leur nombre? & faiſant la régle de trois, je trouve $\frac{31}{100}$ & un reſte 82, pour lequel je mets, ſi je veux, une unité au quotient, ce qui fait $\frac{32}{100}$ ou $\frac{8}{25}$; ajoutant donc $\frac{8}{25}$ au nom-

3.8755821
3.8755243
578 différence.

3.8755423
3.8755243
180

578. 100. 180
100
18000

578 | 31
18000 | 100
660
82

bre 7508, j'ai $7508\frac{8}{25}$ qui eſt le nombre à qui appartient le logarithme propoſé.

Il eſt aiſé de voir que cette méthode n'eſt pas plus Géométrique que la précédente, puiſqu'elle ſuppoſe auſſi que les différences des logarithmes ſont entr'elles, comme les différences de leurs nombres, ce qui eſt faux, comme nous l'avons fait voir; on ne doit donc s'en ſervir que lorſque les logarithmes propoſés ſont au-deſſus du logarithme de 1000, parce qu'alors l'erreur ne ſauroit être ſenſible; mais lorſque le logarithme eſt au-deſſous de celui de 1000, voici comment on pourra réſoudre la difficulté.

Soit le logarithme propoſé 0.0969100, qui eſt au-deſſous du logarithme de 1000; j'ajoute à ce logarithme un autre logarithme, enſorte que la ſomme ſoit au-deſſous du plus grand logarithme 4.0000000 de la Table, & qu'elle en approche le plus qu'il ſe pourra, comme, par exemple, le logarithme 3.8668778 qui appartient au nombre 7360, la ſomme des deux logarithmes eſt 3.9637878; & cherchant ce logarithme dans la Table, je trouve qu'il appartient au nombre 9200; je diviſe donc ce nombre par 7360, à cauſe que j'ai ajouté le logarithme de 7360 au logarithme propoſé, & le quotient $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ me fait voir que le logarithme propoſé appartient à $\frac{1}{4}$.

3.8668778	
0.0969100	
3.9637878	
7360 | 9200	$1\frac{1}{4}$
1840	

Soit de même le logarithme propoſé 0.6532125, j'ajoute à ce logarithme le logarithme 3.2999429 qui appartient au nombre 1995, la ſomme eſt 3.9531554; je cherche ce logarithme dans les Tables, & ne le trouvant pas, je prens les deux logarithmes 3.9531796 & 3.9531312, qui en approchent le plus, l'un en-deſſous & l'autre en-deſſus, & qui appartiennent aux nombres 8978 & 8977; deſorte que le logarithme 3.9531554 doit appartenir à un nombre qui ſoit entre ces deux 8978 & 8977, par conſéquent ce nombre ne peut être que 8977 avec une fraction; & pour trouver cette fraction, je ſuppoſe que ſon dénominateur eſt 100, ainſi l'unité eſt $\frac{100}{100}$; je prens la différence 484 du logarithme

0.6532125		
3.2999429		1995
3.9531554		
3.9531796		8978
3.9531312		8977
484	différence.	
3.9531554		
3.9531312		
242		

excédant & du défaillant; je prens aussi la différence 242 de mon logarithme 3.9531554 & du défaillant, & je dis: Si la différence des logarithmes étant 484, celles de leurs nombres est 1 ou $\frac{100}{100}$; la différence des logarithmes étant 242, quelle sera celle des nombres? & faisant la régle je trouve $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$; j'ajoute cette moitié à 8977, & $8977\frac{1}{2}$ est le nombre à qui appartient le logarithme 3.9531554; & comme j'ai ajouté au logarithme proposé le logarithme de 1995, je divise le nombre $8977\frac{1}{2}$ par 1995, c'est-à-dire, en réduisant tout en fraction 17955 par 3990, & le quotient est $4\frac{1995}{3990}$ ou $4\frac{1}{2}$, ou $\frac{9}{2}$: donc le logarithme proposé appartient à $\frac{9}{2}$; & en effet, si on prend le logarithme de 9, qui est 0.9542425, & qu'on en retranche le logarithme de 2, qui est 0.3010300, le reste sera le logarithme proposé 0.6532125. Et on pourroit faire la même preuve dans tous les cas semblables, ce qui fait voir la justesse des méthodes dans la pratique, quoique ces méthodes ne soient point dans toute la rigueur Géométrique.

484. 100. 242
100
24200

484 | 24200 | 50 — 000 | 100 — ou $\frac{1}{2}$

3990 | 17955 | 4 $\frac{1995}{3990}$ — 1995

DEUXIE'ME CAS.

Si le logarithme proposé est plus grand que le dernier 4.0000000 des Tables, comme, par exemple le logarithme 4.2507127, j'en retranche le moindre logarithme qui puisse en être retranché, pour faire que le reste se trouve dans les Tables, près de la fin; ainsi j'en retranche le logarithme 0.3010300 qui appartient au nombre 2, & le reste est 3.9496827, lequel étant cherché dans les Tables, se trouve appartenir au nombre 8906; c'est pourquoi je multiplie ce nombre par 2, parce que j'ai retranché le logarithme 2 du logarithme proposé, & le quotient 17812 est le nombre auquel appartient le logarithme 4.2507127.

4.2507127
3010300
3.9496827
8906
2
17812

De même, soit le logarithme proposé 4.1712876, j'en retranche le logarithme 0.3010300 du nombre 2, & le reste est 3.8702576; & comme ce logarithme n'est pas dans les Tables, je prens les deux

plus approchans, l'un au-dessus & l'autre au-dessous, qui sont 3.870286 & 3.8702283, qui appartiennent aux nombres 7418 & 7417 dont la différence est 1 ; ainsi le logarithme 3.8702576 doit appartenir au nombre 7417 avec une fraction ; je suppose le dénominateur de cette fraction 100, desorte que l'unité soit $\frac{100}{100}$; puis prenant la différence 585 du logarithme excédant & du défaillant, & la différence 293 de mon logarithme & du défaillant, je dis : Si la différence des logarithmes étant 585, celle de leurs nombres est 1 ou $\frac{100}{100}$; la différence des logarithmes étant 293, quelle sera la différence des nombres ? & faisant la régle, je trouve $\frac{1}{2}$; j'ajoute $\frac{1}{2}$ au nombre 7417, ce qui fait $7417\frac{1}{2}$ que je multiplie par 2, parce que j'ai retranché le logarithme de 2 du logarithme proposé, & le produit 14835 est le nombre auquel appartient le logarithme 4.1712876.

4.1712876
0.3010300 2

3.8702576

3.8702868 7418
3.8702283 7417

585 différence.

3.8702576
3.8702283

293 différence.

585. 100. 293
100

29300

585 | 50
28300 | ou $\frac{1}{2}$

50 100

$7417\frac{1}{2}$
2

14834
1

14835

PROBLEME DIXIE'ME.

Trouver à quelle fraction appartient un logarithme négatif.

Soit le logarithme négatif —2.4857214, je le considére comme s'il étoit positif, & le cherchant dans la Table, je trouve qu'il appartient au nombre 306, c'est pourquoi je mets 306 à la place d'un dénominateur, à qui je donne l'unité pour numérateur, & la fraction $\frac{1}{306}$ est le nombre à qui appartient le logarithme proposé ; & pour le prouver, il faut faire attention que $\frac{1}{306}$ n'est autre chose que 1 divisé par 306 : or pour diviser 1

2.4857214
0.0000000

—2.4857214

par 306, il faut retrancher du logarithme 0.0000000 de 1 le logarithme 2.4857214 de 306; & cette ſouſtraction faite ſelon les régles que nous avons enſeignées ci-deſſus, donne le logarithme négatif —2.4857214, qui eſt le même que le propoſé.

Ainſi toutes les fois qu'un logarithme négatif, conſidéré comme poſitif, ſe trouvera dans les Tables, on prendra le nombre à qui il appartient pour le dénominateur d'une fraction dont l'unité ſera le numérateur, & cette fraction ſera le nombre à qui appartiendra le logarithme négatif.

Mais ſi le logarithme négatif, conſidéré comme poſitif, ne ſe trouve pas exactement dans les Tables comme le logarithme —0.0969100, j'ajoute à ce logarithme le plus grand logarithme poſitif qu'on peut lui ajouter, pour faire que la ſomme ſe trouve dans les Tables aſſez près de la fin; & comme l'addition d'une grandeur négative eſt une ſouſtraction, je lui ajoute le dernier logarithme 4.0000000 qui appartient à 10000, & la ſomme eſt le logarithme poſitif 3.9030900; je cherche ce logarithme dans les Tables, & je trouve qu'il appartient au nombre 8000, c'eſt pourquoi je diviſe 8000 par 10000, à cauſe que j'ai ajouté au logarithme de 10000 le logarithme propoſé; & le quotient $\frac{8000}{10000}$ ou $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ eſt le nombre à qui appartient le logarithme négatif —0.0969100.

4.0000000
—0.0969100
3.9030900
$\frac{8000}{10000}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

Soit de même le logarithme négatif —0.1461280, j'ajoute à ce logarithme le logarithme 4.0000000 de 10000, & la ſomme eſt le logarithme 3.8538720; & comme ce logarithme ne ſe trouve pas juſte dans la Table, je prens les logarithmes les plus approchans 3.8538806 qui eſt excédant, & qui appartient au nombre 7143, & 3.8538198 qui eſt défaillant, & qui appartient au nombre 7142; ainſi le logarithme 3.8538720 doit appartenir au nombre 7142 avec une fraction; je prens donc la différence 608 de l'excédant au défaillant, & la différence 522 du logarithme 3.8538720 au défaillant; & comme les nombres 7143, 7142 ne different que de l'unité ou de $\frac{100}{100}$, je dis: Si la différence des logarithmes étant 608, celle de leurs nombres eſt $\frac{100}{100}$, la différence des logarithmes étant

4.0000000
—0.1461280
3.8538720
3.8538806
3.8538198
608
3.8538720
3.8538198
522

522, quelle ſera celle des nombres ? & je trouve $85\frac{120}{608}$, ou à peu près $\frac{86}{100}$, & cette fraction eſt aux environs de $\frac{6}{7}$; car ſi on retranche 2 du numérateur & du dénominateur, la fraction $\frac{84}{98}$ eſt égale à $\frac{6}{7}$, ce qu'on trouvera aiſément en diviſant 84 & 98 par 14 ; ainſi j'ajoute $\frac{6}{7}$ au nombre 7142, & le nombre $7142\frac{6}{7}$ eſt celui à qui appartient le logarithme 3.8538720 ; mais comme j'ai ajouté au logarithme propoſé le logarithme de 10000, je diviſe $7142\frac{6}{7}$ par 10000, c'eſt-à-dire en réduiſant tout en fraction, 50000 par 70000, & le quotient eſt $\frac{50000}{70000}=\frac{5}{7}$, & c'eſt le nombre à qui appartient le logarithme négatif —0.1461280 ; & en effet, ſi du logarithme de 5 on retranche le logarithme de 7, on trouvera le même logarithme négatif ; que ſi en ajoutant le logarithme de 10000 au logarithme négatif propoſé, la ſomme ſe trouvoit un logarithme trop petit, c'eſt-à-dire, qui appartînt à quelque nombre au-deſſous de 1000, on ajouteroit à ce logarithme un autre logarithme, enſorte que la ſomme approchât davantage de la fin des Tables ; & le reſte s'acheveroit comme ci-deſſus.

608. 100. 522
100
52200

608 | 85 $\frac{120}{608}$, approchant de $\frac{86}{100}$ ou $\frac{6}{7}$.
52200
356.0
520

7142 $\frac{6}{7}$ 10000
7 7
50000 70000

$\frac{50000}{70000}=\frac{5}{7}$.

Soit, par exemple, le logarithme négatif —2.6532125, j'ajoute à ce logarithme le logarithme 4.0000000 de 10000 ; mais comme la ſomme 1.3467875 eſt un logarithme au-deſſous de celui de 1000, ce qui pourroit cauſer quelque erreur, je lui ajoute le logarithme 2.5563025 du nombre 360, & la ſomme eſt 3.9030900, & cherchant ce logarithme dans les Tables ; je trouve qu'il appartient au nombre 8000 ; mais comme j'ai ajouté au logarithme négatif propoſé ceux de 10000 & de 360, je diviſe 8000 par 10000, puis par 360, ou tout d'un coup par le produit 3600000 de ces deux nombres ; & le quotient $\frac{8000}{3600000}=\frac{8}{36000}=\frac{2}{9000}$ eſt la fraction

4.0000000
—2.6532125
1.3467875
2.5563025 360
3.9030900

360
10000
3600000

tion à qui appartient le logarithme négatif —2.6532125.

Comme les nombres 360 & 3600 ont beaucoup plus de diviſeurs que les autres nombres, on abrégera beaucoup lorſqu'il s'agira des logarithmes négatifs, d'ajouter à ces logarithmes ceux des nombres 360 ou 3600, parce qu'il pourra arriver ſouvent que la ſomme ſera un logarithme qui ſe trouvera exactement dans les Tables; que ſi en ajoutant les logarithmes de 360 ou de 3600, la ſomme ſe trouvoit être un logarithme au-deſſous de ceux de 1000, on ajouteroit encore le logarithme de 360; car il faut toujours que la ſomme ſoit au-deſſus du logarithme de 1000 pour éviter les erreurs qui pourroient arriver, ainſi que nous avons déja dit.

Après avoir montré tout ce qui concerne le calcul des logarithmes, j'ajouterai ici quelques queſtions qui en feront voir l'utilité.

PREMIERE QUESTION.

Un Tuteur a géré pendant dix ans les biens de ſon Pupille, dont le capital étoit de 1000 *livres: on demande quel eſt le compte qu'il doit lui rendre pour le capital, les intérêts, & les intérêts des intérêts, à raiſon de* 10 *pour* 100 *?*

Pour réſoudre cette queſtion, il faut obſerver que puiſque pour 100 livres il faut rendre au bout de l'année 110 liv. le capital joint à l'intérêt à la fin de l'année, eſt au capital du commencement de l'année, comme 110 eſt à 100; & comme 110 devient un nouveau capital pour la ſeconde année, ce capital joint aux intérêts doit être à la fin de la ſeconde année au capital 110 de la fin de la premiere année comme 110 eſt à 100, & ainſi des autres années; deſorte que nous avons une progreſſion Géométrique, dont chaque terme eſt au précédent comme 110 eſt à 100; & comme dans toute progreſſion Géométrique, le quotient du ſecond terme qui eſt ici 110, diviſé par le premier qui eſt ici 100, donne l'expoſant de la progreſſion, il s'enſuit que l'expoſant eſt $\frac{110}{100}$.

Appliquant ceci à la queſtion dont il s'agit, le Tuteur aïant adminiſtré dix ans les biens de ſon Pupille, il y a toutes les années un nouveau capital joint aux intérêts, ce qui fait 10 termes, auſquels ſi nous ajoutons le premier capital, nous aurons une progreſſion de 11 termes, dont le premier terme eſt 1000 & dont l'expoſant eſt $\frac{110}{100}$, & il s'agit de trouver le dernier terme de cette progreſſion; car ce dernier eſt le compte total que le créancier doit rendre, attendu qu'il renferme dans lui le capital & tous les intérêts, & les intérêts d'intérêts.

Or nous avons déja vû plusieurs fois que le dernier terme d'une progression Géométrique est égal au premier, multiplié par une puissance de l'exposant, dont le degré est moindre d'une unité que le nombre des termes; par conséquent pour avoir ce dernier terme, il faudroit élever l'exposant $\frac{110}{100}$ à sa dixiéme puissance, à cause que nous avons onze termes, & multiplier ensuite cette dixiéme puissance par le premier terme; mais comme cette opération seroit extrêmement longue & embarrassante, nous allons abréger la difficulté en nous servant des logarithmes.

Je prens donc le logarithme 2.0413927 de 110, & j'en retranche le logarithme 2.0000000 de 100, le reste 0.0413927 est le logarithme de l'exposant $\frac{110}{100}$; je multiplie ce logarithme par 10, & le produit 0.4139270 est le logarithme de l'exposant élevé à la dixiéme puissance; j'ajoute à ce logarithme le logarithme 3.0000000 du premier terme 1000, & la somme 3.4139270 est le logarithme du premier terme multiplié par la dixiéme puissance de l'exposant, par conséquent c'est le logarithme du dernier terme; & comme ce logarithme ne se trouve pas exactement dans la Table, je trouve par les méthodes précédentes, qu'il appartient au nombre $2593\frac{74}{100}$; ainsi, en évaluant cette fraction, le compte du Tuteur doit être de 2593 liv. 14 s. 9 den. $\frac{60}{100}$.

Si l'on prend la peine de faire ce même compte par la méthode que j'ai enseignée à ce sujet dans l'Arithmétique, on trouvera le même

2.0413927. | 110
2.0000000. | 100

0.0413927 | $\frac{110}{100}$
10

0.4139270
3.0000000

3.4139270

3.4139700. 2594
3.4138025. 2593

1675

3.4139270
3.4138025

1245

1675. 100. 1245

100
124500

1675 | 74
124500

7250 100
550

$2593\frac{74}{100}$

2593 liv. 14 s. 9 den. $\frac{60}{100}$.

me nombre 2593 liv. 14 sols ; mais au lieu de 9 den. $\frac{60}{100}$, on trouvera 10 deniers & une très-petite fraction, ce qui fait une différence d'environ 1 denier entre les deux méthodes ; & cette différence vient de ce qu'en faisant la régle de trois, qu'on voit ici, nous avons négligé le reste 550 de la division ; pour lequel, si nous avions mis au quotient 75 au lieu de 74, nous aurions trop pris, car nous aurions eu 15 sols, au lieu qu'en le négligeant nous avons pris trop peu ; mais ces sortes de différences sont de fort peu de conséquence, & après tout, il est facile d'y remédier en ajoutant un denier pour ce reste négligé.

SECONDE QUESTION.

Comment auroit-on pû trouver le compte précédent, si au lieu de 10 *ans il y avoit eu, par exemple,* 10 *ans,* 3 *mois &* 12 *jours ?*

Pour bien entendre ceci, il faut observer que puisque pour avoir le capital & les intérêts de la premiere année, il faut multiplier le capital 1000 par l'exposant $\frac{110}{100}$; & pour avoir le capital & les intérêts de la seconde année, il faut multiplier le même capital 1000 par le quarré de l'exposant ; & ainsi de même des autres années : les multiplicateurs des années sont donc les puissances successives de l'exposant, ce qu'on verra aisément en appellant a le capital 1000 & q l'exposant $\frac{110}{100}$; car la progression sera $a . aq . aqq . aq^3 . aq^4 . aq^5 . aq^6$, &c. & chacun de ses termes marquera le capital & l'intérêt de son année : or il est visible que de même qu'une année n'est que le tiers de 3 années, aussi le multiplicateur q d'une année n'est que la racine cubique ou troisiéme du multiplicateur q^3 de trois années ; & que de même qu'une année n'est que le $\frac{1}{4}$ de quatre années, le multiplicateur q d'une année n'est aussi que la racine quatriéme du multiplicateur q^4 de quatre années ; d'où il suit qu'un mois n'étant que la douziéme partie d'une année, le multiplicateur pour un mois ne doit être que la racine douziéme du multiplicateur q pour une année ; & de même deux mois étant la sixiéme partie d'une année, le multiplicateur pour deux mois doit être la racine sixiéme du multiplicateur q pour une année ; & ainsi des autres nombres de mois qui sont parties aliquotes d'une année, ou de douze mois, car je ne parle encore que de ceux-ci ; & je dirai bientôt comment il faut faire pour cinq mois, sept mois, dix mois, onze mois, qui ne sont pas parties aliquotes de douze.

Ceci supposé, je prens le compte total $2593\frac{74}{100}$ & son logarithme 3.41392 70 ; & puisqu'on demande les intérêts pour trois mois

ce eſt 100 : or le numérateur 2594374 du nombre propoſé eſt entre ces deux nombres, & ſa différence d'avec le petit eſt 74 ; c'eſt pourquoi je prens la différence 1675 des deux logarithmes, & je dis : Si la différence des nombres étant 100, celle des logarithmes eſt 1675, la différence des nombres étant 74, quelle ſera celle des logarithmes ? Et faiſant la régle, je trouve 1240. J'ajoute donc 1240 au moindre logarithme, & j'ai 5.4139265, qui eſt le logarithme du numérateur 2594374 du nombre propoſé.

J'ôte de ce logarithme celui du dénominateur 100, en retranchant deux unités de ſon caractériſtique, & le reſte 3.4139265 eſt le logarithme du nombre propoſé $\frac{2594374}{100}$.

Maintenant comme ce nombre eſt le dernier terme d'une progreſſion, dont le premier terme eſt 1000 & le nombre des termes eſt 11 ; je retranche le logarithme de 1000 du dernier logarithme, & le reſte 0.4139265 eſt le logarithme de la dixiéme puiſſance de l'expoſant ; ainſi je diviſe ce logarithme par 10, & le quotient 0.0415926 eſt le logarithme de l'expoſant ; pour trouver cet expoſant, j'ajoute à ſon logarithme le logarithme 3.5563025 de 3600, & la ſomme eſt 3.5976951 ; je cherche ce logarithme dans les Tables, & je trouve qu'il appartient à 3960 ; je diviſe ce nombre par 3600, à cauſe du logarithme de ce nombre que j'ai ajouté à celui de l'expoſant, & le quotient eſt $1\frac{360}{3600}$, lequel réduit en fraction,

5.4139700
5.4138025
1675

100. 1675
74
6700
11725
123950

100 | 12 3950 | 1239
23.9 1240.
39.5
95.0
50

5.4138025
1240
5.4139265
2.0000000
3.4139265

3.4139265
3.0000000
0.4139265

10 | 0.4139265 | 0.0415926
3.5563025
3.5976951

3600 | 9360 | $1\frac{360}{3600}$.
360

donne $\frac{3960}{3600}$; & diviſant le numérateur & le dénominateur par 36, j'ai $\frac{110}{100}$, qui eſt l'expoſant cherché; ainſi le premier terme 1000 de la progreſſion eſt au ſecond, comme 100 eſt à 110; & comme l'excès 10 de 110 eſt le dixiéme de 100, je connois que le denier auquel on a compté les intérêts eſt à 10 pour 100; & ceci eſt encore une preuve des opérations que nous avons faites dans la queſtion précedente.

Et ſi on m'avoit dit que le Tuteur avoit donné pour dix ans & trois mois 2656 $\frac{28}{100}$, j'aurois cherché, comme ci-deſſus, le logarithme 3.4242752 de ce nombre, j'en aurois retranché le logarithme du premier terme 1000, & le reſte 0.4242752 auroit été une puiſſance de l'expoſant; & pour trouver l'expoſant, j'aurois réduit les dix ans & trois mois en mois, ce qui fait 123 mois, que j'aurois conſidéré comme 123 termes d'une progreſſion; & par conſéquent le logarithme 0.4242752 auroit été le logarithme de la 123e puiſſance de l'expoſant d'un mois; diviſant donc le logarithme 0.4242752 par 123, le quotient 0.0034494 auroit été le logarithme de l'expoſant pour un mois; & comme l'expoſant pour une année eſt la douziéme puiſſance de l'expoſant d'un mois, multipliant le logarithme 0.0034494 par 12, le produit 0.0413928 auroit été le logarithme de l'expoſant d'une année; ainſi cherchant ce logarithme, comme ci-deſſus, j'aurois trouvé que l'expoſant d'une année étoit $\frac{110}{100}$.

123 | 0.4242752 | 34494

55.2
60.7
115.5
48.2
113

0.0034494 × 12

68988
34494

0.0413928

Enfin, ſi on me diſoit que ce Tuteur au bout de dix ans, trois mois & douze jours, a donné à ſon Pupille 2664 liv. $\frac{63}{100}$, je chercherois le logarithme 3.4256360 de ce nombre; j'en retrancherois le logarithme du premier terme 1000 liv. & le reſte ſeroit le logarithme d'une puiſſance de l'expoſant; & pour trouver cet expoſant, je réduirois dix ans, trois mois, douze jours en jours, ce qui donneroit 3752 jours, que je regarderois comme autant de termes d'une progreſſion; & par conſéquent le logarithme 0.4256360 ſeroit le logarithme de la 3752e

3.4256360
3.0000000
0.4256360

puiſſance de l'expoſant pour un jour ; c'eſt pourquoi je le diviſerois par 3752, & le quotient 0.0001134 ſeroit le logarithme de l'expoſant pour un jour ; & comme l'expoſant d'une année eſt la 365e puiſſance de l'expoſant d'un jour, je multiplierois 0.0001134 par 365, & le produit 0.0413910 ſeroit le logarithme de l'expoſant d'une année ; & en effet, ce logarithme eſt le même que celui que nous avons eu ci-deſſus, à l'exception des deux derniers caractéres, où il y a 27 au lieu de 10, ce qui vient de ce que nous avons négligé le reſte 2726 de la diviſion, mais cela ne ſauroit faire d'erreur ; ainſi ce logarithme une fois trouvé, je chercherois, par les méthodes précédentes, à quel nombre il appartient, & je trouverois $\frac{1.1.0}{100}$.

10 ans	3 mois
365 jours	30
3650	90
102	12 jours
3752	102

3751 | 1134
0.4256360

505.3
1302.6
17730
2726

1134
365
5670
6804
3402
413910

0.0413910

PROBLEME ONZIE'ME.

Connoiſſant le premier, le ſecond & le dernier termes d'une progreſſion Géométrique, connoître le nombre des termes.

Il faut ſe rappeller ici, que dans toute progreſſion *a.b.c.d.e*, &c. le premier terme eſt au troiſiéme, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond ; de même, le premier eſt au quatriéme, comme le cube du premier au cube du ſecond ; le premier eſt au cinquiéme, comme la quatriéme puiſſance du premier à la quatriéme puiſſance du ſecond, & ainſi des autres ; déſorte que pour ſavoir le rapport du premier terme à un autre terme de la progreſſion, quel qu'il ſoit, il faut élever les deux premiers termes à une puiſſance, dont l'expoſant ſoit égal au nombre des termes qui précédent celui à qui on compare le premier ; ainſi pour connoître le rapport du premier au cinquiéme, il faut élever les deux premiers à la quatriéme puiſſance ; & pour connoître le rapport du premier au dixiéme, il faut élever les deux premiers à la neuviéme puiſſance, & ainſi des autres ; ce que nous avons amplement expliqué en parlant des raiſons compoſées.

Soient

Soient les deux premiers termes d'une progreſſion Géométrique 2 & 4, & le dernier 128 ; je ne connois point le nombre des termes, mais pour le trouver, j'appelle le premier a, le ſecond b, le dernier d & le nombre des termes $x+1$; ainſi le nombre des termes qui précédent le dernier eſt x : il eſt sûr que le premier terme a eſt au dernier d, comme le premier terme a élevé à une puiſſance, dont l'expoſant eſt x, eſt au ſecond terme élevé à la même puiſſance ; nous avons donc $a^x . b^x :: a . d$; appellons m le logarithme du premier terme a, n celui du ſecond terme b & p celui du dernier terme : on ſait que quand on éleve un nombre à une puiſſance, il faut multiplier ſon logarithme par l'expoſant, c'eſt-à-dire, que ſi on éleve, par exemple, un nombre à la troiſiéme puiſſance, il faut multiplier ſon logarithme par 3, & ainſi des autres : donc le logarithme de a^x ſera xm, & celui de b^x ſera xn ; & mettant les logarithmes au lieu des nombres, dans la proportion Géométrique $a^x . b^x :: a . d$, nous aurons $xm . xn :: m . p$, qui ſera par conſéquent une progreſſion Arithmétique ; faiſant donc la ſomme des extrêmes & celle des moïens, nous aurons $xn+m=xm+p$; & ôtant de part & d'autre xm & m, nous aurons $xn-xm=p-m$; & diviſant par $n-m$, nous aurons $x=\frac{p-m}{n-m}$, c'eſt-à-dire, que le nombre des termes qui précédent le dernier eſt égal au logarithme du dernier, moins le logarithme du premier diviſé par le logarithme du ſecond terme, moins celui du premier : voilà donc une régle générale, non-ſeulement pour le dernier terme, mais encore pour tout autre terme qu'on voudra, ſi l'on appelle x le nombre des termes qui le précédent.

Ainſi prenant le logarithme 2.1072100 du dernier terme 128, ôtons-en le logarithme 0.3010300 du premier terme 2, le reſte 1.8061800 ſera le logarithme $p-m$; prenons de même le logarithme 0.6020600 du ſecond terme 4, ôtons-en le logarithme 0.3010300 du premier terme 2, le reſte ſera le logarithme $n-m$; diviſant le logarithme $p-m$ par le logarithme $n-m$, le quotient ſera x, c'eſt-à-dire, le nombre des termes qui précédent le dernier : donc la progreſſion aura ſept termes, qui ſont 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128.

2.1072100	
0.3010300	
1.8061800	$p-m$
0.6020600	
0.3010300	
0.3010300	$n-m$

3010300 | 6
1.8061800 |

Et ſi la progreſſion étoit deſcendante, comme la progreſſion 128 . 64, &c. dont le dernier terme eſt 2, alors les logarithmes $p-m$ & $n-m$ ſeroient négatifs, mais cela n'em-

pêcheroit pas qu'on ne réſolût de même la queſtion; car $p-m$ ſeroit alors -1.8061800, & $n-m$ ſeroit -0.3010300; & diviſant l'un par l'autre, on auroit également 6 au quotient, puiſque la diviſion de moins par moins donne plus.

Pour appliquer ceci aux queſtions précédentes, ſuppoſons qu'on nous diſe qu'un Tuteur aïant adminiſtré les biens de ſon Pupille, dont le capital étoit 1000 liv. il lui a rendu au bout d'un certain nombre d'années $2593\frac{74}{100}$, en comptant les intérêts à 10 pour 100, & qu'on demande pendant combien d'années il a adminiſtré ces biens? je prens le logarithme 3.4138025 du dernier terme $2593\frac{74}{100}$, j'en retranche le logarithme du premier terme 1000, & le reſte eſt le logarithme $p-m$.

3.4138025	
3.0000000	
0.4138025	$p-m$

Je prens le logarithme 0.0413927 de l'expoſant $\frac{110}{100}$, & l'ajoutant à celui du premier terme 1000, la ſomme 3.0413927 eſt le logarithme du ſecond terme; & retranchant de celui-ci, celui du premier terme, le reſte eſt encore le logarithme de l'expoſant, & ce logarithme eſt $n-m$; diviſant donc $p-m$ par $n-m$, le quotient 9 eſt le nombre des termes qui précédent le dernier: donc il y a dix termes, & par conſéquent le Tuteur a adminiſtré pendant dix ans.

3.0000000	
0.0413927	$n-m$
3.0413927	
0.0413927 |	
0.4138025 |	9
412682	

Mais ſi le Tuteur avoit adminiſtré les biens de ſon Pupille pendant un certain nombre d'années & de mois, nous regarderions la progreſſion comme compoſée d'une ſuite de mois; & comme un mois eſt la douziéme partie d'une année, l'expoſant pour un mois ſeroit la racine douziéme de l'expoſant de l'année; c'eſt pourquoi nous diviſerions le logarithme 0.413927 par 12, & le quotient 0.0034494 ſeroit le logarithme de l'expoſant pour un mois; ainſi le logarithme 0.0034494 ſeroit $n-m$; & en ſuppoſant que le dernier terme fût $2656\frac{28}{100}$, dont le logarithme eſt 3.4242752, nous ôterions de ce logarithme celui du premier terme 1000, & le reſte 4242752 ſeroit $p-m$; diviſant donc $p-m$ par $n-m$, le quotient 122 eſt le nombre des termes qui précédent le dernier; par conſéquent le Tuteur auroit

12 |	
0.413927 |	34494
53	
59	
112	
47	
11	
34494 |	
4242752 |	122
79335	
103472	
34484	

adminiſtré les biens de ſon Pupille pendant 123 mois, c'eſt-à-dire, pendant dix ans & trois mois.

Et ſi le Tuteur avoit rendu $2664\frac{61}{100}$, pour avoir adminiſtré un certain nombre d'années, de mois & de jours, on réduiroit la progreſſion en jours ; & comme un jour eſt la 365e partie d'une année, on diviſeroit le logarithme de l'expoſant d'une année par 365, & le quotient 0.0001134 ſeroit le logarithme de l'expoſant pour un jour, & par conſéquent il ſeroit $x-m$; ôtant enſuite du logarithme 3.4256360 du dernier terme $2664\frac{61}{100}$, celui de premier terme 1000, le reſte 0.4256360 ſeroit $p-m$; faiſant donc la diviſion, le quotient 3753 ſeroit le nombre des termes qui précédent le dernier, & par conſéquent le Tuteur auroit adminiſtré les biens de ſon Pupille pendant 3754 jours, c'eſt-à-dire pendant dix ans, trois mois & douze jours.

365		
41 3927	1134	
48.9		
124.2		0.0001134
147.7		
17		
1134		
4256360	3753	
854.3		
605.6		
386.0		
458		

Il y a cependant ici une différence de deux jours ; car nous n'avons trouvé ci-deſſus que 3752 jours, & cette différence vient de ce que dans la queſtion précédente nous n'avons ſupputé les années qu'à 365 chacune, au lieu que dans l'eſpace de dix ans il s'en trouve deux de biſſextiles qui en ont 366 ; mais nous avons alors négligé cette différence, parce que comme elle ne ſe trouve qu'au dernier caractére du diviſeur 3752, elle ne pouvoit cauſer aucune erreur.

On pourroit, par le moïen du même problême, réſoudre beaucoup de queſtions d'Algébre auſquelles je ne m'arrête point, de peur d'être trop long.

Des fractions Décimales.

XV. Si on prend une ſuite de fractions, dont les dénominateurs ſoient les puiſſances ſucceſſives de 10, & les numérateurs ſoient toujours l'unité, cette ſuite $\frac{1}{10}.\frac{1}{100}.\frac{1}{1000}.\frac{1}{10000}.\frac{1}{100000}$, &c. s'appellera la ſuite des fractions décimales ; & ſi au lieu d'écrire ces fractions de la maniere ordinaire, on efface leurs dénominateurs & l'on met à chaque numérateur un petit caractére romain en guiſe d'expoſant, qui marque la puiſſance de chacun de leurs diviſeurs, com-

me on voit ici, $1'.\ 1''.\ 1'''.\ 1^{IV}.\ 1^{V}$, &c. on appellera le premier de ces caractéres ' *prime ;* le ſecond '', *ſeconde ;* le troiſiéme ''', *tierce*, & ainſi des autres ; par conſéquent lorſqu'on voudra écrire, par exemple, deux dixiémes, on mettra 2' ; de même pour écrire trois milliémes, on mettra 3''', &c. ce qui eſt d'une grande commodité, non-ſeulement pour éviter l'embarras ordinaire aux expreſſions des fractions, mais encore pour toutes ſortes de calculs, & ſur tout pour le toiſé, comme nous dirons bientôt.

Ces primes, ſecondes, tierces, quartes, &c. ont les mêmes propriétés que les expoſans des puiſſances & les logarithmes des nombres, c'eſt-à-dire, que pour ſavoir ce que donnent, par exemple, des ſecondes multipliées par des tierces, on n'aura qu'à ajouter le caractére des ſecondes à celui des tierces, & la ſomme ᵛ marquera que le produit des ſecondes par des tierces donne des quintes ; de même pour ſavoir ce que donnent des ſeptiémes diviſées par des quartes, ôtant du caractére 7 des ſeptiémes, le caractére 4 des quartes, le reſte 3 marquera que le quotient contient des tierces ; ainſi en diviſant 6ᵛ par 3'', 6 par 3 donnera 2 ; & pour ſavoir comment on doit appeller ce quotient, on retranchera du caractére ᵛ le caractére '', & le reſte ''' ſera le caractére du quotient, &c.

Pour mieux comprendre le calcul des fractions décimales & l'uſage qu'on en peut faire, prenons une toiſe, diviſons-la d'abord en dix parties égales ou primes ; enſuite chaque prime en dix parties ou ſecondes ; chaque ſeconde en dix tierces ; chaque tierce en dix quartes, &c. toutes ces diviſions étant marquées ſur la toiſe, meſurons avec elle une ſurface, un corps ou un ſolide de telle eſpéce qu'on voudra, & écrivons la valeur des dimenſions : ſi nous trouvons, par exemple 10 toiſes, 3 primes, 2 ſecondes, 8 tierces de longueur ; écrivons 10. 3' 2'' 8''' de longueur ; ſi nous trouvons 5 toiſes, 6 primes, 9 ſecondes, 7 tierces ; écrivons 5. 6' 9'' 7''', &c. mettant toujours un point entre les toiſes & les primes pour en faire la ſéparation ; cela fait, voici comment nous ferons ſur ces ſortes d'expreſſions les opérations Arithmétiques dont nous pourrons avoir beſoin.

1°. Si nous voulons réduire les valeurs trouvées en leurs dernieres fractions, comme, par exemple, 10. 3' 2'' 8''' en tierces, nous effacerons tous les caractéres qui ſervent d'expoſans, à la réſerve du dernier, & nous aurons 10328''', c'eſt-à-dire, dix mille trois cens vingt & huit tierces de toiſes, ce qui eſt bien évident ; car pour réduire des toiſes en tierces, qui ſont des milliémes, il faut multiplier les toiſes par 1000, & enſuite mettre ſous elle le dénominateur 1000 : or en multipliant les toiſes par 1000, on les fait paſſer au

rang des mille, c'eſt-à-dire, au quatriéme rang de droite à gauche ; & c'eſt préciſément ce que nous faiſons ici, puiſqu'il ſe trouve devant les toiſes des primes, des tierces & des ſecondes qui occupent les trois premiers rangs ; & quant au dénominateur mille que nous n'écrivons pas, le caractére $'''$ ſupplée à ſon défaut ; par la même raiſon, ſi nous voulons réduire $12.2'3''4'''5^{IV}$ en fractions, nous écrirons 122345^{IV}, & ainſi des autres ; en obſervant que s'il manquoit quelques-unes de ces fractions, comme des tierces ou des quartes, il faudroit mettre un zero pour occuper leur rang, de même qu'on fait dans l'Arithmétique lorſqu'il manque des dixaines, ou des centaines, ou des mille, &c. ainſi nous écrirons 67002^{IV} pour exprimer 6 toiſes, 7 primes & 2 quartes, parce qu'entre les primes & les quartes, il y a les ſecondes & les tierces dont il faut marquer les rangs.

2°. Pour réduire les fractions en entiers, comme, par exemple, $53678'''$, nous mettrons à chaque chiffre le caractére qui lui convient, ſelon la place qu'il occupe ; à l'égard du dernier, c'eſt-à-dire des $''$, au caractére 7 qui vient immédiatement après le chiffre 8 dont le caractére eſt $'''$, des primes au caractére 6 qui vient après 7 ; & enſuite un point entre 6 & 3, parce qu'après les primes viennent les entiers, ainſi nous aurons $53.6'7''8'''$, ce qui eſt encore évident ; car puiſque chaque chiffre dans l'Arithmétique vaut dix fois plus que le précédent, il faut bien que le dernier $8'''$ étant des tierces, celui qui vient après lui ſoit des ſecondes, & celui d'enſuite des primes, après quoi le reſte doit être néceſſairement des toiſes ; voilà donc déja une grande facilité pour les réductions, que l'on ne trouve pas dans les autres calculs.

3°. Pour ajouter enſemble $32.6'3''4'''$ & $8.5'4''3'''$, nous réduirons tout en fraction, ce qui donnera d'une part $32634'''$, & de l'autre $8543'''$; & faiſant l'addition à l'ordinaire, nous aurons $41177'''$ ou $41.1'7''7''$.

$$\begin{array}{r} 32634''' \\ 8543''' \\ \hline 41177''' \end{array}$$

Et pour ajouter enſemble $53.8'7''4'''6^{IV}$ & $35.6'5''3'''$, la réduction en fraction nous donnera d'une part 538746^{IV} & de l'autre $35653'''$; après quoi, pour faire l'addition, nous écrirons ces deux ſommes l'une ſous l'autre, de façon que le dernier caractére de la ſeconde, qui n'eſt que des tierces, ſoit ſous le pénultiéme caractére de la premiere, parce que celle-ci contient des quartes dans ſon dernier caractére, & par conſéquent les tierces ſont au pénultiéme ; & faiſant l'addition à l'ordinaire, nous aurons 895276^{IV} ou $89.5'2''7'''6^{IV}$; & ainſi des autres.

$$\begin{array}{r} 538746^{IV} \\ 35653''' \\ \hline 895276^{IV} \end{array}$$

Que ſi on vouloit ſe paſſer de réduire tout en fraction, ce qui cependant eſt fort aiſé, on écriroit les toiſes ſous les toiſes, les primes ſous les primes, les ſecondes ſous les ſecondes, &c. & on feroit l'addition de même que dans l'addition compoſée, en obſervant, lorſqu'une ſomme ſeroit plus grande que 10, de tranſporter une dixaine à la colomne ſuivante; ainſi dans cet exemple quand on ſera venu aux primes, on dira: 6 & 5 ſont 11, & l'on écrira 1 ſous les primes, en tranſportant une dixaine aux toiſes, &c.

32.	6′	3″	4‴
8.	5′	4″	3‴
41.	1′	7″	7‴

4°. Pour ſouſtraire 5. 2′ 3″ 4‴ de 8. 6′ 7″ 8‴, on réduira tout en fraction & l'on fera la ſouſtraction à l'ordinaire, & le reſte ſera 3444‴ ou 3. 4′ 4″ 4‴, ou bien l'on écrira les toiſes ſous les toiſes, les primes ſous les primes, &c. & l'on achevera la ſouſtraction de même qu'on fait pour la ſouſtraction compoſée.

8678
5234
3444‴

8.	6′	7″	8‴
5.	2′	3″	4‴
3.	4′	4″	4‴

Et ſi l'on étoit obligé de faire des emprunts, comme dans cet exemple-ci, où les tierces du nombre à ſouſtraire ſont en plus grand nombre que les ſupérieures, on emprunteroit aux ſecondes; & comme il n'y en a point, on emprunteroit une prime; & cette prime valant 10 ſecondes, on laiſſeroit 9 ſecondes au rang des ſecondes, & l'on diroit enſuite: Une ſeconde qui nous reſte vaut 10 tierces, & 3 que nous avons font 13; & de 13 ôtez 9, reſte 4; & enſuite de 9 ſecondes ôtez 6, reſte 3; puis de 5 primes ôtez 7, cela ne ſe peut, & l'on emprunteroit une toiſe ou 10 primes, leſquelles jointes avec les 5 feroient 15; & de 15 ôtez 7, reſte 8; enfin de 8 ôtez 5, reſte 3.

9.	6′	0″	3‴
5.	7′	6″	9‴
3.	8′	3″	4‴

5°. Pour multiplier 32. 3′ 4″ 3‴ par 2. 4′ 3″, on réduira tout en fraction; & faiſant la multiplication à l'ordinaire, on aura 7859349; & pour ſavoir quel nom on doit donner à ces parties du produit, on ajoutera l'expoſant ″ du multiplicateur à l'expoſant ‴ du nombre à multiplier, & l'on aura l'expoſant ᵛ du produit; car les tierces ſont la troiſiéme puiſſance de 10; & les ſecondes, la ſeconde puiſſance; & la troiſiéme puiſſance, multipliée par la ſeconde, donne la cinquiéme; ainſi l'on aura 7859394ᵛ ou 78. 5′ 9″ 3‴ 4ᴵᵛ 9ᵛ; & ainſi des autres.

	32343‴
	243″
	97029
	129372
	64686
	7859349ᵛ

6°. Pour diviſer 78. 5′ 9″ 3‴ 4ᴵᵛ 9ᵛ par 32. 3′ 4″ 3‴, on réduira tout en fraction, & faiſant la diviſion à l'ordinaire, le quotient

sera 243; & pour savoir quel en est l'exposant, on retranchera l'exposant ''' du diviseur, de l'exposant ' du dividende, & le reste '' sera l'exposant du quotient; ainsi l'on aura 243 ' ou 2. 4' 3''; car la cinquiéme puissance, divisée par la troisiéme, donne la seconde.

Et si la division n'étoit pas exacte, comme dans cet exemple-ci, on écriroit le reste en fraction, en la maniere ordinaire; & l'on auroit 391'' $\frac{175}{0312}$ ou 3. 9' 1'' $\frac{175}{9312}$.

7°. Pour tirer la racine quarrée de 12. 9' 6'', on réduira tout en fractions; puis faisant l'extraction à l'ordinaire, on aura 36; & pour savoir quel doit être l'exposant de cette racine, on prendra la moitié ' de l'exposant '' du quarré, & ' sera l'exposant de la racine 36; ainsi l'on aura 36' ou 3. 6'.

Et si l'exposant du quarré étoit '', ou '', ou ''', c'est-à-dire, qu'il fût toujours pair, on prendroit la moitié & l'on auroit '', ou ''', ou '', &c. pour l'exposant du quotient; mais si l'exposant étoit impair, comme ''', ou '', ou '', on écriroit sous lui en fraction, l'exposant '' de racine quarrée, & l'on auroit $\frac{III}{II}$, ou $\frac{V}{III}$, ou $\frac{VII}{II}$, &c. pour l'exposant du quotient, ce qui signifieroit racine seconde de la troisiéme puissance ou de la cinquiéme, &c. ainsi que nous avons dit en parlant du calcul des exposans.

Et de même, pour tirer la racine cubique d'un nombre dont l'exposant seroit ou ''', ou '', ou '', ou '', &c. c'est-à-dire, toujours divisible par 3; on prendroit le tiers de l'exposant, & l'on auroit ', ou '', ou ''', ou '', &c. pour l'exposant de la racine; mais si l'exposant étoit ou '', ou '', ou '', ou '', &c. ensorte qu'il ne fût pas divisible par 3, on écriroit sous son exposant l'exposant ''' de racine cubique, & l'on auroit ou $\frac{II}{III}$, ou $\frac{IV}{III}$, ou $\frac{V}{III}$, &c. pour l'exposant de la racine, ce qui signifieroit racine cubique de la seconde puissance, ou de la quatriéme, ou de la cinquiéme, &c.

Voilà en quoi consiste ce calcul des fractions décimales, par le moïen duquel on peut s'épargner bien de l'embarras dans le toisé. L'unique difficulté qui reste, est de savoir comment on peut réduire ces primes, secondes, tierces, &c. de toises, à ses divisions ordinaires, qui sont des pieds, pouces & lignes; & cette difficulté est encore très-facile à résoudre, comme on va bientôt voir.